Mathematische Logik (Erste Auflage): Errata

Dies ist die aktuelle Fehlerliste von *Mathematische Logik*. Mathematik Kompakt. Birkhäuser, 2010. Erste Auflage.

Hinweise auf Fehler verdanke ich Hans Adler, Philipp Bamberger, Franz Baumdicker, Simon Börger, Juan-Diego Caycedo, Matthias Fetzer, Martin Hils, Mohsen Khani, Heike Mildenberger, Amador Martin Pizarro, Aaron Puchert, Luca Motto Ros und Katrin Tent.

- Seite 6, Hilfsatz 1.2. Der letzte Satz des Beweises wird besser ersetzt durch: *Wenn $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ und $\varphi' = (\psi_1' \wedge \psi_2')$, ist ψ_1 Anfangsstück von ψ_1' oder umgekehrt, woraus nach Induktionsannahme folgt, daß beide gleich sind. Also muß ψ_2 ein echtes Anfangsstück von ψ_2' sein. Das widerspricht der Induktionsannahme.*
- Seite 7, Aufgabe 4. Die Behauptung, insbesondere Teil a) stimmt nicht, wenn L Funktionszeichen enthält.
- Seite 12, Aufgabe 6. Es muß heißen $p(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$.
- Seite 14, Lemma über die Axiome der Gleichheit. In allen Formeln außer im Reflexivitätsaxiom fehlen Klammern nach den Allquantoren. Das Symmetrieaxiom muß zum Beispiel so lauten: $\forall x, y\ \ (x \doteq y \to y \doteq x)$.
- Seite 16, Aufgabe 11. Ein Beispiel für eine Formel, die immer den Wahrheitswert **F** hat, ist $(p \wedge \neg p)$, und nicht etwa $(p \wedge \neg q)$.
- Seite 16. Die Formeln in Aufgabe 12 sind $\bigvee_{i=1}^{N} k_i$ und $\bigwedge_{i=1}^{N} d_i$.
- Seite 16. Der erste Satz von Aufgabe 13 muß lauten: *Zeigen Sie, daß* $\{\wedge, \neg\}$ *ein* vollständiges Junktorensystem *ist.*
- Seite 19. Der Satz in Zeile 8 *Zusammen mit ...* sollte besser so weitergehen: *den $\forall$–Quantorenaxiomen $\forall y_i, \ldots, y_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_n)$ $\to \forall y_{i+1}, \ldots, y_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1} \ldots, y_n)$, $(i = 1, \ldots, n)$, und Aussagenlogik ergibt sich $\vdash_L \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.*
- Seite 19. Im Absatz nach dem Beweis von Lemma 4.2, sollte es besser heißen: 4.1 (1).
- Seite 20, letzter Teil von Schritt 1. Es muß dort heißen: *Wenn wir so fortfahren, erhalten wir eine widerspruchsfreie Henkintheorie $T^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ mit Konstantenmenge $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.*
- Seite 21. Am Anfang von Schritt 3 muß es heißen: *ist T^* das vollständige Diagramm von $\mathfrak{A}$* statt *ist T^* das vollständige Diagramm von $\mathfrak{A}^*$*. Im Beweis der Eindeutigkeit sollte man den Isomorphismus F nennen, nicht f.

- Seite 22. Nach Gleichung (2) fehlt ein $\in T^*$. Es muß heißen:

$$a_{c_1} = a_{d_1}, \ldots, a_{c_n} = a_{d_n},\ R(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \quad \Rightarrow \quad R(d_1, \ldots, d_n) \in T^*.$$

- Seite 28. Im dritten und vierten Fall muß φ_i statt φ stehen.
- Seite 30. Am Anfang des Beweises des Interpolationssatzes schreibt man besser: *Denn wenn* $\varphi_1 \succ \beta(c_1, \ldots, c_n)$ *und* $\beta(c_1, \ldots, c_n) \succ \varphi_2$ *allgemeingültig sind, leistet* $\delta = \exists x_1, \ldots, x_n\ \beta(x_1, \ldots x_n)$ *das Verlangte.*
- Seite 31. Im vierten Fall muß stehen $\Delta_1 \cup \Delta_2 \succ (\Gamma_1' \cup \{\varphi_i\}) \cup \Gamma_2$.
- Seite 32. Die letzte Formel von Aufgabe 28 muß richtig heißen:

$$T(P) \vdash \forall x\,(P(x) \leftrightarrow \pi(x)).$$

- Seite 33. In der siebten und achten Zeile von unten sollte stehen:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \exists x\psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \exists y\,(\varphi \wedge \psi\frac{y}{x}) \\ (\varphi \wedge \forall x\psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \forall y\,(\varphi \wedge \psi\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

- Seite 35. Im Beweis des Satzes von Herbrand muß es heißen: *Nehmen wir umgekehrt an, daß*

$$\bigwedge_{i=1}^{N} \neg\,\psi(t^i) = \neg\,\psi(t_1^1, t_2^1, \ldots t_n^1) \wedge \cdots \wedge \neg\,\psi(t_1^N, t_2^N, \ldots t_n^N)$$

- Seite 38, oben. Die erste Formel heißt richtig:

$$x_1 \doteq f(c, g(x_3, x_3))$$

- Seite 39, Zeile 2: Es muß heißen:

  Die Allgemeingültigkeit einer aussagenlogischen Formel f läßt sich feststellen, indem man überprüft, daß alle Belegungen der Variablen von f den Wahrheitswert **W** *ergeben.*

- Seite 39, Formel (7.2). Es muß heißen:

$$\bigvee_{C \in \mathcal{C}} \bigwedge_{L \in C} L$$

- Seite 39, Ende des Paragraphen nach Formel (7.2). Es muß heißen:

  Wir lassen auch die leere Klauselmenge zu, die nicht erfüllbar ist, und die leere Klausel, die immer den Wahrheitswert **W** *hat.*

- Seite 40. Überall muß $\mathrm{C}|p$ statt $\mathrm{C}|A$ stehen. Unten muß es richtig heißen *Weil* p *in* $\mathrm{C}|p = \mathbf{W}$ *und* $\mathrm{C}|p = \mathbf{F}$ *nicht mehr vorkommt*
- Seite 45. Das Lemma über die Existenz des direkten Produkts muß beginnen mit: *Aus den Axiomen von* ZFC *folgt ....*
- Seite 46. Es muß heißen

$$F = \{(u, z) \mid \varphi(u, z, \overline{w})\}.$$

- Seite 49, Aufgabe 37, Teil 2. Es muß heißen

$$\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k})$$

und

$$\cdots n_{-3}\, E_\beta\, n_{-2}\, E_\beta\, n_{-1}\, E_\beta\, n_0$$

- Seite 51, Definition von „transitiv“. *Elemente* statt Element.
- Seite 53, Lemma (2). Es muß heißen: *der unmittelbare Nachfolger von* n
- Seite 53, Beweis des Lemmas. Besser wäre $m \leq n.^{10}$ 10 ist kein Exponent, sondern verweist auf eine Fußnote.
- Seite 55, Beweis von 1. In der ersten Zeile soll es heißen: $x < y \in S \to x \in S$
- Seite 55, Beweis von 3. Es sollte besser heißen: 9.1 (1).
- Seite 57, Ende des Beweises von Lemma 10.1: Richtig ist

$$F' = f' \cup \{(\beta, *) \mid \alpha' \leq \beta\}.$$

- Seite 59. Im Beweis des Lemmas muß stehen:

$$g(z) = \begin{cases} f(n) & \text{wenn } z = x \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Seite 60, Aufgabe 45: Es muß heißen $\alpha \cdot 0 = 0$.
- Seite 65, Zeile 11: Es muß heißen: *Der folgende Satz wurde von Rosser. ...*
- Seite 65, Fußnote 19. Es muß heißen: *Eigentlich müßte man statt* $\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathcal{R}\urcorner, z)$ *die Formel* $\mathrm{Bew}(\mathrm{Neg}(\ulcorner\mathcal{R}\urcorner), z)$ *nehmen*
- Seite 66, Aufgabe 48. Ersetze die Aufgabe durch das folgende:

  Aufgabe 48. Angenommen ZFC ist konsistent, geben Sie eine konsistente Erweiterung von ZFC an, die die Inkonsistenz von ZFC, und damit auch ihre eigene Inkonsistenz, beweist. Es ist also denkbar, daß auch ZFC seine eigene Konsistenz beweist, ohne inkonsistent zu sein.

- S.72, oben. Richtig ist: $\mathcal{K}^{R+1,1}\mathcal{H}^*$ (berechnet $h(f_1(x), f_2(x))$.
- Seite 72, Aufgabe 51. Es muß $\mathcal{A} = \{0, 1, |\}$ heißen.
- Seite 72, Aufgabe 53. Die Behauptung c) war inkorrekt. Ersetze die Aufgabe durch das folgende:

  Aufgabe 53. Definiere die Funktionenfolge $A_0, \mathcal{A}_1, \ldots$ durch $A_0(x) = x + 1$ und $A_{a+1}(x) = A_a^{x+1}(1)$.

  a) Zeigen Sie, daß jedes A_n primitiv rekursiv ist.

  b) Begründen Sie, warum die (modifizierte) *Ackermannfunktion* $A(x, a) = A_a(x)$ in einem intuitiven Sinn berechenbar ist. (Wir werden in Aufgabe 56sehen, daß A rekursiv ist.)

  c) Für jede primitiv rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ gibt es ein a, sodaß für alle $x_1, \ldots, x_n$
  $$f(x_1, \ldots, x_n) \le A_a\big(\sum_i x_i\big).$$

  d) Die Ackermannfunktion ist nicht primitiv rekursiv.

  Hinweis zu c): Beweise zuerst, daß A in beiden Argumente streng monoton ist, und die Ungleichung $A_a(A_{a+1}(x)) \le A_{a+2}(x)$. Dann zeigt man die Behauptung induktiv über den Aufbau primitiv rekursiver Funktionen.
  Zu d): Man konstruiere aus A eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die c) nicht gilt.

- Seite 74, letzte Zeile vor Lemma 13.2: Verwende $\mathrm{K}_{\dot{=}0}$ statt K und $\mathrm{K}_{\dot{=}0}((x+1) \dot{-} y)$ statt $\mathrm{K}_{\dot{=}0}(x + 1 \dot{-} y)$.
- Seite 76, Zeile 3: Es muß heißen:
  $$\mathrm{p}(x) = (x + 1)\text{–te Primzahl}$$
- Seite 77: Es muß heißen: Schreibbefehl $b = \texttt{PUSH}(r, l)$
- Seite 79, Aufgabe 56. Eine *Berechung* a der Ackermannfunktion soll die folgenden Eigenschaften haben (siehe Korrektur der Aufgabe 53):
  - Wenn $(x, 0, z)$ in a vorkommt, ist $z = x + 1$.
  - Wenn $(0, y + 1, z)$ in a vorkommt, gehört $(1, y, z)$ zu a.
  - Wenn $(x + 1, y + 1, z)$ in a vorkommt, dann gibt es ein w, sodaß $(x, y + 1, w)$ und (w, y, z) zu a gehören.
- Seite 80, letzte Zeile im Beweis des Lemmas. Das soll sein:
  $$f(x) = \begin{cases} (x)_0 & \text{wenn } \overline{R}((x)_0, (x)_1) \\ r & \text{sonst} \end{cases}$$

- Seite 81, dritte und vierte Zeile im Beweis von Lemma 14.3. Das sollte sein:

$$g(\overline{x}) = \mu y\ \big(\overline{V}(\overline{x}, y) \vee \overline{W}(\overline{x}, y)\big)$$

für alle $\overline{x}$ definiert. . . .

- Seite 81, Aufgabe 57.

  Teil 1: Richtig ist: *Zeigen Sie, daß die partiell rekursiven Funktionen genau die berechenbaren partiellen Funktionen sind.*

  Teil 2: Es muß heißen: *Wie muß man die Regeln* **R0** *bis* **R3** *modifizieren,. . .*

- Seite 82, Aufgabe 61. Richtig ist:

$$\varphi_e^{m+n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \varphi^n_{s^m_n(e,x_1,\ldots,x_m)}(y_1, \ldots, y_n).$$

- Seite 87, Beweis von 16.2, erster Absatz. Richtig muß es heißen: *Würde p auch $bj + 1$ teilen, für ein $j \neq i$, wäre p ein Teiler von $b(j - i)$ und daher auch von $j - i$.*

- Seite 90, Zeile 8. Es muß heißen:

$$\exists y_1, y_2\ \big(\varphi_1(y_1, x_1) \wedge \varphi_2(y_2, x_1) \wedge \varphi_h(x_0, y_1, y_2)\big)$$

- Seite 93, Definition von Σ_1–Formel. Es muß dort heißen:

  dabei ist t ein Term, der x nicht enthält,. . .

- Seite 93, Beweis von 18.2. Der letzte Absatz sollte ersetzt werden durch:

  Wenn $\mathfrak{N} \models (\forall x_0 < x_1\psi)[a_1, \ldots, a_n]$, ist $\mathfrak{N} \models \psi[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, und daher nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{Q}^* \vdash \psi[\Delta_{a_0}, \Delta_{a_1}, \ldots, \Delta_{a_n}]$, für alle $a_0 < a_1$. Wegen $\mathbf{Q^*3}$ folgt daraus

$$\mathrm{Q}^* \vdash (\forall x_0 < x_1\psi)[\Delta_{a_1}, \ldots, \Delta_{a_n}].$$

- Seite 94, oben. Es muß heißen:

$$\begin{array}{rcccccc} R(a) & \Rightarrow & \mathfrak{N} \models \varphi(\Delta_a) & \Rightarrow & \mathrm{Q}^* \vdash \varphi(\Delta_a) & \Rightarrow & T \vdash \varphi(\Delta_a) \\ \neg\, R(a) & \Rightarrow & \mathfrak{N} \not\models \varphi(\Delta_a) & \Rightarrow & & & T \not\vdash \varphi(\Delta_a) \end{array}.$$

- Seite 94, Satz 18.4. Richtig ist

$$\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ allgemeingültige } L\text{–Formel}\}.$$

- Seite 94. In der Definition muß es heißen:

$$T \vdash \forall x_0\ \big(x_0 \doteq \Delta_{a_0} \longleftrightarrow \varphi(x_0, \Delta_{a_1}, \ldots, \Delta_{a_n})\big)$$

- Seite 97, Aufgabe 77. Ersetze *monadische Formel zweiter Stufe* durch *zweitstufige Formel*.
- Seite 99, Ungleichung (19.1). Richtig ist:

$$\underline{0} \leq x.$$

- Seite 102. In der Definition muß es heißen:

$$\mathrm{P} \vdash \varphi \longleftrightarrow \neg\,\psi$$

- Seite 103, Aufgabe 79, drittletzte Zeile. Es muß heißen: … *die gleichen erststufigen Aussagen folgen wie aus.* …
- Seite 104, oben. Es muß heißen:

$$B'(s,n) = \forall i < n\big(Ax(\beta'(s,i)) \vee \exists j,k < i\ Reg(\beta'(s,i),\beta'(s,j),\beta'(s,k))\big),$$

  und weiter unten: *Aus dem Deduktionslemma folgt, daß* Bew' *in* $\mathfrak{N}$ *die Menge der Gödelnummern der in* P *beweisbaren Aussagen definiert.*
- Seite 105, Lemma 20.2. Im Beweis von L1 muß es heißen: *Die Umkehrung gilt natürlich auch, weil* P *wahr ist.*
- Seite 106, Folgerung aus dem Satz von Loeb. Es muß heißen:

$$\mathrm{P}\ \vdash\ \mathrm{Bew}(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \psi\ \Rightarrow\ \mathrm{P}\ \vdash\ \psi$$