Abteilung für mathematische Logik
Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Dr. Zaniar Ghadernezhad

Modelltheorie

Wintersemester 2017/18
Übungsblatt 9 **Abgabe:** 23.01.2017

Aufgabe 1. (6 Punkte) In der Sprache $\mathcal{L} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{<\}$, welche aus unendlich vielen Konstantenzeichen c_n und aus einem 2-stelligen Relationszeichen besteht, betrachte die $\mathcal{L}$-Theorie T, deren Modelle genau alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart sind, dass die lineare Ordnung $<^{\mathcal{A}}$ dicht ohne Randpunkte ist und die Folge $(c_n^{\mathcal{A}})$ streng wachsend ist, das heißt, für jedes n gilt $c_n^{\mathcal{A}} < c_{n+1}^{\mathcal{A}}$.

1. Zeige, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat.
2. Zeige, dass T genau drei abzählbare Modelle besitzt.

   HINWEIS: Muss die Folge $(c_n^{\mathcal{A}})$ eine obere Grenze haben?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeige, dass die Klasse aller endlichen total geordneten Mengen in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$ eine Fraïssé Klasse ist und beschreibe die Theorie ihres Fraïssé Limes.

Aufgabe 3. (4 Punkte) In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationzeichen ist, sei $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, deren Klassen höchstens 2 vielen Elementen besitzen.
Zeige, dass $\mathcal{K}$ einen Fraïssé Limes besitzt, und dass jede E-Klasse im Fraïssé Limes aus 2 Elementen besteht.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in einer Sprache $\mathcal{L}$ und $A \subset M$ eine Teilmenge. Betrachte die *Einschränkungsabbildung* auf die erste Variable:

$$\begin{array}{rrcl} \pi: & S_2^{\mathcal{M}}(A) & \to & S_1^{\mathcal{M}}(A). \\ & q(x,y) & \mapsto & \{\varphi(x) \ \ \mathcal{L}_A\text{-Formel, mit } \varphi(x) \in q(x,y)\}. \end{array}$$

1. Zeige, dass π wohldefiniert und surjektiv ist.
2. Zeige, dass die Abbildung π stetig, abgeschlossen und offen ist.
3. Für ein b aus M, sei $p = \mathrm{tp}(b/A)$ in $S_1^{\mathcal{M}}(A)$ ein realisierter Typ. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rrcl} f: & S_1^{\mathcal{M}}(A,b) & \to & \pi^{-1}(p) \\ & q(y) & \mapsto & p(x) \cup \{\varphi(x,y) \ \ \mathcal{L}_A\text{-Formel, mit } \varphi(b,y) \in q(y)\}. \end{array}$$

   Zeige, dass f wohldefiniert und bijektiv ist.

Insbesondere folgt für eine abzählbare vollständige λ-stabile Theorie, dass $|S_2^{\mathcal{M}}(A)| \leq \lambda$ für jede Teilmenge A der Mächtigkeit höchstens λ in jedem Modell $\mathcal{M}$.