Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 6 **Abgabe:** 05. 12. 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte) Betrachte $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ als Modell der Theorie T =DLO der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$.

1. Zeige, dass es genau einen 1-Typ $p(x)$ über $\mathbb{Q}$ gibt, welcher die Menge von Formeln
$$\{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$$
enthält.

2. Zeige, dass p nicht isoliert ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei p ein n-Typ der Theorie T in der Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass in jedem Modell $\mathcal{M}$ von T der Typ p höchstens N Realisierungen in $\mathcal{M}$ besitzt.

1. Zeige mit Kompaktheit, dass es eine Formel $\varphi(\bar{x})$ in p derart gibt, dass $T \models \exists^{\leq N} \bar{x} \varphi(\bar{x})$.

2. Zeige, dass p isoliert in $\mathrm{S}_n(T)$ ist.

   HINWEIS: Nimm eine Formel in p kleinster Mächtigkeit.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $\mathcal{A}$ ein Modell der Theorie $T = \exists^{\infty} x$ einer unendlichen Menge in der leeren Sprache $\mathcal{L}$.

1. Zeige, dass jedes Element aus A einen isolierten 1-Typ über A bestimmt.

2. Beschreibe explizit alle Elemente aus $\mathrm{S}_1^{\mathcal{A}}(A)$.

3. Was ist die Mächtigkeit von $\mathrm{S}_1^{\mathcal{A}}(A)$?

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Bestimme (bis auf Isomorphie) das Primmodell folgender Theorien, falls es überhaupt existiert.

1. Die Theorie $T = \exists^{\infty} x$.

2. Die Theorie unendlicher Vektorräume über $\mathbb{Q}$.

3. Die Theorie von abzählbar vielen Zufallsprädikaten (siehe Aufgabe 4 vom Blatt 1).

   HINWEIS: Zeige zuerst, dass die Theorie Quantorenelimination hat. Kann eine Formel in einer Variable einen 1-Typ bestimmen?