Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 4 **Abgabe:** 21.11.2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei I die Kollektion aller nicht-leerer endlicher Teilmengen einer Theorie T in einer Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass für jedes s aus I eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}_s$ derart existiert, dass $\mathcal{A}_s \models \bigwedge\limits_{\varphi \in s} \varphi$.

1. Zeige, dass die Familie $\{B_s\}_{s \in I}$ eine Filterbasis bildet, wobei
$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \bigwedge_{\varphi \in s} \varphi\}.$$
2. Schließe aus dem Łośschen Satz, dass T ein Modell besitzt.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $\mathcal{K} = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ eine Klasse von Strukturen in einer Sprache $\mathcal{L}$. Nehme einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf I, welcher kein Hauptfilter ist.

1. Zeige, dass $\prod_{\mathfrak{U}} \mathcal{A}_i$ ein Modell der Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$.
2. Sei $\{\mathbb{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung (bis auf Isomorphie) aller endlichen Körper in der Ringsprache. Gegeben einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf $\mathbb{N}$, welcher kein Hauptfilter ist, zeige, dass $\mathbb{F} = \prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{F}_n$ ein unendliches Modell der Theorie aller endlichen Körper.
3. Bestimme die Charakteristik von $\mathbb{F}$.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, sei $\mathfrak{B}$ die Kollektion aller Intervallen der Form (a, ∞), mit a aus $\mathbb{R}$.

1. Zeige, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis einer Topologie T_∞ bildet.
2. Ist das Intervall $(0, 1)$ offen? Ist es abgeschlossen?
3. Ist die Topologie T_∞ Hausdorff? Ist sie T_1?
4. Ist die Einermenge $\{0\}$ abgeschlossen?
5. Untersuche, ob die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Abbildung:
   (a) von $(\mathbb{R}, T_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, T_\infty)$.
   (b) von $(\mathbb{R}, T_\infty)$ nach $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie.
   (c) von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie nach $(\mathbb{R}, T_\infty)$.

   stetig ist.