Ein stabiles Modell mit der finite cover property aber ohne Vaughtsche Paare

Martin Ziegler

1)

Es ist leicht zu sehen, daß jede stabile Theorie mit der fcp ein Vaughtsches Paar in T^{eq} hat. Hrushovski hat gezeigt, daß jede superstabile Theorie mit der fcp ein "richtiges" Vaughtsches Paar hat. Ausgangspunkt des hier konstruierten Modells ist ein Modell N von Rothmaler, das kein Vaughtsches Paar hat, während N^{eq} ein Vaughtsches Paar hat. Elisabeth Bouscaren ist für die Frage zu danken.

2) Rothmalers Modell

Für eine Primzahl p sei $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach (p) und für jede natürliche Zahl i sei N_i eine Kopie von $\mathbb{Z}_{(p)}$. Rothmalers Modell ist die abelsche Gruppe

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i \, .$$

<u>Lemma</u> 1

N ist stabil, hat ein Vaughtsches Paar in N^{eq}, aber nicht in N.

Beweis:

N ist stabil (und hat nicht die fcp !) wie jede abelsche Gruppe.

N/pN ist in N^{eq} definierbar und vergrößert sich nicht bei der elementaren Erweiterung $N \prec N \oplus \mathbb{Q}$. Also haben wir ein Vaughtsches Paar in N^{eq}.

Andererseits gibt es in N kein Vaughtsches Paar. Denn jede unendlic definierbare Teilmenge X von N enthält eine Nebenklasse einer Gruppe $p^n N$. Wenn N' nun eine echte elementare Erweiterung von N ist, so wird auch $p^n N'$ echt größer, denn $x \longmapsto p^n x$ definiert eine Bijektion zwischen N und $p^n N$. Also ist auch X' echt größer als X. (Das gleiche Argument gilt auch für jede zu N elementar äquivalente Gruppe). $\square$

Wir machen nun N und $V = N/pN$ zu einer zweisortigen Struktur

$$(N;V) \quad ,$$

indem wir die Projektion von N auf V auszeichnen und V die natürliche Struktur als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum aufprägen. Es ist klar, daß $(N;V)$ in N^{eq} definierbar ist. $(N;V)$ ist also stabil und hat kein Vaughtsches Paar der ersten Sorte.

Lemma 2
Jede in $(N;V)$ o-definierbare Relation auf V ist schon in V allein definierbar.

Beweis:
Weil V $\aleph_0$-kategorisch ist, genügt es zu zeigen, daß sich jeder endliche partielle Automorphismus von V zu einem Automorphismus von $(N;V)$ fortsetzen läßt. Sei

$$V_i = N_i/pN_i \quad \text{und} \quad V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i \ .$$

Dann läßt sich jeder endliche partielle Automorphismus von V zu einem Automorphismus von V fortsetzen, der für genügend großes n

$$V_o + V_1 + \ldots + V_n$$

in sich abbildet und die Elemente von

$$V_{n+1} + V_{n+2} + \ldots .$$

fixiert. Ein solcher Automorphismus läßt sich aber immer zu einem Automorphismus von N liften, der

$$N_1 + N_1 + \ldots + N_n$$

in sich abbildet und auf

$$N_{n+1} + N_{n+2} + \ldots .$$

identisch operiert. $\square$

Lemma 3
$(N^1;V^1) \prec (N^2;V^2)$ sei eine elementare Erweiterung von Modellen, die zu $(N;V)$ elementar äquivalent sind. Dann ist $N^1 \cup V^2$ algebraisch abgeschlossen in $N^2 \cup V^2$.

Beweis:

Sei a algebraisch über $N^1 \cup \{\bar{b}\}$ $(\bar{b} \in V^2)$. Weil V streng minimal ist (in sich - also wegen Stabilität und Lemma 2 auch in $(N;V)$), hat $tp(\bar{b}/N^1)$ einen Morleyrang. Also hat auch $tp(a/N^1)$ Morleyrang. In N^1 haben aber nur algebraische Typen Morleyrang (siehe Beweis von Lemma 1). Also ist a in N^1. □

2) Das Modell

Wir zerlegen N in Mengen I_n der Mächtigkeit n $(n > o)$. Setze

$$P = \bigcup_{n > o} \Big(\bigoplus_{i \in I_n} N_i + pN \Big) .$$

Unser Modell ist

$$N^* = (N, P) .$$

<u>Satz</u> 1

N^* ist stabil, hat die fcp, aber kein Vaughtsches Paar.

Beweis:

Wir haben zu zeigen, daß

$$(N^*;V)$$

stabil ist, die fcp hat, aber kein Vaughtsches Paar in der ersten Sorte. Sei

$$Q = \bigcup_{n > o} \Big(\bigoplus_{i \in I_n} V_i \Big) \qquad \text{und} \qquad V^* = (V,Q) .$$

Es ist klar, daß $(N;V^*)$ und $(N^*;V)$ interdefinierbar sind. Es genügt also, die gewünschten Eigenschaften für $(N;V^*)$ zu verifizieren.

Daß $(N;V^*)$ die fcp hat, folgt daraus daß V^* die fcp hat:

<u>Lemma</u> 4

i) V^* hat die fcp

ii) V^* ist ω-stabil .

Beweis:
a)
Sei $v \neq o$ ein Element von V_i. Dann ist V_i in V^* aus v definierbar:

$$V_i = \{ w \in V \mid w \in Q \ \& \ v + w \in Q \}$$

Da also die V_i uniform definierbar sind und beliebig große unendliche Mächtigkeit haben, hat V die fcp.

b)
Die Überlegung in a) zeigt, daß die Modelle von $Th(V^*)$ die Form

(W,R) haben ,

wobei W ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist und R die Vereinigung von unabhängigen Unterräumen

$$A_n \quad (n > o) \quad , \quad B_j \quad (j \in J) \quad ,$$

wobei A_n die Dimension n hat und die B_j unendlichdimensional sind. Ebenso leicht lassen sich elementare Erweiterungen bestimmen und Typen zählen. □

Satz 1 folgt nun aus den zwei Sätzen des nächsten Abschitts.

3) Über stabile zweisortige Modelle

Sei $(A;B)$ eine stabile zweisortige Struktur. B sei unendlich. Variable x... laufen über die erste, y.... über die zweite Sorte

<u>Lemma</u> 4

Jede Formel $\varphi(x,y)$ ist in $(A;B)$ äquivalent zu einer Formel

$$\psi(f(x),y) \ ,$$

wobei f eine o-definierbare Funktion von A nach B^{eq} ist.

Beweis:
Weil $(A;B)$ stabil ist, ist jede Formel $\varphi(a,y)$ zu einer Formel $\chi(\bar{b},y)$ für ein $\bar{b} \in B$ äquivalent. Ein Kompaktheitsargument zeigt, daß wir χ unabhängig von a wählen können. $f(a)$ sei nun der kanonische Parameter von $\chi(\bar{b},y)$ in B^{eq}. □

<u>Lemma</u> 5 (Trennung der Variablen)
Zu jeder definierbaren Funktion $f:A\times A \longrightarrow B$ und jedem Typ $p(x)$ aus $S(A;B)$ gibt es definierbare Funktionen

$$h_1:A\rightarrow B^{eq} \quad , \quad h_2:A\longrightarrow B^{eq} \quad , \quad h_3:B^{eq}\longrightarrow B \quad ,$$

sodaß

$$f(a_1,a_2) = h_3(h_1(a_1),h_2(a_2))$$

für alle a_2 aus A und alle Realisierungen a_1 von p in elementaren Erweiterungen von (A;B). (h_3 ist nur partiell, aber o-definierbar.)

Beweis:
Sei a_1 eine Realisierung von p in einer genügend saturiertem elementaren Erweiterung $(\mathbb{A};\mathbb{B})$. Sei $\Delta(x)$ die Menge aller Formeln

$$f(x,a)\doteq b \qquad (a\in A\ ,\ b\in \mathbb{B})\ .$$

Wähle $(a^1,\dots,a^n)=\bar{a}$ aus A , sodaß für $\bar{b}\doteq f(a_1,\bar{a})$ die Formel

$$\chi(x,\bar{a},\bar{b}) = (f(x,a^1)\doteq b^1 \wedge \dots\dots \wedge f(x,a^n)\doteq b^n)$$

minimalen Δ-Rang&Grad (r,g) hat . Dann ist für alle a_2 aus A

$$f(a_1,a_2) = \underline{\text{das}}\ \ b\in\mathbb{B}\ \text{ mit } \ \text{Rang/Grad}(\chi(x,\bar{a},\bar{b})\wedge f(x,a_2)\doteq b) = (r$$

Weil Rang und Grad definierbar sind, können wir schreiben

$$f(a_1,a_2)=b \quad \text{gdw.} \quad \varphi(a_2,\bar{a},b,\bar{b})\ .$$

Nach Lemma 4 ist

$$\varphi(x_2,\bar{a},y,\bar{y})$$

äquivalent zu einer Formel

$$\psi(h_2(x_2),y,\bar{y})\ .$$

Wir können annehmen, daß $\psi(y_2,y,\bar{y})$ funktional in y ist :

$$\psi(y_2,\bar{y},y) \text{ äquivalent zu } h_3(y_2,\bar{y})\doteq y$$

Setze

$$h_1(x_1) = (f(x_1,a1),\dots,f(x_1,an)). \qquad \square$$

In der induzierten Struktur von B haben wir für jede in $(A;B)$ o-definierbare Relation auf B ein Relationszeichen. Sei B^* eine Expansion der induzierten Struktur auf B. L sei die Sprache von $(A;B)$, L^* die Sprache von B^* und $L^+ = L \cup L^*$. □

Lemma 6

Jede L^+-Formel $\varphi(x,y)$ ist in $(A;B^*)$ zu einer Formel

$$\psi^*(f(x),y)$$

äquivalent, wobei ψ^* eine L^*-Formel und f eine in $(A;B)$ o-definierbare Funktion von A nach B^{eq} ist.

Beweis:

Induktion über den Aufbau von φ:

a) φ ist eine L-Formel: Lemma 4

b) φ ist eine L^*-Formel $\psi^*(y)$:klar

c) $\varphi = \neg\varphi_0$:klar nach Induktion

d) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$: Sei φ_i äquivalent zu $\psi_i^*(f_i(x),y))$. Setze $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$ und

$$\psi^*(y_0,y) = \psi_1^*(1.\text{Komponente}(y_0),y) \wedge \psi_2^*(2.\text{Komponente}(y_0),y).$$

e) $\varphi(x,y) = \exists y_0 \varphi_0(x,y,y_0)$: klar nach Induktion.

f) $\varphi(x,y) = \exists x_0 \varphi_0(x,x_0,y)$: Sei $\varphi_0(x,x_0,y)$ äquivalent zu $\psi_0^*(f_0(x,x_0),y)$. Nach Lemma 4 ist $\exists x_0 f_0(x,x_0)=y_0$ äquivalent zu einer Formel $\chi_0(f(x),y_0)$. Also ist φ äquivalent zu

$$\exists y_0(\chi_0(f(x),y_0) \wedge \psi_0^*(y_0,y)).$$ □

Satz 2

Sei $(A;B)$ stabil und B^* eine stabile Expansion der induzierten Struktur von B. Dann ist (A,B^*) stabil.

Beweis:

Wir nehmen (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) an, daß L' abzählbar ist. $A \cup B$ habe die Mächtigkeit λ. Wir müssen zeigen, daß $S(A;B^*)$ höchstens die Mächtigkeit $\lambda^{\aleph_0}$ hat. Es ist

$$S(A;B^*) = S_{1.\text{Sorte}}(A;B^*) \cup S_{2.\text{Sorte}}(A;B^*).$$

Wir zeigen nur, daß es wenig Typen der ersten Sorte gibt. Der Beweis

für die zweite Sorte ist ähnlich aber leichter.
Sei $(\mathbb{A};\mathbb{B}^*)$ eine elementare Erweiterung von $(A;B^*)$. Wir müssen zeigen, daß die Mächtigkeit von

$$tp^+(a/A\cup B) \quad (a\in \mathbb{A})$$

höchstens $\lambda^{\aleph_0}$ ist.
Weil es nach Voraussetzung höchstens $\lambda^{\aleph_0}$ viele L-Typen $p(x)$ über $A\cup B$ gibt, können wir annehmen, daß alle betrachteten a Realisierungen eines L-Typs $p(x)$ sind. Weiter genügt es für jede L^+-Formel $\varphi(x;\overline{x},\overline{y})$ die Zahl der φ-Typen

$$tp_\varphi(a/A\cup B) \qquad (a\in \mathbb{A}\ ,\ a \text{ realizes } p)$$

durch $\lambda^{\aleph_0}$ abzuschätzen.
Nun ist aber nach Lemma 6 $\varphi(x;\overline{x},\overline{y})$ äquivalent zu $\varphi^*(f(x,\overline{x}),\overline{y})$ und (für x, die p realisieren und $\overline{x}$ aus A) nach Lemma 5 äquivalent zu $\varphi^*(h_3(h_1(x),h_2(\overline{x})),\overline{y})$.
Also ist $tp_\varphi(a/A\cup B)$ durch $tp^*(h_1(a)/B)$ bestimmt. Weil B^* stabil ist, folgt die Behauptung. □

<u>Satz 3</u>
$(A;B)$ und B^* seien wie in Satz 2. Wenn
a) $(A;B)$ kein Vaughtsches Paar in der ersten Sorte hat, und wenn
b) für alle zu $(A;B)$ elementar äquivalenten $(\overline{A};\overline{B})\prec(\mathbb{A};\mathbb{B})$
   $\overline{A}\cup\mathbb{B}$ algebraisch abgeschlossen in $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ ist,
dann hat $(A;B^*)$ kein Vaughtsches Paar in der ersten Komponente.

Beweis:
Sei $\varphi(x)$ eine in $(\overline{A},\overline{B}^*)$ definierte unendliche L^+-Formel, die sich beim Übergang zu einer geeigneten echten elementaren Erweiterung nicht vergrößert. Sei φ äquivalent zu $\varphi^*(f(x))$ wie in Lemma 6.
Gäbe es ein $b\in\varphi^*(\overline{B}^{eq})$, für das $f^{-1}(b)$ unendlich wäre, so würde die Formel $f(x)\doteq b$ ein Vaughtsches Paar der ersten Sorte von $(\overline{A};\overline{B})$ liefern. Wir können ruhig annehmen, daß $(\overline{A};\overline{B}^*)$ genügend saturiert ist. Wir finden dann eine Schranke n mit $|f^{-1}(b)|\leq n$ für alle $b\in\varphi^*(\overline{B}^{eq})$. Sei $a\in\varphi(\mathbb{A})\setminus\overline{A}$. Dann ist a algebraisch über $\overline{A}\cup\mathbb{B}$.
Das geht nicht. □