Spezialdruckerei für Dissertationen. F. Hansen, 5 Köln 1, Otto-Fischer-Str. 31, Tel. 41 96 93

61

Die elementare Theorie der henselschen Körper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Martin Ziegler
aus Kassel

Köln 1972

Die elementare Theorie der henselschen Körper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

vorgelegt von
Martin Ziegler
aus Kassel

Köln 1972

Berichterstatter:

Prof.Dr.W.Jehne

Prof.Dr.E.Burger

Tag der mündlichen Prüfung 4.11.1972

Inhaltsübersicht

	Einleitung	S. i
I	Algebraische Hilfsmittel	1
II	Modelltheoretische Hilfsmittel	56
III	Die Theorie der S-henselschen Körper mit Schnitt	74
IV	Henselsche Körper mit beliebigen Restklassenkörpern	98
V	Die Elimination des Schnittes	143
	Literaturverzeichnis	159

Einleitung

Seien T und T^* zwei Theorien einer dreisortigen Sprache mit den Sorten K, Γ und k. Wir nennen T^* K^*- Modellvervollständigung von T, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind :

i) $T \subset T^*$

ii) Zu jedem Modell (K_1, Γ_1, k_1) von T gibt es ein Modell (K_2, Γ_2, k_2) von T^* mit $(K_1, \Gamma_1, k_1) \subset (K_2, \Gamma_2, k_2)$ und $(\Gamma_1, k_1) \prec (\Gamma_2, k_2)$ (elementare Erweiterung) .

iii) T^* ist K^*-modellvollständig , d.h.:

Für je zwei ineinander enthaltene Modelle $(K_1, \Gamma_1, k_1) \subset (K_2, \Gamma_2, k_2)$ von T^* mit $(\Gamma_1, k_1) \prec (\Gamma_2, k_2)$ gilt $(K_1, \Gamma_1, k_1) \prec (K_2, \Gamma_2, k_2)$.

In Satz II 7 wird gezeigt , daß es zu einer Theorie - bis auf Äquivalenz - höchstens eine K^*- Modellvervollständigung gibt.

Wir beschreiben bewertete Körper mit einer dreisortigen Sprache , der Sorte K für den Körper selbst , der Sorte Γ für die Wertgruppe und der Sorte k für den Restklassenkörper. In der vorliegenden Arbeit sollen die K^*-Modellvervollständigungen verschiedener Theorien bewerteter Körper untersucht werden.

Folgende Sätze geben K^*- Modellvervollständigungen an:

Satz V 5 I iii :

Sei T_m die Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik o , deren Wertgruppe - wenn der Restklassenkörper die Charakteristik p hat - ein kleinstes positives Element α mit $v(p) = m \cdot \alpha$ besitzt.

(v bezeichnet die Bewertungsabbildung.)

Dann ist die Theorie T_m^H der henselschen Modelle von T_m die K^* - Modellvervollständigung von T_m .

Satz V 5 I iii :

Sei T_A die Theorie der bewerteten Körper , die die Bedingung A aus [6] (S. 312) erfüllen.

Die K^* - Modellvervollständigung von T_A ist die Theorie T^M aller Modelle von T_A , die keine echten algebraischen unmittelbaren Erweiterungen besitzen.

(Eine homomorphe Abbildung π der Wertgruppe in die multiplikative Gruppe des Körpers heißt Schnitt,wenn $v \circ \pi$ = id .)

Satz IV 7 iii :

Sei $T_m(\pi)$ die Theorie der bewerteten Körper mit Schnitt, die Modelle von T_m sind .

Dann ist $T^H_m(\pi)$, die Theorie der henselschen Modelle von $T_m(\pi)$, die K^* - Modellvervollständigung von $T_m(\pi)$.

Satz IV 3 iii :

Sei $T_A(\pi)$ die Theorie der bewerteten Körper mit Schnitt, die Modelle von T_A sind.

Dann ist $T^M(\pi)$, die Theorie der bewerteten Körper mit Schnitt,die Modelle von T^M sind, die K^* - Modellvervollständigung von $T_A(\pi)$.

Die elementaren Eigenschaften henselscher Körper sind also wesentlich durch die elementaren Eigenschaften von Wertgruppe und Restklassenkörper bestimmt.Dieser Sachverhalt wird durch den folgenden Satz präzisiert:
(Satz V 5 II i , V 5 III i , IV 7 vi , IV 3 I vi , IV 3 II iii)

Sei T eine der Theorien T^H_m , T^M , $T^H_m(\pi)$, $T^M(\pi)$.
Dann ist jede Aussage bzgl. T zu einer Aussage vom gleichen Präfixtyp , in der die Sorte K nicht mehr vorkommt , äquivalent .

Für Formeln gelten diese Sätze in schwächerer Form:(Satz V 5 I v , IV 7 v , IV 3 I v)

Jede Formel ist bzgl. T zu einer Formel äquivalent , in der die Sorte K auf einfache , normierte Weise vorkommt.

Eine Elimination der K-Quantoren läßt sich nur in Spezialfällen erreichen:(Satz III 5 v , III 1o v)

Sei T eine der beiden Theorien , $T^H_{q,m}(\pi)$ - der Theorie der Modelle von $T^H_m(\pi)$,deren Restklassenkörper q Elemente haben - oder $T^H_o(\pi)$ - der Theorie der Modelle von $T^H_1(\pi)$,deren Restklassenkörper die Charakteristik o haben .Dann ist jede Formel bzgl. T zu einer Formel vom gleichen Präfixtyp äquivalent , in der keine K-Quantoren vorkommen.

Im allgemeinen Fall ist in der Theorie der henselschen Körper jede Formel zu einer Formel äquivalent, deren Quantoren nur über die Wertgruppe und die Restklassenringe

$$R_i := \{x \mid v(x) \geq o\} / \{x \mid v(x) > v(i)\}$$

laufen.(Satz III 3) .Hier genügt eine Abschwächung der Henseleigenschaft , die " S - Henselität " .(s.S. 3).

Elementare Theorien henselscher Körper wurden zuerst von J.Ax und S.Kochen in [1 , 2] und Ju.L.Eršov in [5] untersucht.In diesen Arbeiten sind für den Spezialfall $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ und Char.(k)=o oder card(k)=p die Sätze III 5 vii-x , III 1o vi-x, V 3 iv,vii-ix .enthalten.

Auf die weiteren Arbeiten von Eršov [6] , von denen mir keine vollständige Übersetzung vorliegt,wurde ich erst aufmerksam,nachdem ich einen großen Teil dieser Arbeit geschrieben hatte.Die folgenden Sätze sind - mit anderen Methoden - zuerst von Ju.L.Eršov bewiesen worden: V 5 I iv , V 5 II , V 5 III (für L = $\hat{L}$ und ohne Aussagen über den Präfixtyp) .

Die Beweisführung war in der bis jetzt genannten Literatur wie in der vorliegenden Arbeit modelltheoretischer Natur . In [3] wurde von P.Cohen ein primitivrekursives Quantoreliminationsverfahren für die von Ax und Kochen betrachteten Theorien henselscher Körper explizit angegeben . V.Weißpfenning hat in [15] Cohens Methode weiterentwickelt und - syntaktisch - Satz III 5 iv-x (ohne Aussage über den Präfixtyp) und Satz III lo iv-x (ohne Präfixtyp) bewiesen.

Weißpfennings Verfahren läßt sich so modifizieren, daß mit seiner Hilfe die in Satz III 3 versprochene Formel explizit angegeben werden kann. Ich habe hierauf aufbauend primitiv-rekursive Verfahren für die Sätze III 4 i, IV 7 v,vi und V 3 v,vi (für $T^h = T^H_m$) gefunden. Für die Sätze IV 3 I v,vi und IV 3 II iii ist mir kein primitiv rekursives Verfahren bekannt.

An dieser Stelle möchte ich den Professoren W.Jehne und E.Burger für ihre Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit danken.

I Algebraische Hilfsmittel

Ein bewerteter Körper ist ein Körper K mit einer Abbildung $v: K \to \Gamma$ auf eine totalgeordnete abelsche Gruppe Γ mit zusätzlichem Element ∞ ,sodaß gilt:

$$v: K \to \Gamma \cup \{\infty\}$$

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \alpha < \infty, \alpha + \infty = \infty$$

$$\bigwedge_{y,x\in K} v(x\cdot y) = v(x) + v(y)$$

$$\bigwedge_{y,x\in K} v(x+y) \geq \min\{v(x),v(y)\}$$

$A_v = \{ x\in K \mid v(x) \geq 0\}$ bezeichne den Bewertungsring von K,v .

Wenn die Charakteristik von K null ist,definieren wir für jede natürliche Zahl r das Ideal in A_v $(r \geq 1)$

$$P_r := \{ x\in K \mid v(x) > v(r)\}$$

und den Restklassenring

$$R_r := A_v/P_r$$

Für natürliche Zahlen $n,m \geq 1$ mit $n \mid m$ seien

$res_n : A_v \to R_n$ und

$res^m_n : R_m \to R_n$

die natürlichen Homomorphismen.

Wir setzen res_n auf K fort,indem wir für $x \in K \setminus A_v$

$res_n(x) = 0$

setzen.

R_1 ist der Restklassenkörper von K,v .

$v_n : R_n \to \Gamma\cup\{\infty\}$ ist durch

$$v_n(res_n x) = \begin{cases} v(x) & \text{falls } 0 \leq v(x) \leq v(n) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

wohldefiniert.

Definition:

Ein bewerteter Körper heißt henselsch, wenn sich die Bewertung v auf alle algebraischen Oberkörper eindeutig fortsetzt.

Satz 1

Für einen bewerteten Körper K,v sind äquivalent

i) K,v ist henselsch

ii) Alle Polynome f aus $A_v[X]$ der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad , n \geq 1, \text{ mit}$$

$$v(a_0) > v(a_1) = 0$$

besitzen eine Nullstelle in K.

iii) Für jedes Polynom f aus $A_v[X]$ und jedes a aus A_v mit

$$v(f(a)) > 2v(f'(a))$$

gibt es genau eine Nullstelle $b \in K$ mit

$$v(b-a) > v(f'(a)) .$$

Für b gilt dann darüberhinaus

$$v(b-a) = v(f(a)) - v(f'(a)) .$$

Beweis: Siehe [11].

Definition:

Sei K,v ein bewerteter Körper der Charakteristik null mit Wertgruppe Γ. Definiere

$$\hat{\Gamma} = \{\alpha \in \Gamma \mid \bigvee_{n \in N} \bigwedge_{m \in Z} m\alpha \leq v(n) \neq \infty\} .$$

$\hat{\Gamma}$ ist dann isolierte Untergruppe von Γ, d.h.

$$\bigwedge_{\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma} \alpha \in \hat{\Gamma} \wedge \beta \in \hat{\Gamma} \wedge \alpha \leq \gamma \leq \beta \rightarrow \gamma \in \hat{\Gamma}$$

Sei $\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma/\hat{\Gamma}$

der kanonische Homomorphismus. Mit

$$\bar{v} : K \rightarrow \Gamma/\hat{\Gamma}$$

bezeichnen wir dann die Bewertung

$$\bar{v} = \mu \circ v .$$

Definition:

i) Ein bewerteter Körper K,v heißt S-henselsch, wenn $\chi(K)=0$ und $K,\bar{v}$ henselsch ist.

ii) Eine Pseudocauchyfolge (PCF) $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ heißt S-Pseudocauchyfolge (S-PCF), wenn

$$\bigvee_{\delta<\alpha} \bigwedge_{\tau>\delta} \bigwedge_{\substack{n \in N \\ n \neq 0}} \bigvee_{\rho>\tau} v(a_{\rho+1} - a_\rho) > v(n) + v(a_{\tau+1} - a_\tau)$$

(PCF ist in [11] definiert)

iii) $K_1,v_1 \subset K_2,v_2$ heißt S-unmittelbare Erweiterung, wenn

$$\bigwedge_{\substack{n \in N \\ n \neq 0}} \bigwedge_{y \in K_2} \bigvee_{x \in K_1} v_2(y-x) > v_1(n) \vee v_2(y) < 0 \quad , \chi(K)=0$$

und K_1 und K_2 dieselbe Wertgruppe haben.

Bemerkung: Seien R_n^1 bzw. R_n^2 die Restklassenringe von K_1 bzw. K_2 für $n \in N$. Dann ist $K_1 \subset K_2$ S-unmittelbar genau dann, wenn die Wertgruppen übereinstimmen und $R_n^1 = R_n^2$ für alle $n \in N \setminus \{0\}$.

iv) K,v heißt S-maximal, wenn $\chi(K)=0$ und K keine echten S-unmittelbaren Oberkörper besitzt.

Satz 2

i) Seien $K_1 \subset K_2$ bewertete Körper der Charakteristik null. Γ_1 sei die Wertgruppe von K_1, $\alpha \in \Gamma_1$, $n,m \in N$ mit

$$m \cdot (\alpha) \geq v(n) \geq 0 .$$

Gilt dann

$$\bigwedge_{x \in K_2} \bigvee_{y \in K_1} v_2(x-y) \geq \alpha \quad \vee \quad v_2(x) < 0 \quad , \qquad (*)$$

so ist für alle $n \in N \setminus \{0\}$

$$R_n^1 = R_n^2 .$$

ii) Seien $K_1 \subset K_2$ bewertete Körper der Charakteristik null. Es existiere eine natürliche Zahl n, mit

$\{\alpha \in \Gamma_2 \mid 0 < \alpha < v_1(n)\}$ endlich oder es sei $\chi(R_1^1) = 0$.

Dann sind jeweils äquivalent

K_1 S-henselsch und K_1 henselsch ,

$(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ PCF und $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ S - PCF , für $a_\gamma \in K_1$,

$K_1 \subseteq K_2$ unmittelbar und $K_1 \subseteq K_2$ S-unmittelbar,

K_1 maximal und K_1 S-maximal.

Beweis:

i) Zunächst ist klar, daß, wenn $v_1(l) = v_1(k)$ und $R_l^1 = R_l^2$, auch $R_k^1 = R_k^2$ ist.

Da alle nichtrivialen Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Wertgruppe haben, folgt aus $v_1(n) > o$, daß

$$\bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq 0}} \bigvee_{l\in\mathbb{N}} l v_1(n) \geq v(k) \quad .$$

Wir zeigen, daß aus der Gültigkeit von (*) für α die Gültigkeit von (*) für 2α folgt.

Sei nämlich $x \in K_2$ und $v_2(x) \geq o$. Dann gibt es also nach (*) ein $z \in K_1$ mit

$$v_2(x - z) \geq \alpha \quad .$$

Sei $w \in K_1$ mit $v_1(w) = \alpha$. Dann ist $v_2(\frac{x-z}{w}) \geq 0$.
Wegen (*) gibt es also ein $u \in K_1$ mit

$v_2(\frac{x-z}{w} - u) \geq \alpha$. Also ist

$v_2(x - (z + wu)) \geq v_1(w) + \alpha = 2\alpha$. Wegen $z + wu \in K_1$ gilt (*) also auch für 2α .

Sei also $k \in \mathbb{N}$. und $l v_1(n) \geq v_1(k)$. Es gibt also $i \in \mathbb{N}$ sodaß

$$2^i\alpha \geq v(k) \quad .$$

Da die Aussage (*) nach dem obigen auch für $2^i\alpha$ gilt, gilt (*) also auch für $v(k)$ statt α . Das bedeutet aber gerade $R_k^1 = R_k^2$.

ii) Sei K_1 henselsch mit Wertgruppe Γ_1, und sei $p: \Gamma_1 \to G$ ein surjektiver anordnungstreuer Homomorphismus. Dann ist $K, p \circ v_1$ henselsch.

Denn sei $f \in K_1[X]$ ein Polynom der Form

$$f = \sum_{i=o}^{n} a_i X^i$$

mit

$p \circ v_1(a_i) \geq o$ für alle i und $p \circ v_1(a_o) > p \circ v_1(a_1) = o$.

Sei $b \in K_1$ mit $v_1(b) = \min\{v_1(a_i) \mid i \leq n\}$. Dann ist

$v_1(\frac{a_i}{b}) \geq o$ für alle i und $p \circ v_1(\frac{a_o}{b}) > 2p \circ v_1(\frac{a_1}{b}) = o$.

Also ist auch

$v_1(\frac{a_o}{b}) > 2v_1(\frac{a_1}{b})$ .d.h.

$\frac{1}{b}f \in A^1_{v_1}[X]$ und $v_1(\frac{1}{b}f(o)) > 2v_1(\frac{1}{b}f'(o))$.

Aus Satz 1 iii) folgt also, daß $\frac{f}{b}$ und damit f eine Nullstelle besitzt. Wegen Satz 1 ii) ist $K_1, p \circ v_1$ also henselsch.
Speziell ist K_1 also S-henselsch.

Sei andererseits K_1 S-henselsch.

Aus der Voraussetzung von ii) folgt

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigvee_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq 0}} k\alpha \geq v_1(n) \quad \forall\ \alpha < o \quad .$$

Es ist also $\{o\} = \hat{\Gamma}_1$ und damit $v_1 = \overline{v}_1$.

Da $K_1, \overline{v}_1$ henselsch ist, ist also auch K_1, v_1 henselsch.

Sei $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ eine PCF .

Wenn k Elemente zwischen o und $v_1(n)$ liegen , folgt aus

$$v_1(a_{\gamma_k+1} - a_{\gamma_k}) > \dots > v_1(a_{\gamma_1+1} - a_{\gamma_1}) > v_1(a_{\gamma_o+1} - a_{\gamma_o}) \quad ,$$

daß

$$v_1(a_{\gamma_k+1} - a_{\gamma_k}) > v_1(a_{\gamma_o+1} - a_{\gamma_o}) + v_1(n) \quad .$$

Da

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \bigvee_{l\in\mathbb{N}} l v_1(n) \geq v_1(k) \quad ,$$

ist $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ also auch S-PCF . .

Sei $K_1 \subset K_2$ S-unmittelbar.

Da $R_1^1 = R_1^2$ ist, stimmen die Restklassenkörper von K_1 und K_2 überein, $K_1 \subset K_2$ ist also unmittelbar.

Sei $K_1 \subset K_2$ unmittelbar.

Aus der Voraussetzung von ii) folgt, daß in Γ_1 ein kleinstes positives Element α existiert und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$m\alpha \geq v_1(n)$. Die Unmittelbarkeit besagt gerade, daß (*) gilt. Aus i) folgt dann, daß $K_1 \subset K_2$ S-unmittelbar ist.

Da aus der Voraussetzung von ii) die Äquivalenz von unmittelbar und S-unmittelbar folgt, stimmen hier also auch die maximalen Körper mit den S-maximalen überein.

Satz 3

i) Sei $K_1 \overset{c}{\neq} K_2$ eine S-unmittelbare Erweiterung von bewerteten Körpern der Charakteristik o. Dann gibt es eine S-PCF , die in K_1 liegt und in K_2 aber nicht in K_1 konvergiert.

ii) Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF vom algebraischen Typ aus K_1 ,($\chi(K_1)$=o), die in K_1 nicht konvergiert. Dann gibt es zu jedem Minimalpolynom von $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-unmittelbare Erweiterung K_2 von K_1 , in der $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ gegen eine Nullstelle des Minimalpolynoms konvergiert.

iii) Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF aus K_1 ($\chi(K_1)$=o), vom transzendenten Typ. Dann gibt es einen S-unmittelbaren Oberkörper K_2 von K_1 ,in dem $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ konvergiert.

iv) Ein bewerteter Körper der Charakteristik o ist S-maximal genau dann, wenn jede S-PCF konvergiert.

(Es wird die Terminologie aus [6] benutzt)

Beweis :

Der Beweis ist eine Übertragung der Sätze aus [6] .

i) Sei $a \in K_2 \setminus K_1$. Weil $K_1 \subset K_2$ speziell unmittelbar ist- R_1 ist der Restklassenkörper ! - folgt wie beim entsprechenden Beweis in [6] die Existenz einer PCF $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ aus K_1 , die in K_1 nicht konvergiert, gegen a konvergiert und für die

$$\{v_2(a - a_\delta) \mid \delta<\alpha\} \quad \text{in}$$

$$\{v_2(a - b) \mid b \in K_1\} \quad \text{konfinal ist.}$$

Wir zeigen, daß $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ S-PCF ist.

Sei also $\delta<\alpha$ derart, daß

$$\bigwedge_{\tau>\delta} v_2(a - a_\tau) = v_2(a_{\tau+1} - a_\tau) \quad \text{ist,}$$

und sei $\tau>\delta$, $n \in \mathbb{N}$.

Da die Wertgruppen übereinstimmen, gibt es ein $d \in K_1$ mit

$$v_1(d) = v_2(a - a_\tau) .$$

Wegen $R^1_n = R^2_n$ existiert ein $c \in K_1$, sodaß

$$v_2\left(\frac{a-a_\tau}{d} - c\right) > v_1(n) . \quad \text{Also}$$

$$v_2(a - (a_\tau + cd)) > v_1(n) + v_2(a - a_\tau) .$$

Wegen der Konfinalität gibt es ein $\rho<\alpha$ mit $\rho>\tau$ und

$$v_2(a - (a_\tau + cd)) \leq v_2(a - a_\rho) \quad \text{.Also}$$

$$v_2(a_{\rho+1} - a_\rho) > v_2(a_{\tau+1} - a_\tau) + v_1(n). \text{ qed.}$$

ii) Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz.

Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF, und sei $f \in K_1[X]$ .Dann ist entweder $v_1(f(a_\delta))$, $\delta<\alpha$, schließlich konstant, oder $(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ ist eine S-PCF ,die gegen o konvergiert.

Beweis: Sei zunächst f = X -a .

Dann ist offenbar $(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ wieder S-PCF. Wenn $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ gegen a konvergiert, so konvergiert $(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ gegen o. Wenn $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ nicht gegen a konvergiert, gibt es ein ein $\tau<\alpha$,sodaß

$$v_1(a - a_\tau) \neq v_1(a_{\tau+1} - a_\tau) \quad \text{und}$$

$$\bigwedge_{\rho>\tau} v_1(a_\rho - a_{\tau+1}) > v_1(a_{\tau+1} - a_\tau) .$$

Für alle $\rho>\tau$ ist

$$(a - a_\rho) = (a - a_\tau) + (a_\rho - a_{\tau+1}) + (a_{\tau+1} - a_\tau) .$$

Wenn $v_1(a - a_\tau) > v_1(a_{\tau+1} - a_\tau)$,so ist

$$v_1(a - a_\rho) = v_1(a_{\tau+1} - a_\tau) \quad \text{für alle } \rho>\tau .$$

Wenn $v_1(a - a_\tau) < v_1(a_{\tau+1} - a_\tau)$,so ist

$$v_1(a - a_\rho) = v_1(a - a_\tau) \quad \text{für alle } \rho>\tau .$$

$v_1(f(a_\rho))$ ist also für alle $\rho>\tau$ konstant.

Sei nun f nicht linear, und sei im algebraischen Abschluß K_2 von K_1

$$f = b(X - b_1)\dots(X - b_n) .$$

1.Fall: $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ konvergiert gegen keines der b_i.

Dann ist $v_2(a_\delta - b_i)$ schließlich konstant für alle i. Also ist auch

$$v_1(f(a_\delta))=(v_2(b))+v_2(a_\delta - b_1)+\dots+v_2(a_\delta - b_n)$$

schließlich konstant.

2.Fall: $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ konvergiert genau gegen $b_1,\dots,b_l$.

Wie oben ist dann

$v_2(b(a_\delta - b_{l+1})\dots(a_\delta - b_n))$

schließlich konstant.Es gibt also ein $\tau<\alpha$ und ein $\beta\in\Gamma_2$,

sodaß für alle $\delta>\tau$

$v_2(b(a_\delta - b_{l+1})\dots(a_\delta - b_n)) = \beta$ und

$v_2(a_\delta - b_i) = v_1(a_{\delta+1} - a_\delta)$ $i=1,\dots,l$.

Also ist für alle $\delta>\tau$

$v_1(f(a_\delta)) = \beta + l\cdot v_1(a_{\delta+1} - a_\delta)$.

$v_1(o - f(a_\delta))$ wächst also monoton,$(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$

ist also eine PCF,die gegen o konvergiert,und

es gilt $(\delta>\tau)$

$v_1(f(a_{\delta+1}) - f(a_\delta)) = l\cdot v_1(a_{\delta+1} - a_\delta) + \beta$.

Sei nun $\delta>\tau$ und $n\in\mathbb{N}\setminus\{o\}$.

$(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ ist S-PCF.Also gibt es ein $\varrho>\delta$ mit

$v_1(a_{\varrho+1} - a_\varrho) > v_1(n) + v_1(a_{\delta+1} - a_\delta)$.

Damit ist

$v_1(f(a_{\varrho+1}) - f(a_\varrho)) = l\cdot v_1(a_{\varrho+1} - a_\varrho) + \beta >$

$> l\cdot v_1(a_{\delta+1} - a_\delta) + \beta + v_1(n) = v_1(f(a_{\varrho+1}) - f(a_\varrho)) + v_1(n)$.

$(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ ist also S-PCF und konvergiert gegen o .

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Sei nun $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ wie in ii) und sei f ein Minimalpolynom von $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$,d.h. von minimalem Grad mit der Eigenschaft,daß f normiert ist und die S-PCF $(f(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ gegen o konvergiert.Wie in [6] erhält man,daß f ein irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 2 ist.

Wir konstruieren K_2 als Stammkörper von f über K_1

$K_2 = K_1(z)$, $f(z) = o$

und definieren die Bewertung v_2 durch (siehe [6])

$v_2(g(z)) = \beta$,falls

$g\in K_1[X]$,grad f > grad g und $v_1(g(a_\delta))$

nach dem Hilfssatz schließlich konstant gleich β ist.

Nach [6] ist K_2,v_2 unmittelbare Erweiterung von K_1,v_1 ,und $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ konvergiert in K_2 gegen z.Wir müssen zeigen,daß sich die Restklassenringe nicht vergrößern.

Sei also $v_2(g(z)) \geq o$,$g\in K_1[X]$,grad g < grad f und $n\in\mathbb{N}\setminus\{o\}$.

Wir müssen zeigen,daß ein $y\in K_1$ existiert ,sodaß

$v_2(g(z) - y) > v_1(n)$.

Dazu betrachten wir das Polynom

$g(z) - g(X)$ aus $K_2[X]$.

Da $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ gegen die Nullstelle z von $g(z)-g(X)$ konvergiert,ergibt der Beweis der Hilfssatzes,daß

$(g(z) - g(a_\delta))_\delta$ eine S-PCF ist,die

gegen o konvergiert.Nach Definition von v_2 gibt es ein τ ,

sodaß für alle $\delta\geq\tau$

$v_2(g(z)) = v_1(g(a_\delta)) \geq o$

Andererseits gibt es O.B.d.A. ein $\varrho>\tau$,sodaß

$v_2(o - (g(z)-g(a_\varrho))) > v_2(o - (g(z)-g(a_\tau))) + v_1(n)$.

Also ist

$v_2(g(z) - g(a_\varrho)) > v_1(n)$. Wähle $y=g(a_\varrho)$.

iii) Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF vom transzendenten Typ.

Als K_2 setzen wir den rationalen Funktionenkörper

$K_2 = K_1(X)$ .Eine geeignete Bewertung v_2 auf K_2 erhält man nach [6] ,indem man für $f,g\in K_1[X]$,die schließlich konstant gleich α,β sind, setzt:

$v_2(\frac{f}{g}) := \alpha - \beta$.

K_2,v_2 ist nach [6] eine unmittelbare Erweiterung von K_1,v_1 ,in der $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ gegen X konvergiert.

Sei $n\in\mathbb{N}$,wir wollen $R_n^1 = R_n^2$ zeigen.Sei dazu

$\frac{f}{g}\in K_2$ mit $f,g\in K_1[X]$ und $v_2(\frac{f}{g}) \geq o$.

Betrachte das Polynom in Z

$g(Z)f(X) - f(Z)g(X) \in K_2[Z]$.

Da $(a_\sigma)_{\sigma<\alpha}$ gegen die Nullstelle X von

$g(Z)f(X) - f(Z)g(X)$ konvergiert, folgt aus

dem Beweis des Hilfssatzes in ii), daß

$(g(a_\sigma)f(X) - f(a_\sigma)g(X))_{\sigma<\alpha}$

eine S-PCF ist, die gegen o konvergiert. Da andererseits

$v_2(g(a_\sigma)f(X)), v_2(f(a_\sigma)g(X))$ und $v_1(g(a_\sigma))$

schließlich konstant bleiben, gibt es ein τ, daß für

alle $\sigma \geq \tau$

$$v_1(g(a_\sigma)) = v_1(g(a_\tau)) \quad \text{und}$$

$$v_2(g(a_\sigma)f(X)) = v_2(f(a_\sigma)g(X)) \quad .$$

O.B.d.A. gibt es nun ein $\rho > \tau$ derart, daß

$$v_2(g(a_\rho)f(X)-f(a_\rho)g(X)) > v_1(n)+v_2(g(a_\tau)f(X)-f(a_\tau)g(X)).$$

Es folgt also zunächst

$$v_2(g(a_\tau)f(X) - f(a_\tau)g(X)) \geq v_2(f(X)g(a_\tau)) \geq$$

$$\text{(wegen } v_2(\tfrac{f}{g}) \geq o)$$

$$\geq v_2(g(X)g(a_\tau)) = v_2(g(X)g(a_\rho)) \quad .$$

Und daraus

$$v_2(g(a_\rho)f(X)-f(a_\rho)g(X)) > v_2(g(X)g(a_\rho)) + v_1(n), \text{d.h.}$$

$$v_2\left(\frac{f(X)}{g(X)} - \frac{f(a_\rho)}{g(a_\rho)}\right) > v_1(n)$$

qed.

iv) Das folgt sofort aus i) - iii)

Definition:

Eine Pseudocauchyfolge $(a_\sigma)_{\sigma<\alpha}$ heißt distinguiert, wenn

$$\bigwedge_{\tau}\bigwedge_{\sigma}\bigvee_{\rho>\tau,\sigma} v(a_{\rho+1}-a_\rho) > v(a_{\tau+1}-a_\tau)+v(a_{\sigma+1}-a_\sigma) \geq o \ .$$

Satz 4

K,v sei ein bewerteter Körper der Charakteristik o.

n sei eine natürliche Zahl. Wenn die Charakteristik des Restklassenkörpers R_1 endlich ist, sei $v(n) > o$, $n \neq o$.

Dann sind äquivalent

i) K,v ist S-henselsch

ii) (Falls $\chi(R_1) \neq o$)

Für jedes Polynom $f \in A_v[X]$ mit

$v(f(o)) \geq v(n) > v(f'(o)) = o$

existiert eine Nullstelle in K.

iii) Jedes $f \in A_v[X]$ mit

$v(f(o)) \notin \hat{\Gamma}$ und $v(f'(o)) \in \hat{\Gamma}$

besitzt in K eine Nullstelle.

iv) Jede S-Pseudocauchyfolge aus K vom algebraischen Typ konvergiert in K.

v) K besitzt keine echten S-unmittelbaren algebraischen Oberkörper.

vi) Alle distinguierten S-Pseudocauchyfolgen vom algebraischen Typ konvergieren in K.

Beweis:

i) → iv):

Sei $(a_\sigma)_{\sigma<\alpha}$ eine S-PCF vom algebraischen Typ aus K, die nicht konvergiert, und K sei S-henselsch.

Nach Satz 3 ii) läßt sich v auf den algebraischen Abschluß K_2 so fortsetzen, daß $(a_\sigma)_{\sigma<\alpha}$ gegen eine Nullstelle b eines Minimalpolynoms $f \in K[X]$ konvergiert.

Seien $b=b_1,..,b_m$ die Konjugierten von b in K_2 über K. Da K, $\bar{v}$ henselsch ist, setzt sich $\bar{v}$ eindeutig auf K_2 fort. Je zwei Konjugierte aus K_2 haben also denselben $\bar{v}_2$-Wert. Also ist für alle $c \in K, i=1,..,m; j=1,..,m$

$$\bar{v}_2(b_i - c) = \bar{v}_2(b_j - c) \quad \text{d.h.}$$

$$v_2(b_i - c) - v_2(b_j - c) \in \hat{\Gamma}_2 \ .$$

Wenn der Restklassenkörper von K die Charakteristik o hat, ist $\hat{\Gamma}_2 = \{o\}$. Wegen der Wahl von n ist also für alle $c \in K$; $i,j=1,...,m$ erst recht

$$v_2(b_i - c) \geq v_2(b_j - c) - v(n) \ .$$

Also ist für alle $\sigma < \alpha$

$$v_2\left(b_1 - \frac{\sum b_i}{m}\right) = v_2\left(b_1 - a_\sigma + \frac{\sum(a_\sigma - b_i)}{m}\right) \geq$$

$$v_2(b_1 - a_\sigma) - v(n)-v(m) = v_2(b_1 - a_\sigma) - v(nm) \ .$$

Da $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ S-PCF ist , gibt es für alle $\tau<\alpha$ ein $\delta>\tau$ mit

$$v_2(b_1 - a_\tau) + v(nm) < v_2(b_1 - a_\delta).$$

Also ist für alle $\tau<\alpha$

$$v_2\left(b_1 - \frac{\sum b_i}{m}\right) \geq v_2(b_1 - a_\tau) \quad ,$$

d.h. $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ konvergiert auch gegen $\frac{\sum b_i}{m} \in K$ .Wid.

iv)→v):

Sei $K \subset K_2$ eine echte S-unmittelbare algebraische Erweiterung von K.Nach Satz 3 i) existiert eine S-PCF aus K,die in K_2 konvergiert, in K aber nicht.Da nach [6] eine PCF vom transzendenten Typ nur transzendente Limites besitzt,ist diese S-PCF also vom algebraischen Typ. Das widerspricht aber iv)

v)→iv):

Gäbe es in K eine S-PCF ohne Limes,so würde nach Satz 3 ii) eine echte S-unmittelbare algebraische Erweiterung von K existieren.

iv)→vi): ist klar.

vi)→ii):

Sei vi) erfüllt,und sei $f \in A_v[X]$ mit

$$v(f(o)) \geq v(n) > v(f'(o)) = o$$

ohne Nullstelle in K .

Sei α eine Limeszahl mit größerer Mächtigkeit als die Wertgruppe von K.Dann gibt es keine PCF in K,die α als Indexmenge besitzt.Im Widerspruch dazu konstruieren wir eine PCF mit dieser Indexmenge.

Beh.:

Es existiert eine Abbildung

$a : \alpha \to A_v \quad ; \quad a : \beta \mapsto a_\beta$ mit

$a_o = o$ und für alle $\delta < \tau < \alpha$

a) $v(f(a_\delta)) = v(a_\tau - a_\delta)$

b) $v(f(a_\tau)) \geq 2v(f(a_\delta))$.

Bemerkung:Daraus folgt

$v(a_\tau - a_\delta) = v(f(a_\delta)) > v(f(o)) > o$. Und daraus

$v(f'(a_\delta)) = o$.

Beweis.:

Seien die a_β für $\beta<\gamma$ mit den Eigenschaften a),b) bereits konstruiert.

1.Fall: $\gamma = \beta+1$

Setze

$$a_\gamma := a_\beta - \frac{f(a_\beta)}{f'(a_\beta)} .$$

Dann sind erfüllt:

a):

Sei $\tau = \gamma$ und i) $\delta = \beta$ .Damit ist

$$v(a_\gamma - a_\delta) = v(a_\gamma - a_\beta) = v\left(\frac{f(a_\beta)}{f'(a_\beta)}\right) = v(f(a_\beta)) \quad ;$$

oder

ii) $\delta < \beta$ .Dann folgt

$$v(a_\beta - a_\delta) = v(f(a_\delta)) < v(f(a_\beta)) = v(a_\gamma - a_\beta);$$

und daraus

$$v(a_\tau - a_\delta) = v(a_\gamma - a_\delta) = v(a_\beta - a_\delta) = v(f(a_\delta)).$$

b):

Sei $\tau = \gamma$ und $\delta \leq \beta$. Dann ist

$$v(f(a_\tau)) = v\left(f\left(a_\beta - \frac{f(\alpha_\beta)}{f'(a_\beta)}\right)\right) =$$

$$v\left(f(a_\beta) - \frac{f(a_\beta)}{f'(a_\beta)} f'(a_\beta) + \left(\frac{f(a_\beta)}{f'(a_\beta)}\right)^2 g(a_\beta) - \dots + \dots\right) \geq$$

$$2v(f(a_\beta)) \geq 2v(f(a_\delta)) .$$

2.Fall: γ ist Limeszahl

Dann ist $(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ eine distinguierte S-PCF vom algebraischen Typ!Denn aus $\delta<\tau<\rho<\gamma$ folgt

$$v(a_\rho - a_\tau) = v(f(a_\tau)) > v(f(a_\delta)) = v(a_\tau - a_\delta).$$

$(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ ist also eine PCF vom algebraischen Typ.

Sei $\delta \leq \tau < \gamma$ .Wähle $\rho = \tau+1$. Dann ist

$$v(a_{\delta+1} - a_\delta) + v(a_{\tau+1} - a_\tau) = v(f(a_\delta)) + v(f(a_\tau)) \leq$$

$$2v(f(a_\tau)) \leq v(f(a_{\tau+1})) = v(a_{\rho+1} - a_\rho).$$

Da für alle $\delta<\gamma$ $v(a_\delta) \geq o$ ist,ist $(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ also distinguiert.

Sei $\tau < \gamma$ und $m \in N$, $m > o$.

Wegen $v(f(a_o)) \geq v(n) > o$ und wegen b), gibt es ein $i \in N$ mit

$v(f(a_i)) \geq 2^i v(n) > v(m)$.

Da $(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ distinguiert ist gibt es ein $\delta < \gamma$ mit

$v(a_{\delta+1}-a_\delta) = v(a_{\tau+1}-a_\tau)+v(a_{i+1}-a_i)$ und $i,\tau<\delta$.

Also ist

$v(a_{\delta+1}-a_\delta) \geq v(a_{\tau+1}-a_\tau)+2^i(v(n)) > v(a_{\tau+1}-a_\tau)+v(m)$.

$(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ ist daher auch S-PCF.

Nach vi) hat $(a_\delta)_{\delta<\gamma}$ einen Limes in K. Sei also a_γ ein Limes von $(a_\delta)_{\delta<\gamma}$. Wir müssen a) und b) nachweisen! Sei also $\delta<\tau=\gamma$.

a):

$v(f(a_\delta)) = v(a_{\delta+1}-a_\delta) = v(a_\gamma - a_\delta)$.

b):

Aus $v(a_\gamma - a_{\delta+1}) = v(f(a_{\delta+1}))$ folgt

$v(f(a_\gamma) - f(a_{\delta+1})) \geq f(a_{\delta+1})$, d.h.

$v(f(a_\gamma)) \geq v(f(a_{\delta+1})) \geq 2v(f(a_\delta))$.

Damit ist die Konstruktion der gesuchten PCF abgeschlossen und vi) $\rightarrow$ ii) gezeigt.

ii) $\rightarrow$ iii):

Sei $f \in A_v[X]$ mit

$v(f(o)) \notin \hat{\Gamma}$ und $v(f'(o)) \in \hat{\Gamma}$.

Definiere eine Folge

$a_o := o$

$$a_{i+1} := a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)} .$$

Wie beim Beweis von vi) $\rightarrow$ ii) sieht man, daß für alle $i \in N$

$o \leq v(f'(a_i)) \in \hat{\Gamma}$ und

$v(f(a_i)) \geq 2^i v(f(o))$ (modulo $\hat{\Gamma}$).

Da $v(f(o)) \notin \hat{\Gamma}$, gibt es ein $i \in N$ mit

$2^i v(f(o)) > 3v(n)$. Also ist bestimmt

$v(f(a_i)) > 2v(n)$.

Sei nun $c \in K$ mit

$v(c) = v(f'(a_i))$. Definiere

$$g(X) := \frac{f(cX + a_i)}{c^2}$$. Sei

$$g(X) = \sum_{i=o}^{m} c_i X^i$$ und

$$f(X + a_i) = \sum_{i=o}^{m} b_i X^i$$

Dann ist für alle i

$v(b_i) \geq o$, $b_o = f(a_i)$ und $b_1 = f'(a_i)$.

Also folgt, da $v(f'(a_i)) \in \hat{\Gamma}$

$$v(c_o) = v(\frac{b_o}{c^2}) = v(f(a_i)) - 2v(f'(a_i)) > v(n) ,$$

$$v(c_1) = v(\frac{cb_1}{c^2}) = v(f'(a_i)) - v(f'(a_i)) = o \quad \text{und}$$

$v(c_j) = v(c^{j-2} b_j) \geq o$ für $j \geq 2$.

Wir haben also

$g \in A_v[X]$, $v(g(o)) > v(n)$, $v(g'(o)) = o$.

Wegen ii) hat g also eine Nullstelle b aus K. Dann ist $cb + a_i$ Nullstelle von f. qed.

iii) $\rightarrow$ i):

Nach Satz 1 müssen wir zeigen, daß jedes Polynom

$$\sum_{i=o}^{m} a_i X^i \text{ , mit } \bar{v}(a_o) > \bar{v}(a_1) = o \text{ und } \bar{v}(a_i) \geq o$$

für alle i, in K eine Nullstelle besitzt.

Sei also $c \in K$, sodaß

$v(c) = \min\{v(a_i) \mid o \leq i \leq m\}$. Dann ist

$v(c) \in \hat{\Gamma}$.

Also ist mit $v(a_1)$ auch $v(\frac{a_1}{c})$ aus $\hat{\Gamma}$.

Ebenso folgt

$$v(\frac{a_o}{c}) > 0 \quad \text{und} \quad v(\frac{a_o}{c}) \notin \hat{\Gamma} \quad .$$

Das Polynom

$$\sum_{i=o}^{m} \frac{a_i}{c} X^i$$

erfüllt also die Voraussetzungen von ii) und besitzt daher eine Nullstelle in K. qed.

Bemerkung:

Existiert in K keine natürliche Zahl $n \neq o$ mit $v(n) > o$,hat also der Restklassenkörper R_1 die Charakteristik o , so liefert der Beweis von vi) $\rightarrow$ ii) sofort einen Beweis von vi) $\rightarrow$ iii) .

Definition:

Sei K ein bewerteter Körper der Charakteristik o.
Eine S-henselsche Hülle von K ist dann ein S-henselscher, algebraischer,S-unmittelbarer Oberkörper von K .

Satz 5

Seien K_1 und K_2 bewertete Körper der Charakteristik o. Dann gilt:

i) K_1 besitzt eine S-henselsche Hülle

ii) Je zwei S-henselsche Hüllen von K_1 sind über K_1 - als bewertete Körper - isomorph.

iii) Sei K_1 in K_2 enthalten und K_2 S-henselsch.Dann gibt es eine S-henselsche Hülle von K_1 , die in K_2 enthalt- ist.

iv) Sei $(K_1,v_1) \subset (K_2,v_2)$.Dann ist K_2,v_2 S-henselsche Hülle von K_1,v_1 genau dann,wenn $K_2,\bar{v}_2$ henselsche Hülle von $K_1,\bar{v}_1$ ist.

Beweis:

i):

Wähle in der algebraisch abgeschlossenen Hülle von K_1 einen S-unmittelbaren Oberkörper von K_1,der maximal ist mit dieser Eigenschaft.Nach Satz 4 v) ist dieser Körper S-henselsch und also auch S-henselsche Hülle von K_1.

iv) "$\rightarrow$" :

Sei K_2,v_2 S-henselsche Hülle von K_1,v_1.Dann ist $K_2,\bar{v}_2$ henselsch.Nach [11] enthält $K_2,\bar{v}_2$ die henselsche Hülle $K_3,\bar{v}_3$ von $K_1,\bar{v}_1$. Sei also

$$(K_1,v_1) \subset (K_3,v_3) \subset (K_2,v_2) \quad .$$

Da K_2,v_2 S-unmittelbare,algebraische Erweiterung von K_1,v_1 ist, ist K_2,v_2 auch S-unmittelbare,algebraische Erweiterung von K_3,v_3 . K_3,v_3 ist aber S-henselsch. Satz 4 v) liefert also

$$(K_3,v_3) = (K_2,v_2) \quad ,\text{d.h.}$$

(K_2,v_2) ist henselsche Hülle von (K_1,v_1).

ii):

Seien K_2,v_2 und K_3,v_3 zwei S-henselsche Hüllen von K_1,v_1.Nach iv)"$\rightarrow$" sind dann $K_2,\bar{v}_2$ und $K_3,\bar{v}_3$ henselsche Hüllen von $K_1,\bar{v}_1$.Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der henselschen Hülle- siehe [11] - ,gibt es einen K_1-Isomorphismus

$$\varphi : K_2 \rightarrow K_3 \quad \text{mit } \bar{v}_3 \circ \varphi = \bar{v}_2 \quad .$$

Wir zeigen, daß auch $v_3 \circ \varphi = v_2$ gilt.
Sei also $x \in K_2$.
Da K_2,v_2 unmittelbare Erweiterung von K_1,v_1 ist, gibt es ein
$a \in K_1$ mit $v_1(a) = v_2(x)$.

Ist für alle $n \neq o$ $v_1(n) = o$, so ist $\bar{v}_2 = v_2$ und $\bar{v}_3 = v_3$,
und es ist nichts mehr zu zeigen. Sei also
$n \in \mathbb{N}$ mit $v_1(n) > o$.

Setze
$y := \frac{x \cdot n}{a} \in K_2$. Dann gilt

$2\bar{v}_1(n) > \bar{v}_1(n) = \bar{v}_2(y) = \bar{v}_3(\varphi(y)) > o$. Daraus folgt

$o < v_2(y) < 2v_1(n)$ und $o < v_3(\varphi(y)) < 2v_1(n)$.

Da K_2,v_2 S-unmittelbare Erweiterung von K_1,v_1 ist,
gibt es ein b aus K_1 mit

$v_2(y - b) > 3v_1(n)$. Also ist

$\bar{v}_2(y - b) > 2\bar{v}_1(n)$ und daher

$\bar{v}_3(\varphi(y) - b) > 2\bar{v}_1(n)$. Daraus folgt

$v_3(\varphi(y) - b) > 2v_1(n)$.

Da andererseits

$v_3(\varphi(y)) < 2v_1(n)$ und $v_2(y) < 2v_1(n)$, folgt

$v_3(\varphi(y)) = v_3(b) = v_1(b) = v_2(b) = v_2(y)$.

Also ist

$$v_3(\varphi(x)) = v_3(\varphi(y)\tfrac{a}{n}) = v_3(\varphi(y)) + v_1(\tfrac{a}{n}) = v_2(y) + v_1(\tfrac{a}{n}) = v_2(x).$$

Bemerkung: Wir haben sogar stärker folgendes bewiesen:
Sei $K_1,v_1 \subset K_2,v_2$ eine S-unmittelbare Körpererweiterung,
und sei $K_1,v_1 \subset K_2,v_3$, sodaß $\bar{v}_2 = \bar{v}_3$.
Dann ist auch $v_2 = v_3$.

iv) "$\longleftarrow$":
Sei $K_1,v_1 \subset K_2,v_2$ und $K_2,\bar{v}_2$ henselsche Hülle von $K_1,\bar{v}_1$.
Sei K_3,v_3 die S-henselsche Hülle von K_1,v_1, die nach i)
existiert. Nach iv) "$\longrightarrow$" ist $K_3,\bar{v}_3$ henselsche Hülle von
$K_1,\bar{v}_1$. Es gibt also wieder einen K_1-Isomorphismus
$\varphi : K_2 \longrightarrow K_3$ mit $\bar{v}_3 \circ \varphi = \bar{v}_2$.
K_3,v_3 ist aber S-unmittelbare Erweiterung von K_1,v_1.
Es folgt also aus der letzten Bemerkung, daß auch
$v_3 \circ \varphi = v_2$.
K_2,v_2 und K_3,v_3 sind also isomorph, und K_2,v_2 ist
ebenfalls S-henselsche Hülle von K_1,v_1.

iii):
Sei $K_1,v_1 \subset K_2,v_2$ und K_2,v_2 S-henselsch.
Dann ist $K_2,\bar{v}_2$ henselsch. Sei K_3,v_3 ein Zwischenkörper derart, daß $K_3,\bar{v}_3$ die henselsche Hülle von $K_1,\bar{v}_1$
ist. Aus iv) folgt, daß K_3,v_3 die S-henselsche Hülle von
K_1,v_1 ist.

<u>Satz 6</u>

Sei K ein bewerteter Körper der Charakteristik o.
K_1 und K_2 seien zwei S-maximale, S-unmittelbare Oberkörper
von K. Dann sind K_1 und K_2 -als bewertete Körper - über
K isomorph.

<u>Beweis:</u>

Sei nach Zorns Lemma φ ein maximaler K-Isomorphismus von
Zwischenkörpern $\hat{K}_1$ und $\hat{K}_2$.

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[d, dash] & & K_2 \arrow[d, dash] \\
\varphi : \hat{K}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & \hat{K}_2 \arrow[dl, dash] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 5 ii) können wir den Isomorphismus φ auf die S-henselschen Hüllen von $\hat{K}_1$ bzw. $\hat{K}_2$ fortsetzen. $\hat{K}_1$ und $\hat{K}_2$ sind also S-henselsch. Wir wollen zeigen, daß $\hat{K}_1 = K_1$ und $\hat{K}_2 = K_2$.

Sei o.E. $\hat{K}_1 \neq K_1$. Dann ist K_1 nicht S-maximal. Also existiert eine S-PCF $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$, die in K_1 aber nicht in $\hat{K}_1$ konvergiert, aus K_1. Da $\hat{K}_1$ S-henselsch ist, folgt aus Satz 4 iv), daß $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ vom transzendenten Typ ist.

Sei b_1 bzw. b_2 ein Limes von $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ bzw. $(\varphi(a_\delta))_{\delta<\alpha}$ in K_1 bzw. K_2 . Dann sind nach [6] b_1 bzw. b_2 über $\hat{K}_1$ bzw. $\hat{K}_2$ transzendent, und φ setzt sich zu einem Isomorphismus der bewerteten Körper $\hat{K}_1(b_1)$ und $\hat{K}_2(b_2)$ fort. Das widerspricht der maximalen Wahl von φ . qed.

Definition:

Sei K ein bewerteter Körper und κ eine Kardinalzahl, dann heißt K

i) κ-vollständig, wenn jede PCF $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ mit $|\alpha| \leq \kappa$ in K konvergiert.

ii) κ-S-vollständig, wenn K die Charakteristik o hat und jede S-PCF $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ mit $|\alpha| \leq \kappa$ in K konvergiert.

Bemerkung:

Satz 3 iv) sagt aus, daß ein Körper genau dann S-maximal ist, wenn er κ-S-vollständig für jede Kardinalzahl κ ist..

Definition:

Seien K^1 und K^2 bewertete Körper der Charakteristik o, und seien $(\Gamma^1,R^1_1,R^1_2,..)$ bzw. $(\Gamma^2,R^2_1,R^2_2,..)$ Wertgruppe und Restklassenringe von K^1 bzw. K^2 .

Eine S-isomorphe Einbettung von $(\Gamma^1,R^1_1,R^1_2,..)$ in $(\Gamma^2,R^2_1,R^2_2,..)$ ist eine Folge von Abbildungen $\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2,..$, sodaß

$$\varphi_o : \Gamma^1 \to \Gamma^2$$
$$\varphi_1 : R^1_1 \to R^2_1$$
$$\varphi_2 : R^1_2 \to R^2_2$$

....

isomorphe Einbettungen sind, die

$$v^2_n \circ \varphi_n = \varphi_o \circ v^1_n \qquad \text{und}$$
$$res^{2m}_n \circ \varphi_m = \varphi_n \circ res^{1m}_n$$

für alle $m \mid n \neq o$ erfüllen.

Dabei bedeuten für i=1,2

v^i_n die Bewertung $v^i_n : R^i_n \to \Gamma^i \cup \{\infty\}$ des Restklassenrings R^i_n von K^i,

res^{im}_n die kanonische Abbildung $res^{im}_n : R^i_m \to R^i_n$.

Wir schreiben

$$\varphi := (\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2,..) \qquad \text{und}$$
$$\varphi : (\Gamma^1,R^1_1,R^1_2,..) \to (\Gamma^2,R^2_1,R^2_2,..) \quad .$$

Sei

$$\Psi : (K^1,\Gamma^1) \to (K^2,\Gamma^2)$$

eine isomorphe Einbettung des bewerteten Körpers $(K^1,..)$ in den bewerteten Körper (K^2,Γ^2). Dann wird in kanonischer Weise eine S-isomorphe Einbettung von $(\Gamma^1,R^1_1,R^1_2..)$ in $(\Gamma^2,R^2_1,R^2_2,..)$ φ induziert. Wir schreiben

$$\varphi := \Psi|_{(\Gamma^1,R^1_1,R^1_2,..)} \quad .$$

Satz 7

Seien $(K^o,\Gamma^o) \subset (K^i,\Gamma^i)$ bewertete Körper der Charakteristik o, i=1,2 . K^1 und K^2 seien S-henselsch, K^2 sei ω-vollständig.

$$\varphi : (\Gamma^1,R^1_1,R^1_2,..) \to (\Gamma^2,R^2_1,R^2_2,..)$$

sei eine S-isomorphe Einbettung, die $(\Gamma^o,R^o_1,R^o_2,..)$ elementweise festläßt.

Dann gibt es zwei S-henselsche Zwischenkörper

$$(K^o,\Gamma^o) \subset (\hat{K}^i,\hat{\Gamma}^i) \subset (K^i,\Gamma^i) \qquad (i=1,2) \quad \text{mit}$$

$$\hat{R}^1_n = R^1_n \quad \text{für alle } n \neq o \qquad \text{und}$$

$$\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^o + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \;\&\; v^o(n) \geq |x|\}.$$

Und es gibt einen (K^o,Γ^o)- Isomorphismus

$$\Psi : (\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1) \to (\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2) \qquad \text{mit}$$

$$\Psi|(\hat{\Gamma}^1,\hat{R}^1_1,\hat{R}^1_2,..) = \varphi|(\hat{\Gamma}^1,\hat{R}^1_1,\hat{R}^1_2,..) \quad .$$

Beweis:

Sei nach Zorns Lemma Ψ maximal gewählt mit

$$\Psi : (\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1) \to (\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2)$$,wobei die $(\hat{K}^i,\hat{\Gamma}^i)$

Zwischenkörper

$$(K^o,\Gamma^o) \subset (\hat{K}^i,\hat{\Gamma}^i) \subset (K^i,\Gamma^i) \qquad i=1,2$$

sind mit

$$\hat{\Gamma}^1 \subset \Gamma^o + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \;\&\; v^o(n) \geq |x|\}$$

und

$$\Psi|(\hat{\Gamma}^1,\hat{R}^1_1,\hat{R}^1_2,..) = \varphi|(\hat{\Gamma}^1,\hat{R}^1_1,\hat{R}^1_2,..) \quad .$$

Nach Satz 5 ii) setzt sich der Isomorphismus auf die S-henselschen Hüllen fort. Aus der Maximalität folgt also, daß $(\hat{K}^1,\hat{\Gamma}^1)$ und $(\hat{K}^2,\hat{\Gamma}^2)$ S-henselsch sind.

Wir zeigen zunächst, daß für alle $n \neq o$

$$\hat{R}^1_n = R^1_n$$ gilt.

Sei also andernfalls $a \in K^1$ und $n \in \mathbb{N}$,sodaß

$$res^1_n(a) \in R^1_n \setminus \hat{R}^1_n \quad .$$

Es können dann zwei Fälle auftreten:

1.Fall:

Es gibt ein Polynom f aus $\hat{K}^1[X]$ vom Inhalt o, sodaß

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \to v^1(n) < v^1(f(a)) \quad .$$

Bemerkung:

Sei K,v ein bewerteter Körper, und

$$f = \sum_{i=o}^{n} a_i X^i \in K[X] \quad .$$

Der Inhalt von f ist dann definiert als

$$\underline{v}(f) := \min_{i=o}^{n} v(a_i) \quad .$$

$\underline{v}$ setzt v zu einer Bewertung von $K(X)$ fort.

Sei nun f von minimalen Grad mit dieser Eigenschaft.

Dann gilt

i) grad $f > 1$.

Denn sei $f = cX-d$ und $\min\{\hat{v}^1(c),\hat{v}^1(d)\} = o$ .Aus $v^1(a) \geq o$ und $v^1(ca-d) > o$ folgt dann $v^1(c)=o$.

Es ist also

$$v^1(a - \tfrac{d}{c}) = v^1(ca-d) > v^1(n) \quad . \text{ d.h.}$$

$$res^1_n(a) = res^1_n(\tfrac{d}{c}) \in \hat{R}^1_n \quad . \text{ Wid.}$$

ii) f ist irreduzibel.

Denn sei $f = g \cdot h$, $g,h \in \hat{K}^1[X]$ und grad g, grad $h <$ grad f.

Weiter kann man annehmen, daß

$$\underline{\hat{v}}^1(g) = \underline{\hat{v}}^1(h) = o \quad .$$

Wegen der Minimalität von f gibt es l,m aus $\mathbb{N}$,sodaß $l,m \neq o$,

$v^1(h(a)) \leq v^1(l)$ und $v^1(g(a)) \leq v^1(m)$. Also ist

$v^1(f(a)) \leq v^1(l \cdot m)$. Wid.

iii) $\underline{\hat{v}}^1(f') \leq v^1($ grad f ! $)$

Denn sei $m :=$ grad f und $f = \sum_{i=o}^{m} a_i X^i$. Dann ist

$$\underline{\hat{v}}^1(f') = \min_{i=1}^{m} v^1(ia_i) \leq \min_{i=1}^{m} v^1(a_i) + v^1(m!) \quad .$$

Aus $\min_{i=1}^{m} v^1(a_i) > o$ würde aber $v^1(a_o)=o$ und daraus

$v^1(f(a)) = v^1(a_o) = o$ (Wid.) folgen. Also ist

$$\min_{i=1}^{m} v^1(a_i) = o \qquad \text{und}$$

$$\underline{v}^1(f') \leq v^1(m!) \quad .$$

iv) f besitzt eine Nullstelle $b \in K^1$ mit

$res^1_k(b) = res^1_k(a)$ für alle $k \neq o$.

Denn aus iii) und der minimalen Wahl von f folgt, daß ein $s \in \mathbb{N}$, $s \neq o$ existiert derart, daß

$v^1(f'(a)) \leq v^1(s)$.

Es ist also auf jeden Fall

$\bar{v}^1(f(a)) > 2\bar{v}^1(f'(a))$.

Da $K^1, \bar{v}^1$ henselsch ist, gibt es nach Satz 1 eine Nullstelle b von f in K^1 mit

$\bar{v}^1(b - a) = \bar{v}^1(f(a)) - \bar{v}^1(f'(a))$.

Daraus folgt für alle $k \neq o$

$v^1(b - a) > v^1(k)$ d.h.

$res^1_k(b) = res^1_k(a)$.

v) $\Psi(f) \in \hat{K}^2[X]$ besitzt eine Nullstelle $b' \in K^2$ mit

$res^2_k(b') = \varphi_k(res^1_k(b))$ für alle $k \neq o$.

(Sei $\varphi = (\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots)$.)

Sei $s \in \mathbb{N}$ wie in iv) . Wähle ein $a' \in K^2$ derart, daß für $t := s^3 k$, $k \neq o$ beliebig aus $\mathbb{N}$.

$res^2_t(a') = \varphi_t(res^1_t(a))$.

Dann ist

$$res^2_t(\Psi(f)(a')) = res^2_t(\Psi(f))(res^2_t(a')) =$$
$$= \varphi_t(res^1_t(f))(\varphi_t(res^1_t(a))) =$$
$$= \varphi_t(res^1_t(f(a))) = \varphi_t(o) = o .$$

Also ist

$v^2(\Psi(f)(a')) \geq v^0(t)$.

Ebenso folgt

$v^2_t(res^2_t(\Psi(f')(a'))) = \Psi_o(v^1_t(res^1_t(f'(a)))) \leq v^o(s)$.

Also ist

$v^2(\Psi(f')(a')) \leq v^0(s)$ und erst recht

$\bar{v}^2(\Psi(f)(a')) > 2\bar{v}^2(\Psi(f')(a'))$.

Da $K^2, \bar{v}^2$ henselsch ist , existiert eine Nullstelle b' von Ψf in K^2 mit

$\bar{v}^2(b' - a') = \bar{v}^2(\Psi(f)(a')) - \bar{v}^2(\Psi(f')(a'))$.

Wir haben also

$v^2(b' - a') > v^2(s \cdot k)$ d.h.

$$res^2_k(b') = res^2_k(a') = res^{2\,t}_{\;\;k}(res^2_t(a')) =$$
$$= res^{2\,t}_{\;\;k}(\varphi_t(res^1_t(a))) =$$
$$= \varphi_k(res^{1\,t}_{\;\;k}(res^1_t(a))) = \varphi_k(res^1_k(a)) =$$
$$\varphi_k(res^1_k(b)) \text{ . (Nach iv)}$$

Für jedes $k \neq o$ gibt es also eine Nullstelle $b' \in K^2$ von $\Psi(f)$ mit

$res^2_k(b') = \varphi_k(res^1_k(b))$.

Da $\Psi(f)$ höchstens m Nullstellen besitzt, und aus der letzten Gleichung

$res^2_r(b') = \varphi_r(res^1_r(b))$

für alle $r \mid k$ folgt, gibt es also eine Nullstelle b' von $\Psi(f)$ aus K^2 mit

$res^2_k(b') = \varphi_k(res^1_k(b))$

für alle $k \neq o$. qed.

Ψ läßt sich also nach ii) und v) vermöge $\hat{\varphi}(b) := b'$

$\hat{\varphi} : \hat{K}^1(b) \rightarrow \hat{K}^2(b')$

zu einem Körperisomorphismus fortsetzen. Für $\hat{\varphi}$ gilt darüberhinaus

vi) $v^2 \circ \hat{\varphi} = \varphi_o \circ v^1$ (auf $\hat{K}^1(b)$), und

$v^1(\hat{K}^1(b)) \subset \Gamma^o + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \;\&\; v^1(n) \geq |x|\}$.

Denn sei $g(b) \in \hat{K}^1(b)$ mit

$g \in \hat{K}^1[X]$ und grad $g <$ grad $f = m$.

Wegen der minimalen Wahl von f gibt es ein $r \neq o$ aus $\mathbb{N}$ mit

$v^1(g(a)) \leq v^1(r) + \underline{v}^1(g)$.

Sei $c \in \hat{K}^1$ derart, daß $v^1(c) = \underline{v}^1(g)$.

Setze $h := \frac{1}{c} g$. Dann ist

$\underline{v}^1(h) = o$ und $v^1(h(a)) \leq v^1(r)$.

Nun ist nach iv)

$v^1_r\,(res^1_r(h(b))) = v^1_r\,(res^1_r(h(a)) \leq v^1(r)$.

Also ist

$v^1(h(b)) = v^1(h(a))$

und

$o \leq v^1(h(b)) \leq v^1(r)$.

Also folgt

$v^1(c) \leq v^1(g(b)) \leq v^1(c) + v^1(r)$ d.h.

$v^1(g(b)) \in \hat{\Gamma}^1 + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in N} n \neq o \;\&\; v^1(n) \geq |x|\} \subset$

$\subset \Gamma^o + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in N} n \neq o \;\&\; v^1(n) \geq |x|\}$

nach Voraussetzung.

Damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Andererseits ist

$$v^2(\hat{\Psi}(g(b))) = v^2(\Psi(c) \cdot \hat{\Psi}(h(b))) =$$
$$= \varphi_o(v^1(c)) + v^2_r(res^2_r(\hat{\Psi}(h(b)))) =$$
$$= \varphi_o(v^1(c)) + v^2_r(res^2_r(\Psi(h))(res^2_r(b'))) =$$
$$\text{(nach v))} \quad = \varphi_o(v^1(c)) + v^2_r(\varphi_r(res^1_r(h)(res^1_r(b)))) =$$
$$= \varphi_o(v^1(c)) + \varphi_o(v^1_r(res^1_r(h(b)))) =$$
$$= \varphi_o(v^1(c) + v^1(h(b))) =$$
$$= \varphi_o(v^1(g(b)))$$

qed.

vii) Es ist $res^2_k \circ \hat{\Psi} = \varphi_k \circ res^1_k$ (auf $\hat{K}^1(b)$)

Denn sei $g(b) \in K^1(b)$ und $g = h \cdot c$ wie in vi) , und es sei $v^1(h(b)) = v^1(r)$.

Es treten drei Fälle auf

a) $v^1(g(b)) < o$ oder $v^1(g(b)) > v^1(k)$.

Dann ist nach vi) auch

$v^2(\hat{\Psi}(g(b))) < o$ oder $v^2(\hat{\Psi}(g(b))) > v^2(k)$ d.h.

$res^2_k(\hat{\Psi}(g(b))) = o = \varphi_k(o) = \varphi_k(res^1_k(g(b)))$

b) $v^1(c) \geq o$.

Dann ist

$$res^2_k(\hat{\Psi}(g(b))) = res^2_k(\hat{\Psi}(h(b)) \cdot \Psi(c)) =$$
$$= res^2_k(\Psi(h)(b')) \cdot res^2_k(\Psi(c)) =$$
$$= \varphi_k(res^1_k(h))(\varphi_k(res^1_k(b))) \cdot \varphi_k(res^1_k(c)) =$$
$$= \varphi_k(res^1_k(h(b))) \cdot \varphi_k(res^1_k(c)) =$$
$$= \varphi_k(res^1_k(h(b) \cdot c)) =$$
$$= \varphi_k(res^1_k(g(b)))$$.

c) $v^1(c) < o$ und $v^1(g(b)) \geq o$.

Es folgt zunächst $v^1(\frac{1}{c}) \leq v^1(r)$.

Setze

$t := k \cdot r$.

Aus Teil b) folgt (für k=t)

$res^2_t(\hat{\Psi}(g(b) \cdot \frac{1}{c})) = \varphi_t(res^1_t(g(b) \cdot \frac{1}{c}))$ d.h.

$res^2_t(\hat{\Psi}(g(b))) \cdot res^2_t(\Psi(\frac{1}{c})) = \varphi_t(res^1_t(g(b))) \cdot \varphi_t(res^1_t(\frac{1}{c}))$.

Aus

$res^2_t(\Psi(\frac{1}{c})) = \varphi_t(res^1_t(\frac{1}{c}))$

folgt dann

$v^2_t(\varphi_t(res^1_t(\frac{1}{c})) \cdot (res^2_t(\hat{\Psi}(g(b))) - \varphi_t(res^1_t(g(b))))) = \infty$.

Daraus folgt

$$v^2_t(res^2_t(\hat{\Psi}(g(b))) - \varphi_t(res^1_t(g(b)))) > v^2(t) - v^2_t(\varphi_t(res^1_t(\tfrac{1}{c})))$$
$$\geq v^2(t) - v^2(r) = v^2(k).$$

Also ist

$res^{2\,t}_{\;k}(res^2_t(\hat{\Psi}(g(b)))) = res^{2\,t}_{\;k}(\varphi_t(res^1_t(g(b)))$ d.h.

$$\mathrm{res}^2_k(\hat{\varphi}(g(b))) = \varphi_k(\mathrm{res}^1_k(g(b))) \qquad \text{qed.}$$

Aus vi) und vii) folgt , daß,wenn wir

$\hat{K}^1(b) = \tilde{K}^1$ und $\hat{K}^2(b') = \tilde{K}^2$ setzen,

$$\varphi|(\tilde{\Gamma}^1, \tilde{R}^1_1, \tilde{R}^1_2, \ldots) = \hat{\varphi}|(\tilde{\Gamma}^1, \tilde{R}^1_1, \tilde{R}^1_2, \ldots) .$$

Aus vi) folgt

$$\tilde{\Gamma}^1 \subset \Gamma^o + \{ x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \;\&\; v^1(n) \geq |x| \} .$$

Das widerspricht der maximalen Wahl von ψ .

2.Fall

Für jedes Polynom $f \in \hat{K}^1[X]$ vom Inhalt o gibt es ein $n \in \mathbb{N}$,sodaß $v^1(f(a)) \leq v^1(n) < \infty$.

Dann gilt

i) In K^2 existiert ein a' ,sodaß für alle $k \neq o$

$$\mathrm{res}^2_k(a') = \varphi_k(\mathrm{res}^1_k(a)) .$$

Wir nehmen das Gegenteil an.Weil aus der letzten Gleichung auch

$$\mathrm{res}^2_r(a') = \varphi_r(\mathrm{res}^1_r(a))$$

für alle $r \mid k$ folgt,haben wir also für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $c \in K^2$ ein $k \neq o$ mit

$$m \mid k \qquad \text{und} \qquad \mathrm{res}^2_k(c) \neq \varphi_k(\mathrm{res}^1_k(a)) .$$

Wir können also Folgen

$$a_i \in K^2 \; , \; n_i \in \mathbb{N} \qquad i=o,1,2,\ldots$$

auswählen mit

$$\mathrm{res}^2_{n_i}(a_i) = \varphi_{n_i}(\mathrm{res}^1_{n_i}(a)) ,$$

$$\mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_i) \neq \varphi_{n_{i+1}}(\mathrm{res}^1_{n_{i+1}}(a)) \qquad \text{und}$$

$$o \neq n_i \mid n_{i+1}$$

für alle $i=o,1,2,\ldots$.

$(a_i)_{i<\omega}$ ist PCF .Denn es ist

$$\mathrm{res}^2_{n_i}(a_{i+1}-a_i) = \mathrm{res}^{2\,n_{i+1}}_{n_i}(\mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_{i+1})) - \mathrm{res}^2_{n_i}(a_i) =$$

$$= \mathrm{res}^{2\,n_{i+1}}_{n_i}(\varphi_{n_{i+1}}(\mathrm{res}^1_{n_{i+1}}(a))) - \varphi_{n_i}(\mathrm{res}^1_{n_i}(a)) =$$

$$= \varphi_{n_i}(\mathrm{res}^{1\,n_{i+1}}_{n_i}(\mathrm{res}^1_{n_{i+1}}(a))) - \varphi_{n_i}(\mathrm{res}^1_{n_i}(a)) =$$

$$= o$$

und

$$\mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_{i+1}-a_i) = \mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_{i+1}) - \mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_i) =$$

$$= \varphi_{n_{i+1}}(\mathrm{res}^1_{n_{i+1}}(a)) - \mathrm{res}^2_{n_{i+1}}(a_i) \neq$$

$$\neq o .$$

Daraus folgt für alle $i=o,1,2,\ldots$ und $i < j$

$$v^2(n_i) < v^2(a_{i+1} - a_i) \leq v^2(n_{i+1}) \qquad \text{und daraus}$$

$$v^2(a_{i+1} - a_i) < v^2(a_{j+1} - a_j) \quad . \text{ qed.}$$

Da K^2 als ω -vollständig vorausgesetzt war, besitzt $(a_i)_{i<\omega}$ also einen Limes $a' \in K^2$. D.h.

$$v^2(a' - a_i) = v^2(a_{i+1} - a_i) > v^2(n_i) .$$

Daraus folgt

$$\mathrm{res}^2_{n_i}(a') = \varphi_{n_i}(\mathrm{res}^1_{n_i}(a)) = \mathrm{res}^2_{n_i}(a_i) .$$

Man überlegt leicht,daß aus

$$v^2(n_o) < v^2(n_1) < v^2(n_2) < \ldots$$

folgt,daß zu jedem $k \neq o$ ein i mit

$$v^2(n_i) \geq v^2(k)$$

existiert. Also ist für alle $k \neq o$

$$\mathrm{res}^2_k(a') = \varphi_k(\mathrm{res}^1_k(a)) \qquad \text{.qed.}$$

ii) Sei a' wie in i) .Dann gilt für alle Polynome $f \in \hat{K}^1[X]$ vom Inhalt o

$$v^2(\psi(f)(a')) = \varphi_o(v^1(f(a))) .$$

Denn nach Voraussetzung gibt es ein $k \neq o$ mit

$$o \leq v^1(f(a)) \leq v^1(k) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Wir haben also

$$\varphi_o(v^1(f(a))) = \varphi_o(v_k^1(res_k^1(f(a)))) =$$
$$= \varphi_o(v_k^1(\ res_k^1(f)(res_k^1(a)))\ ) =$$
$$= v_k^2(\varphi_k(\ res_k^1(f)(res_k^1(a))\ )) =$$
$$= v_k^2(\ res_k^2(\psi(f))\ (res_k^2(a')\ ) =$$
$$= v_k^2(res_k^2(\psi(f)(a'))) =$$
$$= v^2(\psi(f)(a')\ ) \quad .$$

Aus ii) folgt , daß a' über $\hat{K}^2$ ebenso wie a über $\hat{K}^1$ transzendent ist. Wir können also ψ zu einem Isomorphismus

$$\hat{\varphi} : \hat{K}^1(a) \to \hat{K}^2(a')$$

fortsetzen vermöge $\hat{\varphi}(a) := a'$.

Dann gilt

iii) $v^2 \circ \hat{\varphi} = \varphi_o \circ v^1$ (auf $\hat{K}^1(a)$) und

$$v^1(K^1(a)) \subset \Gamma^o + \{ x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \ \&\ v^1(n) \geq |x| \}.$$

Denn sei

$$\frac{f(a)}{g(a)} \cdot c \in \hat{K}^1(a) \quad , \text{ wobei } c \in K^1 \quad , \quad f,g \in \hat{K}^1[X] \text{ mit}$$
$$\underline{v}^1(f) = \underline{v}^1(g) = o \quad .$$

Dann ist

$$v^2(\hat{\varphi}(\frac{f(a)}{g(a)} \cdot c)\ ) = v^2(\hat{\varphi}(f(a))) - v^2(\hat{\varphi}(f(a))) + v^2(\psi(c)) =$$

(nach ii)) $$= \varphi_o(v^1(f(a))) - \varphi_o(v^1(g(a))) + \varphi_o(v^1(c)) =$$
$$= \varphi_o(v^1(f(a)) - v^1(g(a)) + v^1(c)) =$$
$$= \varphi_o(v^1(\frac{f(a)}{g(a)} \cdot c)) \quad .$$

Damit ist der erste Teil von iii) gezeigt.

Sei weiter k,m ungleich o aus $\mathbb{N}$, sodaß

$$v^1(f(a)) \leq v^1(k) \quad \text{und} \quad v^1(g(a)) \leq v^1(m) \quad .$$

Daraus folgt

$$\left| v^1(\frac{f(a)}{g(a)}) \right| \leq v^1(km) \quad .$$

Also ist

$$v^1(\frac{f(a)}{g(a)} \cdot c) = v^1(\frac{f(a)}{g(a)}) + v^1(c) \in$$
$$\in v^1(\hat{K}^1(a)) + \{ x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \ \&\ v^1(n) \geq |x| \} \subset$$
$$\subset \Gamma^o + \{ x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} n \neq o \ \&\ v^1(n) \geq |x| \}$$

nach Voraussetzung . qed.

iv) Für alle $k \neq o$ aus $\mathbb{N}$ ist auf $\hat{K}^1(a)$

$$res_k^2 \circ \hat{\varphi} = \varphi_k \circ res_k^1 \quad .$$

Sei also $x \in \hat{K}^1(a)$. Es treten dann zwei Fälle auf :

a) Es gibt Polynome $f,g \in \hat{K}^1[X]$ und ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$o \leq \underline{v}^1(f) \leq v^1(r) \quad , \quad o \leq \underline{v}^1(g) \leq v^1(r) \quad , \quad r \neq o \quad \text{und}$$
$$x = \frac{f(a)}{g(a)} \quad , \quad v^1(x) = o \quad .$$

Setze $t := k \cdot r^2$. Dann gilt

$$res_t^2(\hat{\varphi}(f(a)) = res_t^2(\psi(f)(a')) =$$
$$= \varphi_t(res_t^1(f))(res_t^2(a')) =$$
$$= \varphi_t(res_t^1(f))(\ \varphi_t(res_t^1(a)))$$
$$= \varphi_t(res_t^1(f(a))) \quad .$$

Ebenso schließt man

$$res_t^2(\hat{\varphi}(g(a)) = \varphi_t(res_t^1(g(a))) \quad .$$

Daraus folgt

$$res_t^2(\hat{\varphi}(f(a))) \cdot \varphi_t(res_t^1(g(a))) -$$
$$- \varphi_t(res_t^1(f(a))) \cdot res_t^2(\hat{\varphi}(g(a))) = o$$

oder

$$\infty = v_t^2\Big\{\big(\mathrm{res}_t^2(\hat{\varphi}(\tfrac{f(a)}{g(a)}))-\varphi_t(\mathrm{res}_t^1(\tfrac{f(a)}{g(a)}))\big)\big(\mathrm{res}_t^2(\hat{\varphi}(g(a)))\cdot\varphi_t(\mathrm{res}_t^1(f(a)))\big)\Big\}$$

Nun ist aber

$$v_t^2(\,\mathrm{res}_t^2(\hat{\varphi}(g(a)))\cdot\varphi_t(\mathrm{res}_t^1(f(a)))\,) \leq v^2(r^2)\,.$$

Also folgt

$$v_t^2(\mathrm{res}_t^2(\hat{\varphi}(\tfrac{f(a)}{g(a)})) - \varphi_t(\mathrm{res}_t^1(\tfrac{f(a)}{g(a)}))\,) > v(k)\,.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_k^2(\hat{\varphi}(x)) &= \mathrm{res}^2{}_k^t\,(\mathrm{res}_t^2(\hat{\varphi}(\tfrac{f(a)}{g(a)}))) &=\\ &= \mathrm{res}^2{}_k^t\,(\varphi_t(\mathrm{res}_t^1(\tfrac{f(a)}{g(a)}))) &=\\ &= \varphi_k(\mathrm{res}^1{}_k^t(\mathrm{res}_t^1(\tfrac{f(a)}{g(a)}))) &=\\ &= \varphi_k(\mathrm{res}_k^1(x)) &.\mathrm{qed.}\end{aligned}$$

b) Sei $v^1(x) < 0$ oder gebe es keine Polynome $f,g \in K^1[X]$ und $r \neq 0$ mit

$0 \leq \underline{v}^1(f) \leq v^1(r)$, $0 \leq \underline{v}^1(g) \leq v^1(r)$, $x = \frac{f(a)}{g(a)}$.

Wir zeigen, daß aus der letzten Bedingung folgt:

$v^1(x) > v^1(k)$, falls $v^1(x) \geq 0$.

Denn sei $x = \frac{f(a)}{g(a)}c$ wie in iii) , und sei $r \neq 0$ mit $v^1(f(a)) \leq v^1(r)$ und $v^1(g(a)) \leq v^1(r)$.

Aus $v^1(x) \geq 0$ folgt

$$v^1(c) \geq -v^1(r)\,.$$

Ist $v^1(c) < 0$, so folgt

$$0 \leq \underline{v}^1(\tfrac{1}{c}\cdot g) \leq v^1(r)\,.$$

Ist $0 \leq v^1(c) \leq v^1(k\cdot r)$, so folgt

$$0 = \underline{v}^1(c\cdot f) \leq v^1(k\cdot r)\,.$$

In beiden Fällen erhalten wir also im Widerspruch zur Annahme Polynome $\bar{f},\bar{g}$ mit

$$x = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}\;,\quad 0 \leq \underline{v}^1(\bar{f}) \leq v^1(k\cdot r)\;,\quad 0 \leq \underline{v}^1(\bar{g}) \leq v^1(k\cdot r)\,.$$

Es folgt also $v^1(c) > v^1(k\cdot r)$ und daraus

$v^1(x) > v^1(k)$.

Aus der Vorausetzung von b) folgt also

$v^1(x) < 0$ oder $v^1(x) > v^1(k)$.

Wegen iii) ist also auch

$v^2(\psi(x)) < 0$ oder $v^2(\psi(x)) > v^2(k)$.

Wir haben also

$$\mathrm{res}_k^2(\psi(x)) = 0 = \varphi_k(0) = \varphi_k(\mathrm{res}_k^1(x))\,.\quad \mathrm{qed.}$$

Aus iii) und iv) folgt, wenn wir $\hat{K}^1(a) = \tilde{K}^1$ und $\hat{\tilde{K}}^2(a') = \tilde{K}^2$ setzen, daß

$$\hat{\psi}\,|\,(\tilde{\Gamma}^1,\tilde{R}_1^1,\tilde{R}_2^1,..) = \psi\,|\,(\tilde{\Gamma}^1,\tilde{R}_1^1,\tilde{R}_2^1,..)\,.$$

Aus iii) folgt

$$\tilde{\Gamma}^1 \subset \Gamma^0 + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n\in\mathbb{N}} n\neq 0 \;\&\; v^1(n) \geq |x|\}\,.$$

Das widerspricht der maximalen Wahl von ψ .

Wir haben also bewiesen, daß für alle $n \neq 0$

$$\hat{R}_n^1 = R_n^1\,.$$

Es bleibt noch

$$\hat{\Gamma}^1 \supset \Gamma^0 + \{x \in \Gamma^1 \mid \bigvee_{n\in N} n\neq 0 \;\&\; v^1(n) \geq |x|\}$$

zu zeigen. Sei also o.E.

$y \in \Gamma^0$, $0 \leq x \leq v^1(n)$, und sei $x = v^1(z)$.

Dann ist

$$x = v_n^1(\mathrm{res}_n^1(z))\,.$$

Nun gibt es aber ein $w \in \hat{K}^1$ mit

$res^1_n(w) = res^1_n(z)$.

Also ist $x \in \hat{\Gamma}^1$.

Wegen $\Gamma^o \subset \hat{\Gamma}^1$ folgt also

$y + x \in \hat{\Gamma}^1$.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 8

Seien $K^o, v^o \subset K^i, v^i$ $(i=1,2)$ bewertete Körper mit Restklassenkörpern k^j , Restklassenabbildungen res^j und Wertgruppen Γ^j $(j=o,1,2)$. K^1 und K^2 seien henselsch .

Weiter sei k^3 ein Zwischenkörper

$k^o \subset k^3 \subset k^1$,der über k^o

separabel erzeugt ist,und

$\varphi : k^3 \to k^2$ sei eine isomorphe

Einbettung,die auf k^o identisch operiert.

Dann gibt es henselsche Zwischenkörper

$K^o \subset \hat{K}^i \subset K^i$ $i=1,2$ und einen K^o-Isomorphismus

$\psi : \hat{K}^1 \to \hat{K}^2$ mit

i) $\hat{\Gamma}^1 = \hat{\Gamma}^2 = \Gamma^o$

ii) $\hat{v}^2 \circ \psi = \hat{v}^1$

iii) $\widehat{res}^2 \circ \psi = \varphi \circ \widehat{res}^1$

iv) $\hat{k}^1 = k^3$

Beweis:

Wir beweisen den Satz zunächst für drei Sonderfälle

a) Sei $k^3 = k^o$.

Setze $\hat{K}^1$ bzw. $\hat{K}^2$ als die henselschen Hüllen von K^o in K^1 bzw. K^2 .

i) und iv) sind dann erfüllt.

Wegen der Eindeutigkeit der henselschen Hülle,gibt es

einen K^o- Isomorphismus

$\psi : \hat{K}^1 \to \hat{K}^2$ der ii) erfüllt.

Es bleibt noch iii) zu zeigen.

Sei also

$x \in \hat{K}^1$ und o.E. $v^1(x) \geq o$.

Wegen $\hat{k}^1 = k^1$ gibt es also ein

$y \in K^o$ mit $v^1(x - y) > o$.

Also ist auch

$v^2(\psi(x) - \psi(y)) = v^2(\psi(x) - y) > o$, d.h.

$res^2(\psi(x)) = res^2(y) = res^o(y) = res^1(x) = \varphi(res^1(x))$.

b) Sei $k^3 = k^o(x_1)$, x_1 transzendent über k^o .

Setze $x_2 := \varphi(x_1)$ und wähle $y_i \in K^i$ mit

$res^i(y_i) = x_i$ $i=1,2$.

Dann ist für jedes $f \in K^o[X]$ vom Inhalt o

$res^o(f) \neq o$ d.h. $res^o(f)(x_i) \neq o$,

woraus folgt

$v^i(f(y_i)) = o$ $i=1,2$.

y_1 und y_2 sind also speziell transzendent über K^o, und es gilt für alle $f \in K^o[X]$

$v^i(f(y_i)) = \underline{v}^o(f)$, $i=1,2$.

Sei $\tilde{K}^1 := K^o(y_1)$ und $\tilde{K}^2 := K^o(y_2)$ und sei

$\tilde{\psi} : \tilde{K}^1 \to \tilde{K}^2$

der natürliche K^o-Isomorphismus mit $\tilde{\psi}(y_1) = y_2$.

Dann gilt

i) $\tilde{\Gamma}^1 = \tilde{\Gamma}^2 = \Gamma^o$.

Denn für $\frac{f(y_i)}{g(y_i)} \in \tilde{K}^i$ ist

$$v^i\left(\frac{f(y_i)}{g(y_i)}\right) = \underline{v}^o(f) - \underline{v}^o(g) \in \Gamma^o .$$

ii) $v^2 \circ \tilde{\psi} = v^1$.

Denn sei $\frac{f(y_1)}{g(y_1)} \in \tilde{K}^1$. Dann ist

$$v^2\left(\tilde{\psi}\left(\frac{f(y_1)}{g(y_1)}\right)\right) = v^2\left(\frac{f(y_2)}{g(y_2)}\right) = \underline{v}^o(f) - \underline{v}^o(g) =$$

$$= v^1\left(\frac{f(y_1)}{g(y_1)}\right) .$$

iv) $\tilde{k}^1 = k^3$.

Denn einerseits ist natürlich

$k^3 = k^o(x_1) \subset res^1(K^o(y_1)) = \tilde{k}^1$.

Sei andererseits

$$x = \frac{f(y_1)}{g(y_1)} \in \tilde{K}^1 \quad \text{und o.E. } v^1(x) = \underline{v}^o(f) = \underline{v}^o(g) = o.$$

Dann ist

$$res^1(x) = \frac{res^1(f(y_1))}{res^1(g(y_1))} = \frac{res^1(f)(x_1)}{res^1(g)(x_1)} \in k^o(x_1) .$$

iii) $\widetilde{res}^2 \circ \tilde{\psi} = \varphi \circ \widetilde{res}^1$.

Denn sei

$$x = \frac{f(y_1)}{g(y_1)} \in \tilde{K}^1 \quad \text{und o.E. } v^1(x) = \underline{v}^o(f) = \underline{v}^o(g) = o .$$

Dann ist

$$res^2(\tilde{\psi}(x)) = res^2\left(\frac{f(y_2)}{g(y_2)}\right) = \frac{res^o(f)(x_2)}{res^o(g)(x_2)} =$$

$$= \frac{\varphi(res^o(f))(\varphi(x_1))}{\varphi(res^o(g))(\varphi(x_1))} = \varphi\left(\frac{res^o(f)(x_1)}{res^o(g)(x_1)}\right) =$$

$$= \varphi(res^1(x))$$

$\tilde{K}^1, \tilde{K}^2$ und $\tilde{\psi}$ haben alle gewünschten Eigenschaften bis auf die Henselität von $\tilde{K}^1$ und $\tilde{K}^2$. Wenn wir aber $\tilde{K}^1$ und $\tilde{K}^2$ vermöge $\tilde{\psi}$ identifizieren und in a) die Rolle von K^o spielen lassen, erhalten wir aus a) durch Bilden der henselschen Hüllen die gesuchten $\hat{K}^1, \hat{K}^2$ und ψ .

c) $k^3 = k^o(x_1)$, x_1 separabel algebraisch über k^o.

Wegen a) kann o.E. K^o als henselsch angenommen werden. Setze $x_2 := \varphi(x_1)$ und sei $f \in k^o[X]$ das Minimalpolynom von x_1 über k^o , f ist dann auch Minimalpolynom von x_2 über k^o.

Wähle nun aus $K^o[X]$ ein g vom Inhalt o ,normiert, mit

$res^o(g) = f$.

g ist irreduzibel, denn man kann annehmen, daß sonst

$g = h \cdot p$, h,p normiert und vom Inhalt o, o < grad h < grad g .

Dann ist aber grad $res^o(h)$ = grad h und es würde folgen

$f = res^o(h) res^o(p)$.

Wähle y_i aus K^i mit $res^i(y_i) = x_i$,

es gilt dann

$res^i(g(y_i)) = o$ und $res^i(g'(y_i)) = f'(x_i) \neq o$ d.h.

$v^i(g(y_i)) > o$ und $v^i(g'(y_i)) = o$, i=1,2 .

K^1 und K^2 sind henselsch, also gibt es in K^i nach Satz 1 Nullstellen z_i von g mit

$res^i(z_i) = res^i(y_i) = x_i$.

Sei $\hat{K}^1 := K^o(z_1)$, $\hat{K}^2 := K^o(z_2)$ und sei

$\psi: \hat{K}^1 \longrightarrow \hat{K}^2$

der natürliche K^o-Isomorphismus, der z_1 in z_2 abbildet. Als algebraische Erweiterungen von K^o sind $\hat{K}^1$ und $\hat{K}^2$ zunächst henselsch. Darüberhinaus gilt

i) $\hat{\Gamma}^1 = \hat{\Gamma}^2 = \Gamma^o$ und $k^3 = \hat{k}^1$.

Denn es ist

$(\hat{K}^1 : K^o)$ = grad g = grad f , $k^3 \subset \hat{k}^1$,

$(\hat{k}^1 : k^o) \geq (k^3 : k^o)$ = grad f und wegen der Gradungleichung

$$\operatorname{grad} f = (\hat{K}^1 : K^o) \geq (\hat{\Gamma}^1 : \Gamma^o) \cdot (\hat{k}^1 : k^o) \geq \operatorname{grad} f \text{ .}$$

Es folgt also

$(\hat{\Gamma}^1 : \Gamma^o) = 1$ und $(\hat{k}^1 : k^o) = (k^3 : k^o)$ d.h.

$\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^o$ und $\hat{k}^1 = k^3$.

ii) $\hat{v}^2 \circ \psi = \hat{v}^1$

folgt aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit von v^o auf algebraische Oberkörper von K^o .

iii) $\widehat{res}^2 \circ \psi = \varphi \circ \widehat{res}^1$.

Denn sei $x \in \hat{K}^1$, o.E. $v^1(x) \geq o$ und

$x = c \cdot h(z_1)$ mit

$h \in K^o[X]$, $\underline{v}^o(h) = o$, $c \in K^o$,$\operatorname{grad} h < \operatorname{grad} f$.

f war das Minimalpolynom von x_1 über k^o. Daraus folgt

$res^1(h(z_1)) = res^1(h)(x_1) \neq o$,da $res^1(h) \neq o$,d.h.

$v^1(h(z_1)) = o$.

Also ist $v^1(c) \geq o$ und daher

$$\begin{aligned} res^2(\psi(h(z_1))) &= res^2(h(z_2)) = res^o(h)(x_2) = \\ &= \varphi(res^o(h))(\varphi(x_1)) = \\ &= \varphi(res^o(h)(x_1)) = \varphi(res^1(h(z_1))) \text{ .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res^2(\psi(x)) &= res^o(c) \cdot res^2(\psi(h(z_1))) = \\ &= \varphi(res^1(c)) \cdot \varphi(res^1(h(z_1))) = \\ &= \varphi(res^1(c) \cdot (res^1(h(z_1)))) = \\ &= \varphi(res^1(x)) \text{ .} \end{aligned}$$

Damit ist c) erledigt.

Da k^3 über k^o separabel erzeugt ist,gibt es eine

Limeszahl α , eine Folge $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ von Elementen aus k^3 und eine Folge $(k_\delta)_{\delta \leq \alpha}$ von Zwischen-körpern mit

$k_o = k^o$, $k_\alpha = k^3$,

$k_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} k_\beta$ falls δ Limeszahl ,

$k_{\delta+1} = k_\delta(a_\delta)$,

a_δ tranzendent oder separabel algebraisch über k_δ ,

Durch transfinite Rekursion konstruieren wir Zwischenkörper K^1_δ ,K^2_δ und K^o-Isomorphismen

$\psi_\delta : K^1_\delta \longrightarrow K^2_\delta$,derart daß

K^1_δ ,K^2_δ henselsch sind für $\delta > o$,

i) $\Gamma_\delta^1 = \Gamma_\delta^2 = \Gamma^o$

ii) $v^2_\delta \circ \psi_\delta = v^1_\delta$

iii) $res^2_\delta \circ \psi_\delta = \varphi \circ res^1_\delta$

iv) $k^1_\delta = k_\delta$

$K^1_\sigma \subset K^1_\tau$, $K^2_\delta \subset K^2_\tau$, $\psi_\delta \subset \psi_\tau$ für $\delta \leq \tau \leq \alpha$.

Denn setze $K^1_o = K^2_o = K^o$, $\psi_o = id_{K^o}$.

Ist δ Limeszahl, setze $\psi_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} \psi_\beta$, $K^i_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} K^i_\beta$, i=1,2 .

Ist a_δ transzendent über k_δ , konstruiere $K^1_{\delta+1}, K^2_{\delta+1}$ und $\psi_{\delta+1}$ wie in b) .

Ist a_δ separabel algebraisch über k_δ , konstriere $K^1_{\delta+1}, K^2_{\delta+1}$ und $\psi_{\delta+1}$ wie in c)

In beiden Fällen identifiziert man K^1_δ und K^2_δ vermöge ψ_δ und läßt sie die Rolle von K^o in b) bzw. c) spielen.

Um schließlich Satz 7 zu beweisen ,setzt man

$\hat{K}^1 := K^1_\alpha$, $\hat{K}^2 := K^2_\alpha$, $\psi := \psi_\alpha$.

Definition :

Sei K,v ein bewerteter Körper mit Wertgruppe Γ .

Eine Abbildung

$$\pi : \Gamma \to K$$

heißt Schnitt, wenn für alle $\alpha,\beta \in \Gamma$

i) $v(\pi(\alpha)) = \alpha$

ii) $\pi(\alpha)\cdot\pi(\beta) = \pi(\alpha+\beta)$.

Bemerkung:

Seien K^i bewertete Körper mit Wertgruppen Γ^i und Schnitten π^i (i=1,2) .Dann bedeutet $K^1 \subset K^2$,daß auch

$$\pi^2|_{\Gamma^1} = \pi^1 .$$

Satz 9

Seien $K^o,v^o \subset K^i,v^i$ (i=1,2) bewertete Körper mit Wertgruppen Γ^j , Schnitten π^j und Restklassenkörpern k^j (j=o,1,2). K^1 und K^2 seien henselsch. Weiter sei

$\Gamma^o \subset \Gamma^3 \subset \Gamma^1$ eine Zwischengruppe und

$\varphi : \Gamma^3 \to \Gamma^2$ eine isomorphe Einbettung,

die auf Γ^o identisch operiert .

Dann gibt es henselsche Zwischenkörper

$K^o \subset \hat{K}^i \subset K^i$ i=1,2 und einen K^o-Isomorphismus

$\psi : \hat{K}^1 \to \hat{K}^2$ mit

i) $\hat{k}^1 = \hat{k}^2 = k^o$

ii) $\hat{v}^2 \circ \psi = \varphi \circ \hat{v}^1$

iii) $\pi^2 \circ \varphi = \psi \circ \pi^1$ und $\pi^i(\hat{\Gamma}^i) \subset \hat{K}^i$ (i=1,2)

iv) $\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^3$

Bemerkung:

Aus i) und ii) folgt, wenn res^1 und res^2 die entsprechenden Restklassenabbildungen sind,wie beim Beweis von Satz 8

v) $res^2 \circ \psi = res^1$.

Beweis:

Setzt man $\hat{K}^1 = \hat{K}^2 = K^o$ und $\psi = id_{K^o}$,so sind die Bedingungen i)- iii) erfüllt.

Sei nun nach Zorns Lemma ein Isomorphismus

$$\psi : \hat{K}^1 \to \hat{K}^2$$

maximal mit den Eigenschaften i) - iii) und $\hat{\Gamma}^1 \subset \Gamma^3$ gewählt . Da beim Bilden der henselschen Hülle ψ fortgesetzt wird , und i) - iii) erhalten bleiben, sind $\hat{K}^1$ und $\hat{K}^2$ henselsch. Wir müssen also noch iv) zeigen:

Sei andernfalls

$$\alpha_1 \in \Gamma^3 \setminus \hat{\Gamma}^1 .$$

Dann treten zwei Fälle ein:

1.Fall

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n\alpha_1 \in \hat{\Gamma}^1 \to n = o .$$

Dann gilt dasselbe für $\alpha_2 := \varphi(\alpha_1)$ und $\hat{\Gamma}_2$.

Aus der Voraussetzung folgt für $x_i := \pi^i(\alpha_i)$

$v^i(a_j x_i^j) \neq v^i(a_k x_i^k)$,wenn

$j \neq k$, $a_j,a_k \in \hat{K}^i$, $a_j \neq o$, und daraus

für alle $a_o,..,a_n \in \hat{K}^i$

$$v^i\left(\sum_{j=o}^{n} a_j x_i^j\right) = \min_{j=o}^{n} \left(v^i(a_j) + j\cdot\alpha_i\right) \qquad (i=1,2).$$

Speziell sind also x_1 bzw. x_2 transzendent über $\hat{K}^1$ bzw. $\hat{K}^2$.

Setze $\tilde{K}^1 := \hat{K}^1(x_1)$, $\tilde{K}^2 := \hat{K}^2(\hat{x}_2)$ und sei

$$\tilde{\psi} : \tilde{K}^1 \to \tilde{K}^2$$

der Isomorphismus,der ψ fortsetzt und x_1 in x_2 abbildet.

Dann sind erfüllt:

ii) $\tilde{v}^2 \circ \tilde{\psi} = \varphi \circ \tilde{v}^1$.

Denn sei

$$\frac{a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n}{b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_1^n} = w \in \tilde{K}^1 , \qquad a_i, b_i \in \hat{K}^1 .$$

Dann ist

$$v^2(\tilde{\psi}(w)) = v^2\left(\frac{\psi(a_0) + \psi(a_1)x_2 + \dots + \psi(a_n)x_2^n}{\psi(b_0) + \psi(b_1)x_2 + \dots + \psi(b_n)x_2^n}\right) =$$

$$= \min_{i=0}^{n}(v^2(\psi(a_i)) + i\alpha_2) - \min_{i=0}^{n}(v^2(\psi(b_i)) + i\alpha_2) =$$

$$= \varphi\left(\min_{i=0}^{n}(v^1(a_i) + i\alpha_1) - \min_{i=0}^{n}(v^1(b_i) + i\alpha_1)\right) =$$

$$= \varphi(v^1(w)) .$$

iii) $\pi^i(\tilde{\Gamma}^i) \subset \tilde{K}^i$, $i=1,2$.

Denn aus dem Beweis von ii) sieht man, daß

$$\tilde{\Gamma}^i = \hat{\Gamma}^i + \langle \alpha_i \rangle ,$$

Wenn also

$$\beta + n\alpha_i \in \tilde{\Gamma}^i , \qquad \beta \in \hat{\Gamma}^i$$

ist, so folgt

$$\pi^i(\beta + n\alpha_i) = \pi^i(\beta)\cdot(x_i)^n \in \tilde{K}^i \quad , i=1,2 .$$

$\pi^2 \circ \varphi = \tilde{\psi} \circ \pi^1$ auf $\tilde{\Gamma}^1$.

Denn für $\beta + n\alpha_1 \in \tilde{\Gamma}^1, \beta \in \hat{\Gamma}^1$ ist

$$\pi^2(\varphi(\beta + n\alpha_1) = \pi^2(\varphi(\beta) + n\alpha_2) =$$

$$= \psi(\pi^1(\beta))\cdot x_2^n = \psi(\pi^1(\beta)\cdot x_1^n) =$$

$$= \psi(\pi^1(\beta + n\alpha_1)) .$$

i) $\tilde{k}^i = \hat{k}^i = k^0$, $i=1,2$.

Denn sei $i = 1$ oder 2 und

$$w = \frac{a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n}{b_0 + b_1x_i + \dots + a_nx_i^n} \in \tilde{K}^i$$

, und o.E $v^i(w) = 0$,

Dann folgt aus der Vorbemerkung, daß es ein $j \leq n$ gibt mit

$$v^i(a_j) = v^i(b_j) , \quad v^i(a_jx_i^j) = v^i(b_jx_i^j)$$

und für alle $r \neq j$

$$v^i(a_rx_i^r) > v^i(a_jx_i^j) \quad \text{und} \quad v^i(b_rx_i^r) > v^i(b_jx_i^j) .$$

Setze

$$c := \frac{a_j}{b_j} \in \hat{K}^i .$$

Dann ist

$$v^i(w - c) = v^i\left(\frac{(a_0 - cb_0) + (a_1 - cb_1)x_i + \dots + (a_n - cb_n)x_i^n}{b_0 + b_1x_i + \dots + b_nx_i^n}\right) =$$

$$= \min_{k \neq j}(v^i(a_k - cb_k) + k\alpha_i) - v^i(b_jx_i^j) \geq$$

$$\geq \min_{k \neq j}(\min\{v^i(a_kx_i^k), v^i(b_kx_i^k)\}) - v^i(b_jx_i^j) > 0$$

Also ist

$$\mathrm{res}^i(w) = \mathrm{res}^i(c) \in \hat{k}^i = k^0 .$$

$\tilde{\psi}$ setzt also ψ mit den Eigenschaften i) - iii) fort. Das widerspricht der maximalen Wahl von ψ .

2.Fall

Sei n die kleinste positive ganze Zahl mit $n\alpha_1 \in \hat{\Gamma}^1$.

Dann ist n auch die kleinste positive Zahl mit

$$n\alpha_2 \in \hat{\Gamma}^2 \quad \text{für} \quad \alpha_2 := \varphi(\alpha_1) .$$

Setze $\tilde{K}^1 := \hat{K}^1(\pi^1(\alpha_1))$ und $\tilde{K}^2 := \hat{K}^2(\pi^2(\alpha_2))$.

Nun ist aber

$$(\pi^i(\alpha_i))^n = \pi^i(n\alpha_i) \in \hat{K}^i \quad \text{also}$$

$$(\tilde{K}^i : \hat{K}^i) \leq n \qquad i=1,2 .$$

Andererseits ist wegen der Wahl von n

$$(\tilde{\Gamma}^i : \hat{\Gamma}^i) \geq (\hat{\Gamma}^i + \langle \alpha_i \rangle : \hat{\Gamma}^i) = n \qquad i=1,2 .$$

Aus der Gradungleichung folgt also

$$(\tilde{K}^i : \hat{K}^i) = n \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma}^i = \hat{\Gamma}^i + \langle \alpha_i \rangle \qquad i=1,2.$$

Weiter muß

$x^n - \pi^i(n\alpha_i)$

das Minimalpolynom von $\pi^i(\alpha_i)$ über $\hat{K}^i$ sein, i=1,2 .

Da

$$\psi(x^n - \pi^1(n\alpha_1)) = x^n - \pi^2(n\alpha_2)$$

läßt sich ψ vermöge

$$\tilde{\psi}(\pi^1(\alpha_1)) := \pi^2(\alpha_2)$$

zu einem Isomorphismus

$$\tilde{\psi} : \tilde{K}^1 \longrightarrow \tilde{K}^2 \qquad \text{fortsetzen.}$$

Es gilt dann

i) $\bar{\tilde{K}}^i = \bar{\hat{K}}^i = \bar{K}^o$ und $\tilde{\Gamma}^1 = \hat{\Gamma}^1 + \langle\alpha_1\rangle \subset \Gamma^3$, i=1,2

wegen der Gradungleichung,

ii) $\tilde{v}^2 \circ \tilde{\psi} = \psi_o \tilde{v}^1$

weil sich die $\hat{v}^i$ auf die algebraischen Oberkörper $\tilde{K}^i$ der henselschen Körper $\hat{K}^i$ (i=1,2) eindeutig fortsetzen.

iii) Sei $\beta + k\alpha_i \in \tilde{\Gamma}^i$, $\beta \in \Gamma^i$, dann ist

$$\pi^i(\beta + k\alpha_i) = \pi^i(\beta)\pi^i(\alpha_i)^k \in \tilde{K}^i \qquad \text{d.h.}$$

$$\pi^i(\tilde{\Gamma}^i) \subset \tilde{K}^i \qquad (i=1,2) \qquad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\pi^2(\varphi(\beta + k\alpha_1)) &= \psi(\pi^1(\beta))\cdot(\pi^2(\alpha_2))^k = \\ &= \tilde{\psi}(\pi^1(\beta)\cdot(\pi^1(\alpha_1))^k) = \\ &= \tilde{\psi}(\pi^1(\beta + k\alpha_1)) \quad .\end{aligned}$$

Also setzt $\tilde{\psi}$ ψ mit den Eigenschaften i) - iii) fort. Das widerspricht der maximalen Wahl von ψ .

$\hat{K}^1, \hat{K}^2$ und ψ haben also wie gewünscht die Eigenschaften i) - iv) . qed.

Definition:

Sei $(K, \Gamma, R_1, R_2, ..)$ ein bewerteter Körper der Charakteristik o mit Wertgruppe Γ ,Restklassenringen R_n und Schnitt π . Wir führen dann in der Struktur $(\Gamma, R_1, R_2, ..)$ neue Funktionen $\pi_n : \Gamma \longrightarrow R_n$ ein vermöge $\pi_n := res_n \circ \pi$.

Eine S-isomorphe Einbettung

$$\varphi = (\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, ..) : (\Gamma^1, R_1^1, R_2^1, ..) \longrightarrow (\Gamma^2, R_1^2, R_2^2, ..)$$

heißt dann $S(\pi)$-isomorph,wenn

$$\varphi_n \circ \pi_n^1 = \pi_n^2 \circ \varphi_o \quad .$$

Sei $\psi = (\psi_K, \psi_\Gamma) : (K^1, \Gamma^1) \longrightarrow (K^2, \Gamma^2)$

eine schnittverträgliche isomorphe Einbettung der Körper K^i mit Schnitten π^i, d.h. $\pi^2 \circ \psi_\Gamma = \psi_K \circ \pi^1$ .Dann ist

$\psi|(\Gamma^1, R_1^1, R_2^1, ..)$ eine $S(\pi)$-isomorphe Einbettung von $(\Gamma^1, R_1^1, R_2^1, ..)$ in $(\Gamma^2, R_1^2, R_2^2, ..)$.

Satz 1o

Seien $(K^o, \Gamma^o) \subset (K^i, \Gamma^i)$ bewertete Körper der Charakteristik o mit Schnitt , i=1,2 . K^1 und K^2 seien S-henselsch.

$$\varphi : (\Gamma^1, R_1^1, R_2^1, ..) \longrightarrow (\Gamma^2, R_1^2, R_2^2, ..)$$

sei eine $S(\pi)$-isomorphe Einbettung,die $(\Gamma^o, R_1^o, R_2^o, ..)$ elementweise festläßt.

Dann gibt es S-henselsche Zwischenkörper

$(K^o, \Gamma^o) \subset (\hat{K}^i, \hat{\Gamma}^i) \subset (K^i, \Gamma^i)$ (i=1,2) mit

$\hat{\Gamma}^1 = \Gamma^1$, $\pi^i(\hat{\Gamma}^i) \subset \hat{K}^i$ (i=1,2) und

einen (K^o, Γ^o) - Isomorphismus

$\psi : (\hat{K}^1, \hat{\Gamma}^1) \longrightarrow (\hat{K}^2, \hat{\Gamma}^2)$,der schnittverträglich ist,

mit $\psi|(\hat{\Gamma}^1, \hat{R}_1^1, \hat{R}_2^1, ..) = \varphi|(\hat{\Gamma}^1, \hat{R}_1^1, \hat{R}_2^1, ..)$

Beweis:

Nach Zorns Lemma existiert ein maximaler schnittverträglicher (K^o, Γ^o) - Isomorphismus zwischen Zwischenkörpern

$$\psi : (\hat{K}^1, \hat{\Gamma}^1) \longrightarrow (\hat{K}^2, \hat{\Gamma}^2)$$

der $\pi^i(\hat\Gamma^i) \subset \hat K^i$ (i=1,2) und

$$\Psi|_{(\hat\Gamma^1,\hat R^1_1,\hat R^1_2,\dots)} = \varphi|_{(\hat\Gamma^1,\hat R^1_1,\hat R^1_2,\dots)}$$

erfüllt.

Dann sind $\hat K^1$ und $\hat K^2$ S-henselsch.

Denn nach Satz 5 erhalten wir eine Fortsetzung $\tilde\Psi$ von Ψ auf die S-henselschen Hüllen der $\hat K^i$

$$K^o \subset \hat K^i \subset \tilde K^i \subset K^i \qquad i=1,2$$

$$\tilde\Psi : \tilde K^1 \longrightarrow \tilde K^2 \quad \text{,die}$$

$$\tilde v^2 \circ \tilde\Psi = \varphi_o \circ v^1 \quad \text{erfüllt.}$$

Wegen $\hat\Gamma^i = \tilde\Gamma^i$ (i=1,2) ist mit Ψ auch $\tilde\Psi$ schnittverträglich. Um

$$\tilde\Psi|_{(\tilde\Gamma^1,\tilde R^1_1,\tilde R^1_2,\dots)} = \varphi|_{(\tilde\Gamma^1,\tilde R^1_1,\tilde R^1_2,\dots)}$$

zu zeigen, muß man noch für alle $n \neq o$

$$\widetilde{res}^2_n \circ \tilde\Psi = \varphi_n \, \widetilde{res}^1_n \quad \text{zeigen.}$$

Sei also $x \in \tilde K^1$ und o.E. $v^1(x) \geq o$.

Da für alle $n \neq o$ $\hat R^1_n = \tilde R^1_n$ ist, gibt es ein $y \in \hat K^1$ mit
$v^1(x - y) > v^1(n)$.

Also ist auch
$v^2(\tilde\Psi(x) - \tilde\Psi(y)) > v^2(n)$ und

$$res^2_n(\tilde\Psi(x)) = res^2_n(\tilde\Psi(y)) = \varphi_n(res^1_n(y)) = \varphi_n(res^1_n(x)).$$

Wir haben also im Widerspruch zur Maximalität Ψ mit allen Eigenschaften fortgesetzt. $\hat K^1$ und $\hat K^2$ sind S-henselsch.

Zum Beweis von Satz lo muß also noch $\hat\Gamma^1 = \Gamma^1$ gezeigt werden.

Sei andernfalls $\hat\Gamma^1 \neq \Gamma^1$.

Wir werden dann Zwischenkörper $\hat K^i \subsetneq \tilde K^i \subset K^i$ (i=1,2) und eine Fortsetzung von Ψ

$$\tilde\Psi : \tilde K^1 \longrightarrow \tilde K^2$$

konstruieren mit

i) $\pi^i(\tilde\Gamma^i) \subset \tilde K^i$ und $\tilde\Psi \circ \pi^1 = \pi^2 \circ \varphi_o$ auf $\tilde\Gamma^1$, i=1,2,

ii) $\widetilde{res}^2_n \circ \tilde\Psi = \varphi_n \circ res^1_n$

iii) $\tilde v^2 \circ \tilde\Psi = \varphi_o \circ \tilde v^1$.

Aus i) - iii) folgt dann im Widerspruch zur Maximalität von Ψ

$$\tilde\Psi|_{(\tilde\Gamma^1,\tilde R^1_1,\tilde R^1_2,\dots)} = \varphi|_{(\tilde\Gamma^1,\tilde R^1_1,\tilde R^1_2,\dots)}.$$

Es können nun drei Fälle auftreten:

1.Fall

Es gibt ein $\alpha_1 \in \Gamma^1 \setminus \hat\Gamma^1$, ein $\beta \in \hat\Gamma^1$ und ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß $o \leq \beta + \alpha_1 \leq v^1(m) < \infty$
und für alle $n \neq o$
$n\alpha_1 \notin \hat\Gamma^1$.

Definiere $\alpha_2 = \varphi_o(\alpha_1)$, $\tilde K^i = \hat K^i(\pi^i(\alpha_i))$ i=1,2.

Die $\pi^i(\alpha_i)$ sind transzendent über $\hat K^i$ und wie im ersten Fall des Beweises von Satz 9 haben wir

$$\tilde\Psi : \tilde K^1 \longrightarrow \tilde K^2 \quad \text{, Fortsetzung von } \Psi \text{,}$$

vermöge $\tilde\Psi(\pi^1(\alpha_1)) = \pi^2(\alpha_2)$, wo i) und iii) erfüllt sind.

Es bleibt noch ii) nachzuweisen.

Sei also $x \in \tilde K^1$ und o.E. $o \leq v^1(x) \leq v^1(n)$

$$x = \frac{a_o + a_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + a_k(\pi^1(\alpha_1))^k}{b_o + b_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + b_k(\pi^1(\alpha_1))^k}.$$

Wie beim Beweis von Satz 9 finden wir $r,s \leq k$, sodaß

$v^1(a_r(\pi^1(\alpha_1))^r) < v^1(a_j(\pi^1(\alpha_1))^j)$ für alle $j \neq r$ und

$v^1(b_s(\pi^1(\alpha_1))^s) < v^1(b_j(\pi^1(\alpha_1))^j)$ für alle $j \neq s$.

Wir wählen nun ein $c \in \hat K^1$ mit $v^1(c) = s \cdot \beta$ und setzen

$d_j := a_j \cdot \frac{c}{b_s}$, $e_j := b_j \cdot \frac{c}{b_s}$ für alle $j \leq k$.

Dann ist

$$x = \frac{d_0 + d_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + d\ (\pi^1(\alpha_1))^k}{e_0 + e_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + e\ (\pi^1(\alpha_1))^k} \quad \text{und}$$

$$v^1(e_0 + e_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + e_k(\pi^1(\alpha_1))^k) = v^1(e_s(\pi^1(\alpha_1))^s) =$$

$$= v^1(c) + s \cdot \alpha_1 = s \cdot (\beta + \alpha_1) \qquad \text{d.h.}$$

$$0 \leq v^1(e_0 + e_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + e_k(\pi^1(\alpha_1))^k) \leq v^1(m^s) \quad .$$

Daraus folgt wegen $v^1(x) \leq v^1(n)$

$$v^1(d_0 + d_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + d_k(\pi^1(\alpha_1))^k) \leq v^1(n \cdot m^s) \quad .$$

Weiter gilt wegen $0 \leq v^1(x)$ für alle $j \leq k$

$$0 \leq v^1(e_s(\pi^1(\alpha_1))^s) \leq v^1(d_r(\pi^1(\alpha_1))^r) \leq v^1(d_j(\pi^1(\alpha_1))^j) ,$$

und natürlich

$$0 \leq v\ (e_s(\pi^1(\alpha_1))^s) \leq v^1(e_j(\pi^1(\alpha_1))^j) \quad .$$

Zwischenbemerkung:

Für alle $a \in \hat{K}^1$, $t \neq 0$, $\alpha \in \Gamma^1$, $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$res_t^2(\psi(a) \cdot (\pi^2(\varphi_0(\alpha)))^i) = \varphi_t(res_t^1(a \cdot (\pi^1(\alpha))^i)) \quad .$$

Denn

$$res_t^2(\psi(a) \cdot (\pi^2(\varphi_0(\alpha)))^i) = res_t^2\left(\frac{\psi(a)}{\pi^2(v^2(\psi(a)))} \cdot \pi^2(i \cdot \varphi_0(\alpha) - v^2(\psi(a)))\right) =$$

$$= res_t^2\left(\frac{\psi(a)}{\pi^2(\varphi_0(v^1(a)))}\right) \cdot \pi_t^2(\varphi_0(i \cdot \alpha - v^1(a))) =$$

$$= res_t^2\left(\psi\left(\frac{a}{\pi^1(v^1(a))}\right)\right) \cdot \varphi_t(\pi_t^1(i \cdot \alpha - v^1(a))) =$$

$$= \varphi_t\left(res_t^1\left(\frac{a}{\pi^1(v^1(a))}\right) \cdot res_t^1(\pi^1(i \cdot \alpha - v^1(a))) \right) =$$

$$= \varphi_t\left(res_t^1\left(\frac{a}{\pi^1(v^1(a))} \cdot \pi^1(i \cdot \alpha - v^1(a)) \right)\right) =$$

$$= \varphi_t(res_t^1(a \cdot (\pi^1(\alpha))^i)) \quad , \qquad \text{qed.}$$

Und nun weiter in der Behandlung des ersten Falls.

Setze $t := n^2 m^{2s}$. Dann folgt, weil nach dem Vorangehenden alle Summanden einen Wert ≥ 0 haben, aus der Zwischenbemerkung

$$res_t^2(\tilde{\psi}(d_0 + d_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + d_k(\pi^1(\alpha_1))^k)) =$$

$$\varphi_t(res_t^1(d_0 + d_1(\pi^1(\alpha_1)) + ... + d_k(\pi^1(\alpha_1))^k))$$

und

$$res_t^2(\tilde{\psi}(e_0 + e_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + e_k(\pi^1(\alpha_1))^k)) =$$

$$\varphi_t(res_t^1(e_0 + e_1(\pi^1(\alpha_1)) + .. + e_k(\pi^1(\alpha_1))^k)) \quad .$$

Also ist

$$0 = res_t^2(\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \cdot \varphi_t(res_t^1(\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) -$$

$$- \varphi_t(res_t^1(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \cdot res_t^2(\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) =$$

$$= \left(res_t^2\left(\frac{\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)}{\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i)}\right) - \varphi_t\left(res_t^1\left(\frac{(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)}{\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i}\right)\right) \right) \cdot$$

$$\cdot \varphi_t(res_t^1(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \cdot res_t^2(\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \quad .$$

Da aber

$$0 \leq v_t^2(\varphi_t(res_t^1(\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \cdot res^2(\tilde{\psi}(\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) \leq v^1(nm^s) + v^1($$

ist, folgt

$$v_t^2\left(res_t^2\left(\tilde{\psi}\left(\frac{\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i}{\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i}\right)\right) - \varphi_t\left(res_t^1\left(\frac{\sum_{i=0}^k d_i(\pi^1(\alpha_1))^i}{\sum_{i=0}^k e_i(\pi^1(\alpha_1))^i}\right)\right)\right) > v^1(n) \quad .$$

d.h.

$$0 = res^2\ {}^{t}_{n}\ (res_t^2(\tilde{\psi}(x)) - \varphi_t(res_t^1(x))) =$$

$$= res_n^2(\tilde{\psi}(x)) - \varphi_n(res_n^1(x)) \quad .$$

Damit ist ii) nachgewiesen und der 1.Fall erledigt.

2.Fall

Für alle $\alpha_1 \in \Gamma^1 \setminus \hat{\Gamma}^1$, $\beta \in \hat{\Gamma}^1$ und $n \neq o \in N$ ist

$$\beta + \alpha_1 \notin \{ x \in \Gamma^1 \mid o \leq x \leq v^1(n) \}$$

und

$$n\alpha_1 \notin \hat{\Gamma}^1 .$$

Wir wählen ein $\alpha_1 \in \Gamma^1 \setminus \hat{\Gamma}^1$ und definieren $\alpha_2, \tilde{K}^1, \tilde{K}^2$ und $\tilde{\varphi}$ wie im 1.Fall. Dann gelten wieder i) und iii). Wir zeigen noch ii).

Sei also $x \in \tilde{K}^1$ und o.E. $o \leq v^1(x) \leq v^1(n)$

$$x = \frac{a_o + a_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + a_k(\pi^1(\alpha_1))^k}{b_o + b_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + b_k(\pi^1(\alpha_1))^k} .$$

Seien $r,s \leq k$ wie im 1.Fall. Dann ist

$$o \leq v^1(x) = v^1\left(\frac{a_r}{b_s}\right) + (r-s)\alpha_1 \leq v^1(n) .$$

Weil aber $v^1\left(\frac{a_r}{b_s}\right) \in \hat{\Gamma}^1$, folgt aus der Voraussetzung $(r-s)\alpha_1 \in \hat{\Gamma}^1$, d.h. $r=s$ und daher $v^1\left(\frac{a_r}{b_s}\right) \geq o$.

Sei $\left(x - \frac{a_r}{b_s}\right) = \frac{c_o + c_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + c_k(\pi^1(\alpha_1))^k}{b_o + b_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + b_k(\pi^1(\alpha_1))^k}$

und sei im Zähler $c_t(\pi^1(\alpha_1))^t$ das Monom mit minimalen Wert.

Da $c_r = o$ ist, ist also $t \neq r$. Aus

$$o \leq v^1\left(x - \frac{a_r}{b_s}\right) = v^1\left(\frac{c_t}{b_s}\right) + (t-r)\alpha_1$$

folgt wegen der Voraussetzung speziell

$$v^1\left(x - \frac{a_r}{b_s}\right) > v^1(n) .$$

Also ist

$$res_n^2(\tilde{\varphi}(x)) = res_n^2\left(\varphi\left(\frac{a_r}{b_s}\right)\right) = \varphi_n\left(res_n^1\left(\frac{a_r}{b_s}\right)\right) = \varphi_n(res_n^1(x)) .$$

ii) ist also gezeigt und Fall 2 damit abgehandelt.

3.Fall

Es gibt ein $\alpha_1 \in \Gamma^1 \setminus \hat{\Gamma}^1$ und ein $n \neq o$ mit $n\alpha_1 \in \hat{\Gamma}^1$.

Sei n die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft. Setze

$$\alpha_2 := \varphi_o(\alpha_1) \quad , \quad \tilde{K}^1 := \hat{K}^1(\pi^1(\alpha_1)) \quad , \quad \tilde{K}^2 := \hat{K}^2(\pi^2(\alpha_2)).$$

Wie im 2.Fall des Beweises von Satz 9 schließt man, daß die $\pi^i(\alpha_i)$ algebraisch vom Grad n über den $\hat{K}^i$ $(i=1,2)$ sind und eine Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : \tilde{K}^1 \longrightarrow \tilde{K}^2$$

von φ vermöge $\tilde{\varphi}(\pi^1(\alpha_1)) = \pi^2(\alpha_2)$ existiert, die i) und iii) erfüllt.

Es bleibt noch ii) zu zeigen.

Sei also $x \in \tilde{K}^1$ und o.E. $v^1(x) \geq o$

$$x = a_o + a_1(\pi^1(\alpha_1)) + \dots + a_{n-1}(\pi^1(\alpha_1))^{n-1} \in \tilde{K}^1 \quad , \quad a_i \in \hat{K}^1 .$$

Alle Monome $\neq o$ haben verschiedene Werte, denn sei

$$o \leq r < s \leq n-1 \quad \text{und} \quad v^1(a_r(\pi^1(\alpha_1))^r) = v^1(a_s(\pi^1(\alpha_1))^s) .$$

Dann folgt

$$(s-r)\alpha_1 = v^1\left(\frac{a_r}{a_s}\right) \in \hat{\Gamma}^1 .$$

Das steht wegen $s-r \leq n-1$ im Widerspruch zur Wahl von n .

Wir haben also für alle j

$$o \leq v^1(x) = \min_{i=o}^{n-1}\left(v^1(a_i(\pi^1(\alpha_1))^i)\right) = v^1(a_j(\pi^1(\alpha_1))^j) .$$

Daraus folgt

$$res_n^2(\tilde{\varphi}(x)) = \sum_{i=o}^{n-1} res_n^2(\tilde{\varphi}(a_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) =$$

– wegen der letzten Zwischenbemerkung –

$$= \sum_{i=o}^{n-1} \varphi_n(\mathrm{res}^1(a_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) = \varphi_n(\mathrm{res}_n^1(\sum_{i=o}^{n-1} a_i(\pi^1(\alpha_1))^i)) =$$

$$= \varphi_n(\mathrm{res}_n^1(x)) \text{ .}$$

Damit ist ii) nachgewiesen und der dritte Fall erledigt. Da die drei Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen,ist Satz lo bewiesen.

Definition:

Sei K,v ein bewerteter Körper mit Restklassenkörper k.Dann

i) (Kaplansky)
erfüllt K,v die Bedingung A , wenn entweder k die Charakteristik o hat oder, wenn k die Charakteristik p hat, die Wertgruppe durch p teilbar ist und in k jedes nichtkonstante Polynom der Form

$$\sum_{i=o}^{n} a_i X^{p^i} + b$$

eine Nullstelle besitzt.

ii)
heißt K,v algebraisch maximal,wenn K,v keine echten, algebraischen,unmittelbaren Erweiterungen hat.

Satz 11

$(K^1,\Gamma^1) \subset (K^2,\Gamma^2)$ seien bewertete Körper, κ eine Kardinalzahl.
K^2 sei algebraisch maximal, κ-pseudovollständig und erfülle Bedingung A .
K^1 sei in K^2 relativ maximal und card $\Gamma^1 \leq \kappa$.

Dann ist K^1 maximal.

Beweis:

In [6] wurde implizit bewiesen :

Seien $F_1 \subset F_2$ bewertete Körper und erfülle F_2 die Bedingung A .Weiter möge jede PCF vom algebraischen Typ aus F_2 in F_2 konvergieren.

Dann konvergiert jede PCF aus F_1 mit einem Minimalpolynom
$q \in F_1[X]$
gegen eine Nullstelle von q in F_2 .

Wir zeigen nun, daß jede PCF $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ aus K^1 in K^1 konvergiert.

1.Fall: $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ ist vom transzendenten Typ.

Dann ist $|\beta| \leq \kappa$ .Also konvergiert $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ gegen ein $b \in K^2$. Nach [6] ist dann $K^1(b)$ unmittelbare Erweiterung K^1 .Also ist $b \in K^1$.

2.Fall : $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ ist vom algebraischen Typ.

Da K^2 algebraisch maximal ist , konvergieren alle PCF vom algebraischen Typ in K^2. Also konvergiert nach der vorangehenden Bemerkung $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ gegen die Nullstelle b eines Minimalpolynoms. Nach [6] ist dann $K^1(b)$ unmittelbare Erweiterung von K^1. Also ist $b \in K^1$. qed.

Satz 12

Sei K ein bewerter Körper , κ eine Kardinalzahl.
Dann gibt es einen κ-vollständigen Ultralimes von K.

Beweis:

i) Für jedes β, card $\beta \leq \kappa$, gibt es eine Ultrapotenz K^β von K , in der alle PCF $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ aus K konvergieren.

Denn sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf β ,der die Mengen $U_\delta := \{\tau \in \beta \mid \delta \leq \tau\}$ für $\delta < \beta$ enthält.
$K^\beta := K^\beta/_{\mathfrak{U}}$ leistet dann das verlangte. Denn jede PCF $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ konvergiert in K gegen $(a_\delta)_{\delta\in\beta}/_{\mathfrak{U}}$.

ii) Es gibt einen Ultralimes $\hat{K}$ von K , in dem jede PCF $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ mit card $\beta \leq \kappa$ aus K konvergiert.

Denn definiere rekursiv:

$K_0 := K$, $K_\delta := \left(\bigcup_{\beta<\delta} K_\beta\right)^\delta$.

K_{κ^+} hat dann die gewünschte Eigenschaft, denn jede PCF $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ konvergiert in K_β .

iii) Definiere rekursiv:

$\tilde{K}_0 := K$, $\tilde{K}_\delta := \widehat{\left(\bigcup_{\beta<\delta} \tilde{K}_\beta\right)}$, und $\check{K} := \bigcup_{\beta<\kappa^+} \tilde{K}_\beta$.

Dann hat $\check{K}$ die gewünschten Eigenschaften.
Denn sei $(a_\delta)_{\delta<\beta}$ eine PCF aus $\check{K}$ mit card $\beta \leq \kappa$.
Sei $a_\delta \in K_{\tau_\delta}$ mit $\tau_\delta < \kappa^+$. Dann ist

card $\tau_\delta \leq$ card $\kappa <$ card κ^+ .

Sei $\gamma := \sup_{\delta<\beta} \tau_\delta = \bigcup_{\delta<\beta} \tau_\delta \leq \kappa^+$. Dann ist

card $\gamma \leq$ card $\beta \cdot$ card $\kappa = \kappa < \kappa^+$. Also ist $\gamma < \kappa^+$, d.h.
$(a_\delta)_{\delta<\beta}$ ist eine PCF aus $\tilde{K}_\gamma$ und konvergiert in
$\hat{K}_\gamma = K_{\gamma+1} \subset \check{K}$. qed.

Bemerkung:

Wir haben sogar stärker bewiesen:

Zu jeder Kardinalzahl κ gibt es ein Ultralimessystem

$(I_\alpha, \mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha<\beta}$, sodaß für jeden

bewerteten Körper K

$\lim_{\alpha\to\beta} K^{I_\alpha}/\mathfrak{U}_\alpha$ κ-pseudovollständig ist.

Satz 13

Jeder Körper der Charakteristik 0 besitzt einen S-unmittelbaren, S-maximalen Oberkörper.

Beweis: Denn sei (K,Γ) solch ein Körper und card $\Gamma = \kappa$. Nach Satz 12 gibt es einen κ-vollständigen Ultralimes $(K^1,..)$ der S-henselschen Hülle von K . Sei (K^2,Γ) S-unmittelbarer in K^1 relativ S-maximaler Oberkörper von K. Da K^1 S-henselsch ist, ist nach Satz 5 auch K^2 S-henselsch, also konvergieren alle

S-PCF aus K^2 vom algebraischen Typ.
Sei $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine S-PCF vom transzendenten Typ. Dann folgt zunächst $\alpha \leq \kappa$. Also besitzt $(a_\delta)_{\delta<\alpha}$ einen Limes $b \in K^1$. Nach Satz 3 iii und [6] ist $K^2(b)$ S-unmittelbare Erweiterung von K^2. Also ist $b \in K^2$.

In K^2 konvergieren also alle S-PCF . Aus Satz I 3 folgt also wie gewünscht die S-Maximalität von K^2.