Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 5 **Abgabe:** 28.11.2017

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei X eine beliebige Menge.

1. Zeige, dass die Kollektion $\mathfrak{B}$ aller Teilmengen mit abzählbarem Komplement eine Basis einer Topologie bildet.
2. Zeige, dass diese Topologie genau die diskrete Topologie ist, falls X abzählbar ist.
3. Für beliebiges X, ist diese Topologie T_1? Falls X überabzählbar ist, ist sie Hausdorff?

Aufgabe 2. (2 Punkte)
Es sei X ein Hausdorff topologischer Raum und $\{K_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie kompakter Teilmengen. Zeige, dass $\bigcap_{i\in I} K_i$ auch kompakt ist.

HINWEIS: Für i_0 aus I fest, ist die Menge $\bigcap_{\substack{j\in I\\ j\neq i_0}} K_j$ abgeschlossen. Bilde aus einer offenen Überlagerung von $\bigcap_{i\in I} K_i$ eine offene Überlagerung von K_{i_0}.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei X ein topologischer Raum, welcher T_1 ist.

1. Zeige, dass jede Einermenge abgeschlossen ist.

   Insbesondere ist jeder Punkt in einem Hausdorff topologischen Raum abgeschlossen.
2. Ein Element x ist *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, falls für jede Umgebung U von x es eine Zahl n gibt, so dass a_m in U liegt, für $m \geq n$.

   Welche Punkte aus $\mathbb{R}$ sind Limes der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Topologie T_∞? (siehe Aufgabe 3 vom Blatt 4).
3. Zeige, dass jede Folge aus einem topologischen Hausdorff Raum X höchstens einen Limes besitzt.

Aufgabe 4. (6 Punkte) In einer Sprache $\mathcal{L}$, seien $A \subset B$ Teilmengen einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$. Für festes n aus $\mathbb{N}$, betrachte die Einschränkungabbildung:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Restr}: & \mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(B) & \to & \mathrm{S}_n^{\mathcal{M}}(A) \\ & p & \mapsto & p_{\restriction A} = \{\varphi\, \mathcal{L}_A - \text{Aussage} \,|\, \varphi \in p\} \end{array}$$

1. Zeige, dass Restr wohldefiniert und
2. Zeige, dass Restr stetig ist.
3. Zeige, dass Restr eine abgeschlossene Abbildung ist.

   HINWEIS: Stoneräume sind Hausdorff und kompakt.