**Abteilung für mathematische Logik**
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

# Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 7 **Abgabe:** 12. 12. 2017

**Aufgabe 1.** (6 Punkte)

Eine Teilmenge $Y$ eines topologischen Raumes $X$ ist *dicht*, falls $Y \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge $U$ von $X$.

1. Falls $X$ unendlich und $T_1$ ist, zeige, dass jede dichte Teilmenge unendlich ist.

   **HINWEIS:** Aus einer geeigneten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $X$ bilde eine Folge von verschiedenen Elementen aus $Y$.

2. Angenommen, dass $X$ unendlich, kompakt und 0-dimensional derart ist, dass $X$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, zeige, dass $X$ die *Baire Eigenschaft* besitzt: für jede Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ offener dichter Mengen gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.

   **HINWEIS:** Konstruiere eine absteigende Kette $\emptyset \neq B_{n+1} \subset B_n \subset U_n$ von Basiselementen und nehme das Komplement.

**Aufgabe 2.** (14 Punkte)

Sei nun eine widerspruchsfreie Theorie $T$ in der Sprache $\mathcal{L}$ und betrachte eine unendliche Menge $C$ neuer Konstantenzeichen. Sei $S_0^{\mathcal{L}\cup C}(T)$ der topologischer Raum aller Vervollständigungen von $T$, als $\mathcal{L}\cup C$-Theorie.

1. Gegeben eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x)$ in einer freien Variable, zeige, dass die Teilmenge

   $$U(\varphi) = \{T' \in S_0^{\mathcal{L}\cup C}(T) \mid \exists c \in C, \text{ so dass } (\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(c)) \in T'\}$$

   offen und dicht ist.

   **HINWEIS:** Eine Aussage $\chi$ in $T'$ enthält nur endliche viele Konstanten aus $C$. Setze eine geeignete $\mathcal{L}\cup C$-Struktur auf ein Modell von $\mathcal{T}'$ und betrachte sein vollständiges Diagramm.

2. Gegeben $c_1, \ldots, c_n$ aus $C$, zeige, dass die Abbildung

   $$\begin{array}{rccl} \alpha_{\bar{c}}: & \mathrm{S}_0^{\mathcal{L}\cup C}(T) & \to & \mathrm{S}_n^{\mathcal{L}}(T) \\ & T' & \mapsto & \{\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,\mathcal{L}\text{ -Formel } \mid T' \models \varphi(c_1,\ldots,c_n)\} \end{array}$$

   wohl-definiert und surjektiv ist.

3. Zeige, dass die obige Abbildung (mit den entsprechenden Topologien) stetig ist.

4. Zeige, dass das Urbild einer dichten Menge $X \subset \mathrm{S}_n^{\mathcal{L}}(T)$ dicht in $\mathrm{S}_0^{\mathcal{L}\cup C}(T)$ ist.

   **HINWEIS:** Gegeben eine $\mathcal{L}\cup C$-Aussage $\chi = \chi(c_1,\ldots,c_n,\bar{d})$, wobei $\bar{d}$ ein Tupel aus $C$ mit $\bar{d}\cap\{c_1,\ldots,c_n\} = \emptyset$ ist, finde einen $n$-Typ in $X$, welcher $\exists\bar{y}\chi(x_1,\ldots,x_n,\bar{y})$ enthält. Setze eine geeignete $\mathcal{L}\cup C$-Struktur auf ein bestimmtes Modell.