Einfache Theorien*

Martin Ziegler

Freiburg, SS 08

Literatur

[1] Enrique Casanovas. Simplicity simplified. *Rev. Colombiana Mat.*, 39:–6, 2005.

[2] K. Tent and M. Ziegler. *Model Theory*. 2008. In preparation.

[3] Frank O. Wagner. *Simple Theories*, volume 503 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 2000.

Diese Notizen sind zum Abschnitt 6 eine Ausarbeitung bis von [1]. Abschnitt 7 ist übernommen aus [3].

*Version 2 (Juli 2008)

T bezeichnet immer ein vollständige Theorie mit Monstermodell $\mathfrak{C}$.

1 Indiscernibels

Definition 1.1. *Sei I eine unendliche lineare Ordnung und $\mathcal{I} = (a_i \mid i \in I)$ eine Folge von endlichen Tupeln gleicher Länge. Der Ehrenfeucht-Mostowski-Typ* $\mathrm{EM}(\mathcal{I}/A)$ *von $\mathcal{I}$ über A ist die Menge aller $L(A)$–Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, sodaß $\models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ für alle $i_1 < \ldots < i_n \in I$.*

`L:standard` **Lemma 1.2** (Standardlemma)**.** *Sei A eine Parametermenge, $\mathcal{I}$ eine unendliche Folge von Tupeln und J eine lineare Ordnung. Dann gibt es eine Folge von Indiscernibels über A vom Ordnungstyp J, die* $\mathrm{EM}(\mathcal{I}/A)$ *realisiert.* □

Beweis. Das ist Exercise 15.1 in [2]. □

`L:shelah-e.r.` **Lemma 1.3** (Shelah)**.** *Für alle A gibt ein λ so daß es für jede lineare Ordnung I der Mächtigkeit λ und jede Familie $(a_i \mid i \in I)$ eine über A indiscernible Folge $(b_j \mid j < \omega)$ gibt, sodaß es für alle $j_1 < \ldots < j_n < \omega$ eine Folge $i_1 < \ldots < i_n$ aus I gibt mit* $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(b_{j_1} \ldots b_{j_n}/A)$.

Beweis. Wir brauchen von λ nur das folgende. Sei $\tau = \sup_{n<\omega} |\mathrm{S}_n(A)|$.

1. $\mathrm{cf}(\lambda) > \tau$
2. Für alle $\kappa < \lambda$ und alle $n < \omega$ gibt es ein $\kappa' < \lambda$ mit $\kappa' \to (\kappa)^n_\tau$

Wegen Erdös-Rado[1]

$$\beth_i(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{i+1}_\kappa$$

können wir $\lambda = \beth_{\tau^+}$ nehmen.

Wir konstruieren leicht eine Folge von Typen $p_1(x_1) \subset p_2(x_1, x_2) \subset \ldots$ mit $p_n \in \mathrm{S}_n(A)$, so daß es für alle $\kappa < \lambda$ ein $I' \subset I$ mit $|I'| = \kappa$ gibt mit $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}) = p_n$ für alle $i_1 < \ldots < i_n$ aus I'.

$(b_i \mid i < \omega)$ ist dann einfach eine Realisierung von $\bigcup_{i<\omega} p_i$.

Wenn p_{n-1} konstruiert ist und ein $\kappa < \lambda$ vorgegeben, wählen wir ein $\kappa' < \lambda$ mit $\kappa' \to (\kappa)^n_\tau$ und dazu ein $I' \subset I$ mit $|I'| = \kappa$ mit $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = p_n$ für alle $i_1 < \ldots < i_n$ aus I'. Dann gibt es ein $I'' \subset I'$ und ein p^κ_n mit $\mathrm{tp}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}) = p^\kappa_n$ für alle $i_1 < \ldots < i_n$ aus I''. Weil $\mathrm{cf}(\lambda) > \tau$, gibt es ein p_n, sodaß $p^\kappa_n = p_n$ für kofinal viele κ. □

2 Lascar-starke Typen

Definition 2.1. *Eine Relation $R \subset \mathfrak{C}^n \times \mathfrak{C}^n$ heißt beschränkt, wenn es nicht beliebig lange Folgen $(c_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ gibt mit $\neg R(c_\alpha, c_\beta)$ für alle $\alpha < \beta < \kappa$. Eine definierbare beschränkte Relation heißt dick.*

[1] Für Kardinalzahlen κ, λ, μ bedeutet $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$: Für jede Funktion $f : [\kappa]^n \to \mu$ gibt es ein $A \subset \kappa$ mit $|A| = \lambda$, sodaß f auf $[A]^n$ konstant ist.

Wir nennen $(c_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ eine Antikette von R der Länge κ.

Eine Äquivalenzrelation ist beschränkt, wenn die Zahl der Äquivalenzklassen beschränkt ist. Für Äquivalenzrelationen R_i ist deshalb das folgende Lemma leicht zu beweisen: Wenn die R_i höchsten κ_i Klassen haben, hat $\bigwedge R_i$ höchstens $\prod \kappa_i$ viele Klassen.

L:beschraenkt_durchschnitt

Lemma 2.2. *Beschränkte Relationen sind reflexiv. Der Durchschnitt von beschränkten Relationen ist beschränkt. Wenn R dick ist, dann auch R^{-1}.*

Beweis. Wenn $\neg R(a,a)$, ist $a, a, \dots$ eine unendliche Antikette von R.

Sei R_i, $(i < \mu)$, beschränkt und κ so gewählt, daß kein R_i eine Antikette der Länge κ hat. Sei λ so groß, daß $\lambda \to (\kappa)^2_\mu$. Dann hat $\bigwedge_{i<\mu} R_i$ keine Antikette der Länge λ.

Wenn R dick ist, gibt es wegen Kompaktheit ein endliche Schranke k für die Länge der Antiketten. Dann hat aber auch R^{-1} keine Antikette $a_0, \dots, a_k$, denn sonst wäre $a_k, \dots, a_0$ eine Antikette von R. $\square$

Definition 2.3. *Sei A eine Menge von Parametern.*

1. *Eine Relation R heißt A–invariant, wenn R invariant unter allen Automorphismen aus $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ ist*

2. *nc_A ist kleinste A–invariante Relation.*

3. *$\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_A$ ist die kleinste A–invariante beschränkte Äquivalenzrelation.* [2]

Für $\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_A(a,b)$ schreiben wir auch $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$: a und b haben den gleichen *Lascar-starken Typ* über A.

Definition 2.4. *Gestrichen.*

L:nc

Lemma 2.5. *Für eine Parametermenge A und n–Tupel a, b sind äquivalent:*

L:nc:nc

a) $\mathrm{nc}_A(a,b)$

L:nc:dick

b) $\models \theta(a,b)$ *für alle über A definierten dicken $\theta(x,y)$.*

L:nc:ind

c) a und b beginnen eine unendliche Folge von Indiscernibels über A.

Beweis.
a) $\to$ b): Klar.

b) $\leftrightarrow$ c): Sei $p(x,y) = \mathrm{tp}(ab/A)$. Nach dem Standardlemma beginnen a und b genau dann ein unendliche Folge von Indiscernibels, wenn es eine Folge $(c_i \mid i < \omega)$ gibt mit $\models p(c_i, c_j)$ für $i < j$. Das bedeutet, daß für alle $\phi \in p$ das Komplement von $\phi(\mathfrak{C})$ beliebig große Antiketten hat. Oder anders ausgedrückt:

$$\not\models \psi(a,b) \;\Rightarrow\; \psi \text{ ist nicht dick.}$$

[2] Für Relationen zwischen n-Tupeln müßte man eigentlich nc^n_A und $\mathrm{E}^n_{\mathrm{L}}$ schreiben.

c) $\rightarrow$ a): Sei $(c_i \mid i < \omega)$ indiscernibel über A. Weil nc_A beschränkt ist, gibt es $i < j$ mit $\mathrm{nc}_A(c_i, c_j)$. Weil nc_A A-invariant ist und die c_i indiscernibel, folgt $\mathrm{nc}_A(c_i, c_j)$ für alle $i < j$, insbesondere $\mathrm{nc}_A(c_0, c_1)$. □

P:nc_transitiv **Proposition 2.6.** $\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_A$ *ist die transitive Hülle von* nc_A.

Beweis. nc_A ist nach 2.5.b und 2.2 reflexiv und symmetrisch. Also ist die transitive Hülle die kleinste Äquivalenzrelation, die nc_A enthält. □

L:nc-modell:mn1 **Lemma 2.7.** *1. Wenn* $\mathrm{nc}_A(a, b)$, *gibt es ein* $M \supset A$ *mit* $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$.

L:nc-modell:mn2 *2. Wenn* $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$ *für ein* $M \supset A$, *ist* $\mathrm{nc}^2_A(a, b)$.

Beweis. 1): Sei $\mathcal{I} = (c_i \mid i < \omega)$ indiscernibel über A mit $c_0 = a$ und $c_1 = b$. Wir fixieren irgendein Modell $M' \supset A$. Nach dem Standardlemma gibt es eine ω–Folge $\mathcal{I}'$ von Indiscernibels über M' mit $\mathrm{EM}(\mathcal{I}/A) = \mathrm{EM}(\mathcal{I}'/A)$. Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ mit $\alpha(\mathcal{I}') = \mathcal{I}$. Setze $M = \alpha(M')$. Es gilt sogar $\mathrm{nc}_M(a, b)$.

2): Wir müssen zeigen, daß für jede dicke Formel $\theta(x, y)$ mit Parametern aus A $\models \exists z(\phi(a, z) \wedge \phi(z, b)$. Wir können annehmen, daß ϕ symmetrisch ist. Weil M eine Modell ist, das A enthält, gibt es in M eine maximale Antikette $a_0, \ldots, a_{k-1}$ von ϕ. Es gibt dann ein i mit $\models \phi(a, a_i)$. Es folgt $\models \phi(b, a_i)$ und wir sind fertig. □

Definition 2.8. *Gestrichen.*

Folgerung 2.9. *Gestrichen.*

F:lst_erweiterung **Folgerung 2.10.** *Sei* $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$. *Dann gibt es für alle* a' *ein* b' *mit* $\mathrm{Lstp}(aa'/A) = \mathrm{Lstp}(bb'/A)$.

Beweis. Nach 2.7 ist $\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_A$ der transitive Abschluß von „haben denselben Typ über einem Modell, das A enthält“. Diese Relation hat offenbar die behauptete Fortsetzungseigenschaft. □

nc_A hat die Fortsetzungseigenschaft nicht: Wenn $\mathrm{nc}_A(a, b)$, $a \neq b$ und $a' = b$, findet man kein b' mit $\mathrm{nc}\,A(aa', bb')$.

L:lst_relativ **Lemma 2.11.** *Aus* $\mathrm{Lstp}(a/Ab) = \mathrm{Lstp}(a'/Ab)$ *folgt* $\mathrm{Lstp}(ab/A) = \mathrm{Lstp}(a'b/A)$.

Beweis. Weil $\mathrm{nc}_{Ab}(a, a') \Rightarrow \mathrm{nc}_A(ab, a'b)$. □

L:nc_erweiterung **Lemma 2.12.** *Sei* $(a_i \mid i < \omega)$ *indiscernibel über* A *und* $(a_i \mid 1 \leq i < \omega)$ *indiscernibel über* Aa'_0a_0. *Dann gibt es ein* a'_1 *mit sodaß* $\mathrm{nc}_A(a'_0a_0, a'_1a_1)$.

Beweis. Wähle zu jedem i ein a'_i, sodaß $\mathrm{tp}(a'_ia_ia_{i+1}\ldots/A) = \mathrm{tp}(a'a_0a_1\ldots/A)$. Sei $b'_0b_0, b'_1b_1, \ldots$ eine Folge von Indiscernibels, die den EM-Typ von $a'_0a_0, a'_1a_1, \ldots$ über A realisiert. Weil $(a_i \mid 1 \leq i < \omega)$ indiscernibel über Aa'_0a_0 ist, folgt $\mathrm{tp}(b'_0b_0, b_1/A) = \mathrm{tp}(a'_0a_0, a_1/A)$. Wir können also annehmen, daß $a'_0a_0, a'_1a_1, \ldots$ indiscernibel über A ist. □

3 Teilen und Forken

Definition 3.1. *$\phi(x,b)$ teilt über A, wenn es eine Folge $(b_i \mid i<\omega)$ von Realisierungen von $\mathrm{tp}(b/A)$ gibt und ein k, sodaß $(\phi(x,b_i) \mid i<\omega)$ k-inkonsistent ist*[3,4]*. Eine Formelmenge $\pi(x)$ teilt über A, wenn $\pi(x)$ ein $\phi(x,b)$ impliziert, das über A teilt.*

Wenn $\phi(x,a)$ die Formel $\psi(x,a')$ impliziert, und $\psi(x,a')$ über A teilt, teilt auch $\phi(x,a)$ über A. Daraus folgt, daß ϕ über A genau dann teilt, wenn $\{\phi\}$ über A teilt.

Ebenso kann man blinde freie Variable einführen, ohne am Teilen etwas zu ändern. Es hat also Sinn, zu sagen, daß $\pi(\bar{x})$ über A teilt, wenn $\bar{x}$ eine unendliche Folge von Variablen ist.

Bemerkung. *1. Wenn $a \notin \mathrm{acl}(A)$, dann teilt $\mathrm{tp}(a/Aa)$ über A.*

2. Wenn $\pi(x)$ konsistent ist und über $\mathrm{acl}(A)$ definiert, teilt $\pi(x)$ nicht über A.

L:teilt_indisc

Lemma 3.2. *$\pi(x,b)$ teilt über A gdw. es eine Folge $(b_i \mid i<\omega)$ von Indiscernibels über A gibt, mit $\mathrm{tp}(b_0/A)=\mathrm{tp}(b/A)$, für die $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ inkonsistent ist.*

Man kann ω durch jede unendliche lineare Ordnung ersetzen.

Beweis. Wenn $(b_i \mid i<\omega)$ von Indiscernibels über A ist, mit $\mathrm{tp}(b_0/A)=\mathrm{tp}(b/A)$ und $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ inkonsistent, gibt es eine Konjunktion $\phi(x,b)$ von Formeln aus $\pi(x,b)$, für die $\Sigma(x)=\{\phi(x,b_i) \mid i<\omega\}$ inkonsistent ist. Σ hat eine k–elementige inkonsistente Teilmenge. Es folgt dann, daß $(\phi(x,b_i) \mid i<\omega)$ k–inkonsistent ist.

Nehmen wir umgekehrt an, daß $\pi(x,b)$ über A teilt. Dann teilt eine endliche Konjunktion $\phi(x,b)$ von Formeln aus $\pi(x,b)$. Sei $(b_i \mid i<\omega)$ eine Folge von Realisierungen von $\mathrm{tp}(b/A)$, sodaß $(\phi(x,b_i) \mid i<\omega)$ k-inkonsistent ist. Das Standardlemma erlaubt es uns anzunehmen, daß $(b_i \mid i<\omega)$ indiscernibel über A ist. Natürlich ist $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ inkonsistent. □

F:teilt_wenn_indisc

Folgerung 3.3. *Es sind äquivalent*

F:teilt_wenn_indisc:teilt_n

1. $\mathrm{tp}(a/Ab)$ teilt nicht über A

F:teilt_wenn_indisc:ex_a

2. für jede unendliche Folge von A-Indiscernibels $\mathcal{I}$, die b enthält, existiert ein a' mit $\mathrm{tp}(a'/Ab)=\mathrm{tp}(a/Ab)$ und so, daß $\mathcal{I}$ indiscernibel über Aa' ist.

F:teilt_wenn_indisc:ex_i

3. für jede unendliche Folge von A-Indiscernibels $\mathcal{I}$, die b enthält, existiert $\mathcal{I}'$ mit $\mathrm{tp}(\mathcal{I}'/Ab)=\mathrm{tp}(\mathcal{I}/Ab)$, und so, daß $\mathcal{I}'$ indiscernibel über Aa ist.

[3] Eine Familie $(\phi_i(x) \mid x\in I)$ ist k–inkonsistent, wenn für jede k–elementige Teilmenge K von I die Menge $\{\phi_i \mid i\in K\}$ inkonsistent ist

[4] Wir sagen, daß ϕ über A *bezüglich* k teilt

Beweis. 2)$\leftrightarrow$ 3): Das ist klar durch Betrachtung geeigneter Automorphismen. Man sieht auch sofort, daß die Konklusionen von 2) und 3) äquivalent sind zu:

($*$) *Es existiert ein a' mit $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ und $\mathcal{I}'$ mit $\mathrm{tp}(\mathcal{I}'/Ab) = \mathrm{tp}(\mathcal{I}/Ab)$ so, daß $\mathcal{I}'$ indiscernibel über Aa' ist.*

1)$\rightarrow$ ($*$): Sei $\mathcal{I} = (b_i \mid i \in I)$ eine unendliche Folge von Indiscernibels, mit $b_{i_0} = b$. Sei $p(x, b) = \mathrm{tp}(a/Ab)$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} p(x, b_i)$ konsistent; sei a' eine Realisierung. Nach dem Standardlemma gibt es $\mathcal{I}'' = (b''_i \mid i \in I)$, indiscernibel über Aa', das $\mathrm{EM}(\mathcal{I}/Aa')$ realisiert. Weil $\models p(a', b''_{i_0})$, gibt es einen Auotmorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Aa')$, der b''_{i_0} in b überführt. Setze $I' = \alpha(\mathcal{I}'')$.

2)$\rightarrow$1) Sei $p(x, b) = \mathrm{tp}(a/Ab)$ und $(b_i \mid i < \omega)$ ein Folge von Indiscernibels über A mit $\mathrm{tp}(b_0/A) = \mathrm{tp}(b/A)$. Nach Annahme gibt es ein a' mit $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$, sodaß $\mathcal{I}$ indiscernibel über Aa' ist. Weil $\models p(a', b)$, ist a' eine Realisierung von $\bigcup_{i<\omega} p(x, b_i)$. □

P:teilen-rechnung **Proposition 3.4.** *1. Wenn $\mathrm{tp}(a/B)$ nicht über $A \subset B$ teilt und $\mathrm{tp}(c/Ba)$ nicht über Aa teilt, dann teilt $\mathrm{tp}(ac/B)$ nicht über A.*

P:teilen-rechnung:formel *2. Wenn $\mathrm{tp}(a/B)$ nicht über $A \subset B$ teilt und $\pi(x)$ ein partieller Typ über B ist, der nicht über Aa teilt, dann teilt $\pi(x)$ nicht über A.*

Beweis. 1: Sei $b \in B$ ein endliches Tupel und $\mathcal{I}$ eine unendliche Folge von A–Indiscernibels, die b enthält. Wenn $\mathrm{tp}(a/B)$ nicht über A teilt, können gibt es ein $\mathcal{I}'$ mit $\mathrm{tp}(\mathcal{I}'/Ab) = \mathrm{tp}(\mathcal{I}, Ab)$, das über Aa indiscernibel ist. Wenn $\mathrm{tp}(c/Ba)$ nicht über Aa teilt, gibt es ein $\mathcal{I}''$ mit $\mathrm{tp}(\mathcal{I}''/Aab) = \mathrm{tp}(\mathcal{I}', Aab)$, das über Aac indiscernibel ist. Das zeigt die Behauptung.

2: Das ist nur eine Variante der Behauptung 1. Sei $\phi(x, b)$ eine Formel aus $\pi(x)$ und $\mathcal{I} = (b_i \mid i < \omega)$ eine Folge von A-Indiscernibels, die b enthält. Wir wollen zeigen, daß $\Phi = \{\phi(x, b_i) \mid i < \omega\}$ konsistent ist. Weil $\mathrm{tp}(a/B)$ nicht über A teilt, können wir annehmen, daß $\mathcal{I}$ indiscernibel über Aa ist. Die Konsistenz von Σ folgt jetzt direkt daraus, daß $\phi(x, b)$ nicht über Aa teilt. □

Definition 3.5. *$\pi(x)$ forkt über A, wenn $\pi(x)$ eine Disjunktion $\bigvee_{l<d} \phi_l(x)$ von Formeln $\phi_l(x)$ impliziert, die alle über A teilen.*

L:ee **Lemma 3.6.** *Wenn π endlich erfüllbar in A ist, dann forkt π nicht*

Beweis. Wenn $\pi(x)$ die Disjunktion $\bigvee_{l<d} \phi_l(x, b)$ impliziert, hat eins der ϕ_l eine Realisierung a in A. Wenn die b_i, $i < \omega$, den Typ $\mathrm{tp}(b/A)$ realisieren, hat $\{\phi_l(x, b_i) \mid i < \omega\}$ die Realisierung a. ϕ_l teilt also nicht über A. □

L:fortsetzen **Lemma 3.7.** *Sei $A \subset B$ und π ein partieller Typ über B. Wenn π nicht über A forkt, dann läßt sich π zu einem $p \in \mathrm{S}(B)$ fortsetzen, das nicht über A forkt.*

Beweis. Sei $p(x)$ eine maximale Menge von $L(B)$–Formeln, die $\pi(x)$ enthält und nicht über A forkt. Es ist klar, daß p konsistent ist. Sei $\phi(x)$ eine beliebige $L(B)$–Formel. Wenn weder ϕ noch $\neg\phi$ zu p gehörten, folgte, daß sowohl $p \cup \{\phi\}$ als auch $p \cup \{\neg\phi\}$ über A forkten. Das implizierte, daß p forkt. Also ist p vollständig. $\square$

4 Baumeigenschaft und Einfachheit

Definition 4.1. *1. $\phi(x, y)$ hat die Baumeigenschaft bezüglich k, wenn es einen Baum $(a_s \mid 0 \neq s \in {}^{<\omega}\omega)$ von Parametern gibt mit:*

a) Für alle s ist $(\phi(x, a_{si}) \mid i \in \omega)$ k–inkonsistent.

b) Für alle $\sigma \in {}^{\omega}\omega$ ist $\{\phi(x, a_s) \mid 0 \neq s \subset \sigma\}$ konsistent.

2. T ist einfach, wenn keine Formel $\phi(x, y)$, für kein k, die Baumeigenschaft hat.[5]

Definition 4.2. *Sei Δ eine endliche Menge von Formeln $\phi(x, y)$ ohne Parameter. Eine Δ–k–Teilungsfolge über A ist eine Folge $(\phi_i(x, a_i) \mid i < \delta)$, sodaß*

1. $\phi_i(x, y) \in \Delta$

2. $\phi_i(x, a_i)$ teilt über $A \cup \{a_j \mid j < i\}$ bezüglich k.

3. $\{\phi_i(x, a_i) \mid i < \delta\}$ ist konsistent.

L:einfach-teilungsfolge

Lemma 4.3. *1. Wenn ϕ die Baumeigenschaft bezüglich k hat, gibt es für jedes A und μ eine ϕ–k–Teilungsfolge über A der Länge μ.*

L:einfach-teilungsfolge:tf_b

2. Wenn kein $\phi \in \Delta$ die Baumeigenschaft hat, gibt es keine unendliche Δ–k–Teilungsfolge über $\emptyset$.

Beweis. 1): Wähle einen Baum für ϕ, der Länge μ und mit sehr großem Verzweigungsgrad. Wähle einen Pfad im Baum, sodaß jeder Punkt unendlich viele Nachbarn hat, die über A und den Vorgängern denselben Typ haben.

2): Angenommen, es gibt eine unendliche Δ–k–Teilungsfolge über $\emptyset$. Wenn ϕ in der Folge unendlich oft vorkommt, gibt es eine unendliche ϕ–k–Teilungsfolge $(\phi(x, a_i) \mid i < \omega)$. Wir wählen für jedes i eine Folge $(a_i^n \mid n < \omega)$ mit $\mathrm{tp}(a_i^n/\{a_j \mid j < i\}) = \mathrm{tp}(a_i/\{a_j \mid j < i\})$, für die $(\phi(x, a_i^n) \mid n < \omega)$ k–inkonsistent ist. Dann definieren wir Parameter b_s, die zeigen, daß ϕ die Baumeigenschaft bezüglich k hat, wie folgt: Sei $s \in {}^{i+1}\omega$ und $\vec{b} = (b_{s\restriction 1}, \ldots, b_{s\restriction i})$ schon so konstruiert, daß $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_{i-1}/A) = \mathrm{tp}(\vec{b}/A)$. Wähle ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ mit $\alpha(a_1, \ldots, a_{i-1}) = \vec{b}$ und setze $b_s = \alpha(a_i^{s(i)})$. $\square$

Man sieht leicht, daß es in einfachen Theorien für jedes endliche Δ und alle k eine Schranke für mögliche Längen von Δ–k–Teilungsfolgen gibt.

[5] Wir können annehmen, daß ϕ keine Parameter hat.

P:einfach **Proposition 4.4.** *Sei T ein vollständige Theorie. Dann sind äquivalent.*

P:einfach:einfach *a) T ist einfach*

P:einfach:T *b) Für alle $p \in \mathrm{S}(B)$ gibt es ein $A \subset B$ mit $|A| \leq |T|$, sodaß p nicht über A teilt.*

P:einfach:k *c) Es gibt ein κ, sodaß es für alle $p \in \mathrm{S}(B)$ ein $A \subset B$ mit $|A| \leq \kappa$ gibt, sodaß p nicht über A teilt.*

Beweis. a)$\to$b): Wenn b) falsch ist, gibt es eine Folge $(\phi_i(x, b_i) \mid i < |T|^+)$ von Formeln aus $p(x)$, sodaß jedes $\phi_i(x, b_i)$ über $\{b_j \mid j < i\}$ bezüglich k_i teilt. Es gibt eine unendliche Teilfolge, in der alle $\phi_i(x, y)$ gleich $\phi(x, y)$ und alle k_i gleich k sind, also eine ϕ–k–Teilungsfolge.

b)$\to$c): Klar.

c)$\to$a): Wenn ϕ die Baumeigenschaft hat, gibt es beliebig lange ϕ–k–Teilungsfolgen $(\phi(x, b_i) \mid i < \kappa)$. Erweitere die Menge der $\phi(x, b_i)$ zu einem $p(x) \in \mathrm{S}(B)$, wobei $B = \{b_i \mid i < \kappa\}$. p teilt über jedem Anfangsstück der b_i. □

Definition 4.5. *Gestrichen.*

Bemerkung. *Gestrichen.*

Lemma 4.6. *Gestrichen.*

Folgerung 4.7. *Gestrichen.*

F:forkt_nicht_ueber_domain **Folgerung 4.8.** *Sei T einfach und $p \in \mathrm{S}(A)$. Dann forkt p nicht über A.*

Beweis. Nehmen wir an, daß p über A forkt. Dann impliziert p eine Disjunktion $\bigvee_{l<d} \phi_l(x, b_l)$ von Formeln, die alle über A vermöge k teilen. Setze $\Delta = \{\phi_l(x, y) \mid l < d\}$.

Wir konstruieren, im Widerspruch zu 4.3, eine unendliche lange Δ–k–Teilungsfolge über A. Sei $(\psi_i(x, a_i) \mid i < n)$ über A schon konstruiert und sei $p(x)$ mit $\{\psi_i(x, a_i) \mid i < n\}$ konsistent. Es folgt, daß eine der Formeln $\phi_l(x, b_l)$, zum Beispiel $\phi_0(x, b_0)$ mit $p(x) \cup \{\psi_i(x, a_i) \mid i < n\}$ konsistent ist.

Wir können nun annehmen, daß $(\psi_i(x, a_i) \mid i < n)$ eine Teilungsfolge über Ab_0 ist. Das folgt leicht mit Induktion aus der folgenden Beobachtung: Wenn $\phi(x, a)$ über A teilt und wenn $A \subset A'$, dann gibt es ein zu a über A konjugiertes a', sodaß $\phi(x, a')$ über A' teilt. Jetzt ist aber $\phi_0(x, b_0), \psi_0(x, a_0), \ldots$ eine Δ–k–Teilungsfolge über A, die wieder mit $p(x)$ konsistent ist. □

F:existenz **Folgerung 4.9** (Existenz)**.** *Jeder Typ über A läßt sich nicht-forkend auf jede Erweiterung von A fortsetzen.*

Beweis. Aus 4.8 und 3.7. □

5 Unabhängigkeit und Morleyfolgen

Definition 5.1. *A ist unabhängig von B über C, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B$, wenn für jedes endliche Tupel $a \in A$, $\mathrm{tp}(a/BC)$ nicht über B forkt.*

Das ist eine sinvolle Definition, weil das Forken von $\mathrm{tp}(a/BC)$ nicht von der Aufzählung von a abhängt und weil $\mathrm{tp}(a/BC)$ über C forkt, wenn der Typ einer Teilfolge von a über BC über C forkt.

Definition 5.2. *I sei eine lineare Ordnung. Einen Folge $(a_i \mid i \in I)$ heißt*

1. *unabhängig über A, wenn $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \{a_j \mid j < i\}$ für alle i,*
2. *Morleyfolge über A, wenn $(a_i \mid i \in I)$ unabhängig und indiscernible über A ist,*
3. *Morleyfolge in $p(x)$ über A, wenn $(a_i \mid i \in I)$ eine Morleyfolge über A ist und alle a_i Realisierungen von p sind.*

L:morley-stark **Lemma 5.3.** *Wenn $(a_i \mid i \in I)$ unabhängig über A ist, und $J < K$ Teilmengen von I. Dann teilt $\mathrm{tp}((a_k)_{k\in K}/A\{a_j \mid j \in J\})$ nicht über A.*

Beweis. Man kann annehmen, daß K endlich ist. Die Behauptung folgt dann per Induktion über $|K|$ aus 3.4.1. □

L:morley_existenz **Lemma 5.4.** *Wenn $p \in \mathrm{S}(B)$ nicht über A forkt, dann gibt es eine unendliche Morleyfolge in p über A, die sogar über B indiscernibel ist.*

Beweis. Sei a_0 eine Realisierung von p. Wegen 3.7 gibt es eine Fortsetzung p' von p auf Ba_0, die nicht über A forkt. Sei a_1 eine Realisierung von p'. Wenn man so fortfährt, erhält man für jedes vorgebene λ eine Folge $(a_i \mid i < \lambda)$ mit $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B(a_j)_{j<i}$. Mit 1.3 erhält man daraus eine Folge der Länge ω mit der gleichen Eigenschaft, die zusätzlich indiscernibel über B ist. □

Folgerung 5.5. *Wenn T einfach ist und $p \in \mathrm{S}(A)$, gibt es eine unendliche Morleyfolge in p über A.*

Beweis. Das folgt aus 4.9. □

P:morley_teilt **Proposition 5.6.** *Sei T einfach. $\pi(x, y)$ ein partieller Typ über A. Sei $(b_i \mid i < \omega)$ eine unendliche Morleyfolge über A und $\bigcup_{i<\omega} \pi(x, b_i)$ konsistent. Dann teilt $\pi(x, b_0)$ nicht über A.*

Beweis. Nach dem Standardlemma gibt es für jede lineare Ordnung I eine Morleyfolge $(b_i \mid i \in I)$ in $\mathrm{tp}(b_0/A)$ über A, für die $\Sigma(x) = \bigcup_{i\in I} \pi(x, b_i)$ konsistent ist. Wir wählen für I die inverse Ordnung von $|T|^+$. Sei c eine Realisierung von Σ. Nach 4.4.b gibt es ein i_0, sodaß $\mathrm{tp}(c/A\{b_i \mid i \in I\})$ nicht über $A\{b_i \mid i > i_0\}$ teilt. Daraus folgt, daß $\pi(x, b_{i_0})$ nicht über $A\{b_i \mid i > i_0\}$ teilt. Nach 5.3 teilt $\mathrm{tp}((b_i \mid i > i_0)/Ab_{i_0})$ nicht über A. Also teilt nach 3.4.2 $\pi(x, b_{i_0})$ nicht über A. □

`P:forken=teilen`

Proposition 5.7. *T sei einfach. Dann teilt $\pi(x,b)$ genau dann über A, wenn es über A forkt.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\psi(x,b) = \bigvee_{l<d} \phi_l(x,b)$ über A nicht teilt. Sei $(b_i \mid i < \omega)$ eine Morleyfolge in $\mathrm{tp}(b/A)$ über A, die existiert, weil T einfach ist. Dann ist $\{\psi(x,b_i) \mid i \in \omega\}$ konsistent. Wenn man eine Realisierung betrachtet, sieht man, daß es nach den Schubfachprinzip ein unendliches $I \subset \omega$ und ein l geben muß, sodaß $\{\phi_l(x,b_i) \mid i \in I\}$ konsistent ist. Aus 5.6 folgt jetzt, daß $\phi_i(x,b)$ nicht über A teilt. □

`P:symmetrie`

Proposition 5.8 (Symmetrie)**.** *In einfachen Theorien ist die Unabhängigkeitsrelation symmetrisch.*

Beweis. Sei $a \mathop{\downarrow}_C b$. Dann gibt es nach 5.4 eine unendliche Morleyfolge $(a_i \mid i < \omega)$ in $\mathrm{tp}(a/Cb)$ über C, die über Cb indiscernibel ist. Sei $p(x,a) = \mathrm{tp}(b/Ca)$. Dann ist $\bigcup_{i<\omega} p(x,a_i)$ konsistent, weil es von b realisiert wird. Also teilt $p(x,a)$ nicht über C. □

Folgerung 5.9 (Monotonie und Transitivität)**.** *T sei einfach, $B \subset C \subset D$. Dann ist $A \mathop{\downarrow}_B D$ genau dann, wenn $A \mathop{\downarrow}_B C$ und $A \mathop{\downarrow}_C D$.*

Beweis. Die eine Richtung der Äquivalenz gilt in beliebigen Theorien und folgt leicht aus der Definition. Für die andere Richtung beachten wir, daß wir 3.41 wegen 5.7 nach Ersetzen der endlichen Tupel durch unendliche als

$$A' \mathop{\downarrow}_{A} B \text{ und } C \mathop{\downarrow}_{AA'} B \quad \Rightarrow \quad CA' \mathop{\downarrow}_{A} B$$

lesen können. Das ist gerade die Transitivität, wenn man rechts und links vertauscht. Die Behauptung folgt also aus 5.8. □

Aus Existenz, Symmetrie, Monotonie und Transitivität von nicht-forkenden Erweiterungen folgen alle Rechenregeln, die in stabilen Theorien gelten. Zum Beispiel:

Bemerkung. *Wenn $(a_i \mid i \in I)$ eine A-unabhängige Folge ist, dann gilt*[6]

$$a_X \mathop{\downarrow}_{Aa_{X\cap Y}} a_Y$$

für alle $X, Y \subset I$. □

`L:morley_teilt2`

Lemma 5.10. *Sei $\mathcal{I}$ eine unendliche Morleyfolge über A. Wenn $\mathcal{I}$ indiscernibel über Ac ist, ist $c \mathop{\downarrow}_A \mathcal{I}$.*

Beweis. Sei zum Beipiel $\mathcal{I} = (a_i \mid i < \omega)$ und $\phi(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{tp}(c/A\mathcal{I})$. Setze $b_i = (a_{ni}, \ldots, a_{ni+n-1})$. Dann ist $(b_i \mid i < \omega)$ wieder eine Morleyfolge über A und $\{\phi(x,b_i) \mid i \in \omega\}$ ist konsistent, weil von c realisiert. Aus 5.6 folgt, daß $\phi(x, a_0, \ldots, a_{n-1})$ nicht über A forkt. □

[6] $a_X = \{a_i \mid i \in X\}$.

6 Der Unabhängigkeitssatz

In diesem Abschnitt sei T immer einfach.

L:indisc_morley **Lemma 6.1.** *Sei $\mathcal{I}$ indiscernibel über A und $\mathcal{J}$ ein unendliches Anfangsstück ohne letztes Element. Dann ist $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ eine Morleyfolge über $A\mathcal{J}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{I} = (a_i \mid i \in I)$ und $\mathcal{J} = (a_i \mid i \in J)$. Es genügt zu zeigen, daß $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{AJ} a_X$ für alle $i \in I \setminus J$ und alle endlichen $X \subset I$ mit $i < X$. Das folgt aber aus 3.6, weil $\mathrm{tp}(a_i/AJa_X)$ endlich erfüllbar in AJ ist. $\square$

P:nc_teiltnicht **Proposition 6.2.** *Wenn $\phi(x,a)$ nicht über A teilt und $\mathrm{nc}_A(a,b)$, dann teilt $\phi(x,a) \wedge \phi(x,b)$ nicht über A.*

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ eine unendliche Folge von Indiscernibels, in denen a und b vorkommen. Wir verlängern $\mathcal{I}$ um ein unendliches Anfangstück $\mathcal{J}$ ohne größtes Element. Sei c eine Realisierung von $\phi(x,a)$ mit $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{J}a$. Wegen 3.3 können wir annehmen, daß $\mathcal{I}$ indiscernible über AJc ist.

Aus 6.1 folgt, daß $\mathcal{I}$ eine Morleyfolge über $A\mathcal{J}$ ist. Also folgt aus 5.10, daß $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A\mathcal{J}} \mathcal{I}$. Transitivität ergibt $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathcal{J}\mathcal{I}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

L:nc_erweiterung2 **Lemma 6.3.** *Sei $\mathrm{nc}_A(a,b)$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa} b$. Dann gibt es b', sodaß $\mathrm{nc}_A(a'a, b'b)$.*

Beweis. Sei $(a_i \mid i < \omega)$ indiscernibel über A, $a = a_0$ und $b = a_1$. Wegen 3.3 können wir annehmen, daß $(a_i \mid 1 \leq i < \omega)$ indiscernibel über $Aa'a$ ist. Aus 2.12 folgt die Behauptung. $\square$

P:nc_nf **Proposition 6.4.** *Wenn $\phi(x,a) \wedge \psi(x,b)$ nicht über A forkt, $\mathrm{nc}_A(b,b')$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Ab} b'$, dann forkt auch $\phi(x,a) \wedge \psi(x,b')$ nicht über A.*

Beweis. Nach 6.3 gibt es ein a' mit $\mathrm{nc}_A(ab, a'b')$. Aus 6.2 folgt, daß $\phi(x,a) \wedge \psi(x,b) \wedge \phi(x,a') \wedge \psi(x,b')$ nicht über A teilt. $\square$

F:lst_nf **Folgerung 6.5.** *Wenn $\phi(x,a) \wedge \psi(x,b)$ nicht über A forkt, $\mathrm{Lstp}(b/A) = \mathrm{Lstp}(b'/A)$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b'b$, dann forkt auch $\phi(x,a) \wedge \psi(x,b')$ nicht über A.*

Beweis. Sei $b = b_0, b_1, \ldots, b_n = b'$ eine Folge mit $\mathrm{nc}(b_i, b_{i+1})$, (vergl. 2.6). Wegen der Existenz von nicht-forkenden Erweiterungen können wir annehmen, daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Abb'} b_1 \ldots b_{n-1}$, woraus $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b_0 \ldots b_n$ folgt. Es ist also immer $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Ab_i} b_{i+1}$ und die Behauptung folgt durch Induktion aus 6.4. $\square$

Lemma 6.6. *Gestrichen.*

F:lst_erweiterung2 **Lemma 6.7.** *Für alle a, A und $B \supset A$ gibt es ein a' mit $\mathrm{Lstp}(a'/A) = \mathrm{Lstp}(a/A)$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.*

Beweis. Wähle ein Modell $M \supset A$ mit $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A M$ und dann a' mit $\mathrm{tp}(a'/M) = \mathrm{tp}(a/M)$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M B$. $\square$

Bemerkung. *Für beliebige Theorien gilt: es gibt ein a' mit $\mathrm{nc}^2_A(a',a)$ und $\mathrm{tp}(a'/B)$ teilt nicht über A. (Übung)*

L:lst_erweiterung3

Lemma 6.8. *Sei* $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$*. Dann gibt es für alle* a', B *ein* b' *mit* $\mathrm{Lstp}(aa'/A) = \mathrm{Lstp}(bb'/A)$ *und* $b' \mathop{\downarrow}_{Ab} B$*.*

Beweis. Wähle mit 2.10 ein b'' mit $\mathrm{Lstp}(aa'/A) = \mathrm{Lstp}(bb''/A)$ und mit 6.7 ein b' mit $\mathrm{Lstp}(b''/Ab) = \mathrm{Lstp}(b'/Ab)$ und $b' \mathop{\downarrow}_{Ab} B$. Aus 2.11 folgt $\mathrm{Lstp}(bb''/A) = \mathrm{Lstp}(bb'/A)$. □

F:unabhaengigkeit

Folgerung 6.9. *Sei* $a \mathop{\downarrow}_A b$*,* $a' \mathop{\downarrow}_A a$*,* $b' \mathop{\downarrow}_A b$*,* $\mathrm{Lstp}(a'/A) = \mathrm{Lstp}(b'/A)$ *und* $\models \phi(a', a) \wedge \psi(b', b)$*. Dann forkt* $\phi(x, a) \wedge \psi(x, b)$ *nicht über* A*.*

Beweis. Wähle mit 6.8 ein a'' mit $\mathrm{Lstp}(a''a'/A) = \mathrm{Lstp}(bb'/A)$ und $a'' \mathop{\downarrow}_{Aa'} abb'$. Dann folgt $a'' \mathop{\downarrow}_A aa'bb'$ und daraus:

- $a' \mathop{\downarrow}_A aa''$, was, zusammen mit $\models \psi(a', a'')$, impliziert, daß $\phi(x, a) \wedge \psi(x, a'')$ nicht über A forkt.
- $a \mathop{\downarrow}_A a''b$, was, wegen 6.5, impliziert, daß $\phi(x, a) \wedge \psi(x, b)$ nicht über A forkt.

□

S:unabhaengigkeit

Satz 6.10 (Unabhängigkeitssatz)**.** *Sei* $B \mathop{\downarrow}_A C$*,* $b \mathop{\downarrow}_A B$*,* $c \mathop{\downarrow}_A C$*, und* $\mathrm{Lstp}(b/A) = \mathrm{Lstp}(c/A)$*. Dann gibt es ein* d *mit* $d \mathop{\downarrow}_A BC$*,* $\mathrm{Lstp}(d/B) = \mathrm{Lstp}(b/B)$ *und* $\mathrm{Lstp}(d/C) = \mathrm{Lstp}(c/C)$*.*

Beweis. Das ist klar, wenn man nur $\mathrm{tp}(d/B) = \mathrm{tp}(b/B)$ und $\mathrm{tp}(d/C) = \mathrm{tp}(c/C)$ behauptet. Der Rest ist eine Übung. (Hinweis: Ersetze B und C durch Modelle.) □

F:unabhaengigkeit_unendlich

Folgerung 6.11. *Die* B_i*,* $i \in I$*, seien unabhängig über* A*. Es seien* b_i *mit* $b_i \mathop{\downarrow}_A B_i$ *gegeben, die alle den gleichen Lascartyp über* A *haben. Dann gibt es ein* d *mit* $d \mathop{\downarrow}_A \{B_i \mid i \in I\}$ *und* $\mathrm{Lstp}(d/B_i) = \mathrm{Lstp}(b_i/B_i)$ *für alle* i*.*

Beweis. Übung: Nehmen Sie an, daß die B_i Modelle sind, die A enthalten. Wähle ein Wohlordnung von I und zeige die Existenz von d durch rekursive Konstruktion von $p = \mathrm{tp}(d/\{B_i \mid i \in B_i\})$. □

L:nc2

Lemma 6.12. *Wenn* $a \mathop{\downarrow}_A b$ *und* $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$*, gibt es eine unendliche Morleyfolge über* A*, die* a *und* b *enthält.*

Beweis. Betrachte $p(x, a) = \mathrm{tp}(b/Aa)$. Wir konstruieren, anfangend mit $a_0 = a$ und $a_1 = b$, rekursiv eine lange unabhängige Folge (a_i) von Elementen, die alle denselben Lascartyp über A haben. Sei $(a_i \mid i < \alpha)$ schon konstruiert. Die Typen $p(x, a_i)$ werden von Elementen b_i realisiert, mit $b_i \mathop{\downarrow}_A a_i$ und $\mathrm{Lstp}(b_i/A) = \mathrm{Lstp}(a/A)$. Es gibt nach 6.11 ein a_α mit $a_\alpha \mathop{\downarrow}_A \{a_i \mid i < \alpha\}$, $\models p(a_\alpha, a_i)$ für alle $i < \alpha$ und $\mathrm{Lstp}(a_\alpha/A) = \mathrm{Lstp}(a/A)$. Wenn die Folge lang genug ist, gibt es nach 1.3 eine A–indiscernible Folge $(a'_i \mid i < \omega)$ mit $\models p(a'_j, a'_i)$ für alle $i < j$, die außerdem, weil alle Typen $(a'_j/A\{a'_i \mid i < j\})$ schon in (a_i) vorkommen, unabhängig über A ist. Weil $\mathrm{tp}(a'_1 a'_0/A) = \mathrm{tp}(ba/A)$, können wir annehmen, daß $a'_0 = a$ und $a'_1 = b$. □

Folgerung 6.13. $\mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$ *genau dann, wenn* $\mathrm{nc}^2_A(a,b)$.

Beweis. Wähle ein c mit $c \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_A ab$ und $\mathrm{Lstp}(c/A) = \mathrm{Lstp}(a/A) = \mathrm{Lstp}(b/A)$. Nach 6.12 ist $\mathrm{nc}(c,a)$ und $\mathrm{nc}(c,b)$. □

Folgerung 6.14. nc *ist typdefinierbar.*

Beweis.

$$\mathrm{nc}(x,y) \;\Leftrightarrow\; \exists z\,(\mathrm{nc}(x,z) \wedge \mathrm{nc}(z,y))$$

□

Es ist ein ungelöstes Problem, ob in einfachen Theorien, Lascartypen und starke Typen zusammenfallen.

7 Charakterisierung

independence_notion

Satz 7.1. *Sei T be a vollständige Theorie und $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A B$ eine unter Automorphismen invariante Relation zwischen endlichen Tupeln a und Parametermengen A und B mit den folgenden Eigenschaften:*

a) (Symmetrie) $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A b$ *genau dann, wenn* $b \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A a$.

b) (Monotonie und Transitivität) $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A BC$ *genau dann, wenn* $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A B$ *und* $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_{AB} C$.

c) (Existenz) *Für alle a, A und C gibt es ein a' mit* $\mathrm{tp}(a'/A) = \mathrm{tp}(a/A)$ *und* $a' \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A C$.

d) (Lokaler Charakter) *Es gibt eine Kardinalzahl κ, sodaß es für alle a und B eine Teilmenge $B_0 \subset B$ von kleinerer Mächtigkeit als κ gibt mit $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_{B_0} B$*

e) (Endlicher Charakter) $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A B$ *genau dann, wenn* $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A b$ *für alle Tupel $b \in B$.*

f) (Unabhängigkeitssatz über Modellen) *Sei M ein Modell, $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_M b$, $a' \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_M a$, $b' \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_M b$ und* $\mathrm{tp}(a'/M) = \mathrm{tp}(b'/M)$. *Dann gibt es ein c mit $c \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_M ab$,* $\mathrm{tp}(c/Ma) = \mathrm{tp}(a'/Ma)$ *und* $\mathrm{tp}(c/Mb) = \mathrm{tp}(b'/Mb)$.

Dann ist T einfach und es ist $\mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0 = \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}$.

Es ist klar, daß in einfachen Theorien die Relation $\mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}$ die Eigenschaften des Satzes hat (für $\kappa = |T|^+$).

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß aus Existenz folgt, daß $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A A$ und aus Transititivät, daß $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A C \;\Leftrightarrow a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A AC$.

Wir können annehmen, daß κ regulär ist; sonst ersetzen wir κ durch κ^+.

Nehmen wir nun an, daß $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}^0_A b$. Wir zeigen zuerst mit 3.2, daß $\mathrm{tp}(a/Ab)$ nicht über A teilt. Sei dazu $(b_i \mid i < \omega)$ eine Folge von Indiscernibels über A, die mit

$b = b_0$ beginnt.

Behauptung: Wir finden ein Modell $A \subset M$, sodaß $(b_i \mid i < \omega)$ indiscernibel über M ist und $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M \{b_j \mid j < i\}$ für alle i.

Beweis: Mit dem Standardlemma können die Folge zu einer Folge $(b_i \mid i \leq \kappa)$ fortsetzen. Außerdem ist es leicht, eine aufsteigende Folge von Modellen $A \subset M_0 \subset M_1 \dots$ zu konstruieren, sodaß für alle $i < \kappa$ alle b_j, $(j < i)$, in M_i enthalten sind und $(b_j \mid i \leq j \leq \kappa)$ indiscernibel über M_i ist. Wegen Lokaler Charakter gibt es ein i_0, sodaß $b_\kappa \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{M_{i_0}} \{b_j \mid i_0 \leq j < \kappa\}$. Wegen Indiscernibilität folgt, daraus, daß $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{M_{i_0}} \{b_j \mid i_0 \leq j < i\}$ für alle i. Wir nehmen M_{i_0} für M und die Folge $b_{i_0}, b_{i_0+1}, \dots$.

Behauptung: Wir können annehmen, daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M b$.

Beweis: Wir ersetzen mit Existenz a durch ein a' mit $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/AB)$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{Ab} M$ und wenden dann Monotonie und Transitivität an.

Wir können jetzt durch sukzessive Anwendung von Unabhängigkeitssatz über Modellen Elemente $a = a_0, a_1, \dots$ finden mit $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M \{b_j \mid j \leq i\}$, $q_i(x) = \mathrm{tp}(a_{i+1}/M\{b_j \mid j \leq i\}) = \mathrm{tp}(a_i/M\{b_j \mid j \leq i\})$ und $\mathrm{tp}(a_i b_i/M) = \mathrm{tp}(ab/M)$.[7] Es folgt, daß $\bigcup_{i<\omega} q_i(x)$ konsistent ist und alle $p(x, b_i)$ enthält, wobei $p(x, b) = \mathrm{tp}(a/Mb)$. Es folgt mit 3.2, daß $\mathrm{tp}(a/Ab)$ nicht über A teilt.

Es folgt jetzt aus Lokaler Charakter und 4.4, daß T einfach ist. Es bleibt zu zeigen, daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A b$, wenn $\mathrm{tp}(a/Ab)$ nicht über A teilt. Wir konstruieren mit Existenz eine sehr lange Folge $(b_i \mid i < \lambda)$, die $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A$-unabhängig ist und für die $\mathrm{tp}(b_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$. Wegen 1.3 (und Monotonie und 1.2) ergibt sich daraus eine A–indiscernible Folge $(b'_i \mid i < \kappa)$, die ebenfalls $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A$-unabhängig ist und $\mathrm{tp}(b'_i/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ und $b = b'_0$ erfüllt. Jetzt wenden wir 3.3 an und bekommen ein a' mit $\mathrm{tp}(a'/Ab) = \mathrm{tp}(a/Ab)$, sodaß $(b'_i \mid i < \kappa)$ indiscernible über Aa' ist. Lokaler Charakter und Monotonie ergeben die Existenz eines i_0, sodaß $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{A\{b'_i \mid i<i_0\}} b'_{i_0}$. Weil $b'_{i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A \{b'_i \mid i < i_0\}$, ergeben Symmetrie und Transitivität, daß $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A b'_{i_0}$. Daraus folgt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_A b$, weil $\mathrm{tp}(a' b'_{i_0}/A) = \mathrm{tp}(a' b'_0/A) = \mathrm{tp}(ab/A)$. □

Folgerung 7.2. *Die Theorie des Randomgraphs ist einfach*

Beweis. Definiere $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_B C$ durch $A \cap C \subset B$. □

[7] Sei $a_0 \dots, a_i$ schon konstruiert. Wähle ein a' mit $\mathrm{tp}(a' b_{i+1}/M) = \mathrm{tp}(ab/M)$. Wende den Unabhängigkeitssatz über Modellen an auf $\{b_j \mid j \leq i\} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M b_{i+1}$, $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M \{b_j \mid j \leq i\}$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_M b_{i+1}$, um a_{i+1} zu bekommen.

8 Pseudoendliche Körper

Definition 8.1. *Ein Körper K ist pseudo-algebraisch abgeschlossen (PAC), wenn jede über K definierte absolut irreduzible affine Varietät einen K–rationalen Punkt hat.*

Definition 8.2. *Eine Körpererweiterung L/K heißt regulär, wenn L und K^{alg} über K linear disjunkt sind.*

Beachte: Elementare Erweiterungen sind regulär.

L:pac **Lemma 8.3.** *Sei K ein Körper. Dann sind äquivalent*

L:pac:pac *a) K ist PAC,*

L:pac:pol *b) Sei $f(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n, T]$ absolut irreduzibel und vom Grad > 1 in T. Weiter sei $g \in K[X_1, \dots, X_n]$. Dann gibt es $(a, n) \in K^n \times K$ mit $f(a, b) = 0$ und $g(a) \neq 0$.*

L:pac:ec *c) K ist existentiell abgeschlossen in jeder regulären Körpererweiterung.*

Beweis. a)$\to$b): Sei $\mathfrak{C}$ ein großer algebraisch abgeschlossener Körper, der K enthält. Die Nullstellen von f definier eine absolut irreduzible Varietät $X \subset \mathfrak{C}^n \times \mathfrak{C}$ über K. Die Menge $V = \{(a, b, c) \mid f(a, b) = 0,\ g(a)c = 1\}$ ist dann ebenso absolut irreduzibel und über K definiert.

b)$\to$c): Sei L/K eine endlich erzeugte reguläre Erweiterung. Reguläre Erweiterungen sind *separabel*. Nach (10.4) finden wir eine Transzendenzbasis $\vec{a}$ von L/K, über der L separabel algebraisch ist. Es gibt also ein b, das separabel algebraisch über $K(\vec{a})$ ist, sodaß $L = K(a_1, \dots, a_n, b)$. Seien nun $c_1, \dots, c_m$ Elemente aus L, die irgenwelche Gleichungen aus über K erfüllen.[8] Wir suchen $c_i' \in K$, die dieselben Gleichungen erfüllen. Schreibe $c_i = \frac{h_i(\vec{a}, b)}{g(a)}$ für Polynome $h_i(\vec{x}, y)$ und $g(\vec{x})$ über K. Das Verschwindungsideal von $(\vec{a}, b)$ über K wird von einem $f(\vec{x}, y)$ erzeugt. f is absolut irreduzibel, weil L/K regulär ist. Es gibt $\vec{a}', b' \in K$ mit $f(\vec{a}', b') = 0$ und $g(\vec{a}', b') \neq 0$. Die $c_i' = \frac{h_i(\vec{a}', b')}{g(a')}$ erfüllen dann alle Gleichungen, die die c_i erfüllen.

c)$\to$a: Sei V abolut irrduzible Varietät über K. Sei $\vec{(c)} \in V$ generischer Punkt in $\mathfrak{C}$. Dann ist $K(\vec{c})/K$ regulär. □

Folgerung 8.4. *„PAC“ ist eine elementare Eigenschaft.*

Beweis. Absolut irreduzibel zu sein ist eine elementare Eigenschaft der Koeffizienten von K, weil die Theorie der algebraisch abgeschlossen Körper Quantorenelimination hat. □

Definition 8.5. *Ein perfekter Körper K heißt prozyklisch, wenn K in K^{alg} für jedes n höchstens eine Erweiterung vom Grad n hat. Wenn K für jedes $n \geq 1$ genau eine Erweiterung in K^{sep} hat, heißt K 1–frei.*

[8] Weil wir in Körpern arbeiten, brauchen wir keine Ungleichungen.

Man sieht leicht, daß „prozyklisch“ eine elementare Eigenschaft von K ist.

Lemma 8.6. *Ein perfekter Körper K ist genau dann prozyklisch, wenn* $\mathrm{G}(K)$ *prozyklisch ist, und* 1*–frei, wenn* $\mathrm{G}(K) = \widehat{\mathbb{Z}}$

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 9.6. □

Definition 8.7. *Ein prozyklischer PAC–Körper K heißt pseudoendlich.*

Bemerkung. *“Pseudoendlich” ist eine elementare Eigenschaft. Aus dem Satz von Weil über rationale Punkte in endlichen Körper folgt, daß jedes unendliche Ultraprodukt von endlichen Körpern pseudoendlich ist.*

Proposition 8.8. *Sei K perfekt und L/K eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

a) L/K regulär,

b) K ist relativ algebraisch abgeschlossen in L,

c) Die natürliche Abbildung $\mathrm{G}(L) \to \mathrm{G}(K)$ *ist surjektiv.*

Beachte: wenn L/K regulär und L perfekt, dann ist auch K perfekt.

F:efrei **Folgerung 8.9.** *Sei L/K regulär, L sei prozyklisch und K 1–frei. Dann ist auch L 1–frei. Sei weiter N/L eine Erweiterung von L, für die N/K regulär ist, dann ist auch N/L regulär.*

Beweis. Wenn $\mathrm{G}(L)$ prozyklisch ist und $\pi : \mathrm{G}(L) \to \widehat{\mathbb{Z}} = \mathrm{G}(K)$ surjektiv, dann ist π ein Isomorphismus. Sei $\rho : \mathrm{G}(N) \to \mathrm{G}(L)$ die natürliche Abbildung. Wenn $\rho\pi$ surjektiv ist, ist auch ρ surjektiv. □

Lemma 8.10. *Jeder prozyklische Körper hat eine pseudoendliche reguläre Körpererweiterung.*

Beweis. Sei K prozyklisch. Finde eine reguläre Erweiterung L, die eine (unendliche) Galoiserweiterung L' mit Galoisgruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ hat. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(K^{\mathrm{alg}}L'/L)$ so gewählt, daß es auf K^{alg}/K und L'/L jeweils die Galoisgruppe erzeugt. Setze σ zu $\sigma' \in \mathrm{Aut}(L^{\mathrm{alg}}/L)$ fort und betrachte den Fixkörper L'' von σ''. L''/K ist eine 1–freie reguläre Erweiterung von K. Man konstruiert nun leicht, mit einer langen Kette, ein reguläre Erweiterung prozyklische Erweiterung N von L'', die existentiell abgeschlossen ist in allen regulären prozyklischen Erweiterungen. N ist wieder 1–frei. Um zu zeigen, daß N PAC ist, betrachten wir eine reguläre Erweiterung N' von N. $\sigma \in \mathrm{G}(N')$ sei ein Urbild eines Erzeugers von $\mathrm{G}(N)$ und N'' Fixkörper von σ in ${N'}^{\mathrm{alg}}$. Dann ist N'' reguläre prozyklische Erweiterung von N. Weil nach Konstruktion N existentiell abgeschlossen in N'' ist, ist N auch existentiell abgeschlossen in N'. □

L:amalg

Lemma 8.11. *Pseudoendliche Körper haben die Amalgamierungseigenschaft in bezug auf reguläre Einbettungen: Wenn L_1/K und L_2/K reguläre prozyklische Erweiterungen von K sind, gibt es einen gemeinsamen prozyklischen Oberkörper H, der L_1 und L_2 regulär erweitert. Wir finden H sogar so, daß L_1 und L_2 über K linear disjunkt sind.*

Beweis. Sei K prozyklisch und L_1 und L_2 zwei reguläre prozyklische Erweiterungen. Wir können annehmen, daß die L_i in einem gemeinsamen Oberkörper über K algebraisch unabhängig sind. Sei σ ein Erzeugendes von $\mathrm{G}(K)$. Lifte σ zu Erzeugenden σ_i von $\mathrm{G}(L_i)$, das geht in prozyklischen Gruppen immer. Wegen der algebraischen Unabhängigkeit sind L_1 und L_2 linear disjunkt (10.5). Also[9] erzeugen die σ_i einen Automorphismus von $L_1^{\mathrm{alg}}L_2^{\mathrm{alg}}$, den wir zu einem Automorphismus τ von $(L_1L_2)^{\mathrm{alg}}$ fortsetzen. Der Fixköper von τ ist prozyklisch und reguläre Erweiterung von L_1 und L_2. □

P:pe-einbettung

Proposition 8.12. *L_1 und L_2 seien prozyklische Erweiterungen von K und L_2 pseudoendlich. Dann ist L_1 über K regulär einbettbar in eine elementare Erweiterung von L_2.*

Beweis. Sei N eine (o.E.) gemeinsame reguläre prozyklische Erweiterung der L_i. Als reguläre prozyklische Erweiterung von L_2 ist N 1–frei (nach 8.9). Weil L_2 exististentiell abgschlossen in N ist, ist N über L_2 in eine elementare Erweiterung L_2' von L_2 einbettbar. Sei N' das Bild dieser Einbettung. Aus 8.9 folgt, daß L_2'/N' regulär ist. □

S:el_aeq

Satz 8.13. *L_1 und L_2 seien reguläre pseudoendliche Erweiterungen von K. Dann sind L_1 und L_2 über K elementar äquivalent.*

Beweis. 8.12 liefert eine abwechselnd elementare Kette, deren Vereinigung eine elementare Erweiterung von L_1 und von L_2 ist. □

Folgerung 8.14. *Sei L pseudoendlich und* $\mathrm{Abs}(L)$ *der relative algebraische Abschluß der Primkörpers in L, der Absolutteil von L. Dann ist die elementare Theorie von L bestimmt durch den Isomorphietyp von* $\mathrm{Abs}(L)$*. Ein über seinem Primkörper algebraischer Körper K ist genau dann Absolutteil eines pseudoendlich Körpers, wenn K prozyklisch ist (das ist in endlicher Charakteristik immer der Fall).*

Wir fixieren für das folgende eine vollständige Theorie eines pseudoendlichen Körpers und arbeiten im Monstermodell.

Folgerung 8.15. *Sei K ein Unterköper von $\mathfrak{C}$, a und b zwei Tupel von Elementen von $\mathfrak{C}$. Dann haben (in $\mathfrak{C}$) a und b genau dann den gleichen Typ über K, wenn die relativen algebraischen Abschlüsse von $K(a)$ und $K(b)$ über K isomorph sind, vermöge eines Isomorphismus, der a in b überführt.*

[9]Denn $L_1^{\mathrm{alg}}L_2^{\mathrm{alg}}$ ist der Quotientenköper des Tensorprodukts von L_1^{alg} und L_2^{alg} über K^{alg}.

Beweis. Sei A und B die relativen algebraischen Abschlüsse. Wenn a und b den gleichen Typ über K haben, sind A und B wie angegeben isomorph, wegen 10.6. Wenn umgekehrt A und B über K isomorph sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus 8.13. $\square$

Satz 8.16. *Die algebraische Unabhängigkeit in einem pseudoendlichen Körper hat alle in 7.1 aufgeführten Eigenschaften.*

Beweis. Wir arbeiten im Monstermodell $\mathfrak{C}$ einer vollständigen Theorie von pseudoendlichen Körpern. Alle Eigenschaften sind klar, bis auf (Existenz) und (Unabhängigkeitssatz über Modellen). Zur Existenz: Sei K ein Unterkörper von $\mathfrak{C}$ und L und H zwei Erweiterungen von K. Wir können annehmen, daß alle drei Körper in $\mathfrak{C}$ relativ algebraisch abgeschlossen sind. Es gibt nun nach 8.11, zunächst außerhalb von $\mathfrak{C}$ eine prozyklische Erweiterung C von H, die eine von H über K unabhängige Kopie L' von L/K enthält, sodaß C/L' regulär ist. Nach 8.12 ist C über H regulär in $\mathfrak{C}$ einbettbar. Sei L'' das Bild von L' in $\mathfrak{C}$. Dann sind L'' und H über K unabhängig und L'' und L haben über K denselben Typ.

Nun zum Unabhängigkeitssatz. Sei M ein Modell, K und L seien zwei über M unabhangige Körperweiterungen. Weiter seien zwei Erweiterungen K' und L' gegeben, sodaß sowohl K und K' als auch L und L' über M unabhängig sind. Außerdem sollen K' und L' denselben Typ über M haben.

Wir können annehmen, daß alle fünf betrachteten Körper in $\mathfrak{C}$ relativ algebraisch abgeschlossen sind. Wir fügen nun, außerhalb von $\mathfrak{C}$, den drei Körpern M, K und L eine Körpererweiterung H/M hinzu, die von KL über M unabhängig ist und isomorph zu K'/M und L'/M ist. Dann sind jeweils KK' und KH, und LL' und LH über M isomorph (alle Isomorphismen sind kompatibel).

Sei σ Erzeugendes von $\mathrm{G}(M)$. Wegen 8.9 setzt sich eindeutig auf $\mathrm{G}(K)$, $\mathrm{G}(L)$ und $\mathrm{G}(H)$ fort. Sei $\bar{\sigma}$ die Fortsetzung von σ auf $\mathrm{G}(\mathfrak{C})$. Die Einschränkungen von $\bar{\sigma}$ liefern Automorphismen $\kappa \in \mathrm{G}(KL)$, $\lambda \in \mathrm{G}(KH)$ und $\mu \in \mathrm{G}(LH)$. Diese Automorphismen stimmen auf K^{alg}, L^{alg} und H^{alg} überein. Weil $(KH)^{\mathrm{alg}}$ und $(LH)^{\mathrm{alg}}$ über H^{alg} unabhängig sind, fügen sich λ und μ zu einem Automorphismus κ' von $(KH)^{\mathrm{alg}}(LH)^{\mathrm{alg}}$ zusammen. κ' stimmt auf $K^{\mathrm{alg}}L^{\mathrm{alg}}$ mit κ überein. Aus 10.7 folgt, daß sich κ' und κ zu einem Automorphismus von $(KH)^{\mathrm{alg}}(LH)^{\mathrm{alg}}(KL)^{\mathrm{alg}}$ zusammenfügen. Wir setzen diesen Automorphismus zu einem Automorphismus τ von $(KLH)^{\mathrm{alg}}$ fort. Sei C der Fixkörper von K. C ist prozyklisch. Die relativen algebraischen Abschlüsse von KL, KH und LH in C sind isomorph zu den relativ algebraischen Abschlüssen von KL, KK' und LL' in $\mathfrak{C}$. Wir betten C über KL in $\mathfrak{C}$ ein. Dann hat das Bild von H die im Unabhängigkeitssatz geforderten Eigenschaften. $\square$

Folgerung 8.17. *Pseudoendlichen Körper sind einfach. Die Forkingunabhängigkeit stimmt mit der algebraischen Unabhängigkeit überein.*

9 Anhang: Profinite Gruppen

Definition 9.1. *Eine profinite Gruppe ist eine topologische Gruppe mit einer Umgebungsbasis der* 1 *aus Untergruppen.*

Lemma 9.2. *Profinite Gruppen lassen sich darstellen als*

- *Permutationsgruppen, für die alle Orbits endlich sind, mit der Topologie der endlichen Konvergenz.*
- *inverse Limites von endlichen Gruppen.*

Definition 9.3. *Eine profinite Gruppe heißt prozyklisch, wenn alle endlichen (stetigen) Quotienten zyklisch sind.*

Lemma 9.4. *Sei G eine profinite Gruppe. Dann sind äquivalent:*

a) G ist inverser Limes von zyklischen Gruppen.

b) G wird (topologisch) von einem Element erzeugt.

Definition 9.5. $\widehat{\mathbb{Z}}$ *ist der inverse Limes aller* $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, *($n \neq 0$).*

L:G_prozyklisch **Lemma 9.6.** *Eine proendliche Gruppe G ist genau dann prozyklisch, wenn sie für jedes $n > 0$ höchstens einen Quotiente der Ordung n hat. G ist genau isomorph zu $\widehat{\mathbb{Z}}$, wenn G für jedes $n > 0$ genau eine Quotienten der Ordnung n hat.*

Beweis. Wir zeigen, daß eine endliche G Gruppe genau dann zyklisch ist, wenn sie für jedes m höchsten eine Untergruppe der Ordnung m hat: Weil konjugierte Untergruppen die gleiche Mächtigkeit haben, sind alle Untergruppen normal. Als sind die Sylowgruppen normal und G ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen. Wir können also annehmen, daß G eine p–Gruppe ist. Sei H eine maximale zyklische Untergruppe von G. Wenn H ungleich G ist, gibt es ein $a \in G$ mit $pa \in H$. Wenn $pa = ph$ für ein $h \in H$, hätten die Gruppen $\langle h \rangle$ und $\langle a \rangle$ dieselbe Ordnung, was nicht geht. Also ist pa ein Erzeugendes von H und es folgt, daß $H \subset \langle a \rangle$. Widerspruch. □

Lemma 9.7. *Sei $G \to H$ ein Homorphismus prozyklischer Gruppen. Dann läßt sich jedes Erzeugende von H zu einem Erzeugenden von G liften.*

Beweis. Wir beweisen das für endliche G und H: G und H schreiben sich eindeutig als direkte Summen von p–Gruppen. Wir können also annehmen, daß G und H p–Gruppen sind. Wenn $H = 0$, wählen wir als Urbild irgendeinen Erzeuger. Wenn $H \neq 0$, ist jedes Urbild eines Erzeugers von H auch ein Erzeuger von G. □

10 Anhang: Körpertheorie

Lemma 10.1. *Sei K ein Körper. Es gibt eine Bijektion zwischen Isomorphietypen von n-erzeugten Körpererweiterungen*[10] $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ *und Primidealen P in $K[X_1, \ldots, X_n]$.*

Ein Ideal P heißt absolut prim, wenn P in $K^{\mathrm{alg}}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal erzeugt.

Lemma 10.2. *Im letzte Lemma entsprechen reguläre Körperwereiterungen absoluten Primidealen.*

Definition 10.3. *Separable Körpererweiterungen*

L:sep_basis

Lemma 10.4. $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ *ist genau dann separabel über K, wenn man aus den a_i eine Tranzendenzbasis $\vec{a}$ von L/K auswählen kann, sodaß L separabel algebraisch über $K(\vec{a})$ ist.*

L:unab_disjunkt

Lemma 10.5. *Wenn L/K separabel und H/K algebraisch unabhängig von L/K über K, sind L und H über K linear disjunkt.*

Beweis. Sei l_i aus L, $h_i \in H$ und $\sum_{i<n} l_i h_i = 0$. Weil L und H über K^{alg} unabhängig sind, ist $\mathrm{tp}(L/K^{\mathrm{alg}}H)$ Erbe von $\mathrm{tp}(L/K^{\mathrm{alg}})$. Es folgt, daß es $h'_i \in K^{\mathrm{alg}}$ gibt mit $\sum_{i<n} l_i h'_i = 0$. Weil L/K regulär, gibt es $h''_i \in K$ gibt mit $\sum_{i<n} l_i h''_i = 0$. □

L:isomorphe_koerper

Lemma 10.6. *Zwei algebraische Körpererweiterung von K sind genau dann über K isomorph, wenn in beiden Erweiterungen die gleichen $f \in K[X]$ eine Nullstelle haben.*

Beweis. Seien L_1 und L_2 zwei algebraische Erweiterungen von K, die die Bedingung erfüllen. Zunächst ist klar, daß die relativen perfekten Abschlüsse H_i von K in den L_i isomorph sind. Wir können annehmen, daß $H_1 = H_2 = H$. Dann haben wieder die gleichen Polynome über H Nullstellen in L_1 und L_2. Jetzt ist aber jede : Beweis stimmt nicht. □

L:H-C

Lemma 10.7 (Hrushovski-Chatzidakis)**.** *K, L, H seien algebraisch abgeschlossene Körpererweiterungen des algebraisch abgeschlossenen Körpers M. H sei über M unabhängig von KL. Dann ist*

$$\big((KH)^{\mathrm{alg}}(LH)^{\mathrm{alg}}\big) \cap (KL)^{\mathrm{alg}} = KL.$$

Beweis. Wir arbeiten in einem großen algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei c ein Element der rechten Seite. Dann gibt gibt es Tupel $a \in (KH)^{\mathrm{alg}}$ und $b \in^{\mathrm{alg}} (LH)$ mit $c \in \mathrm{dcl}(a, b)$. Das sei bezeugt durch $\models \phi(a, b, c)$. Dann gibt es Tupel $a' \in K$ und $h_1 \in H$, sodaß a algebraisch ist über $a'h_1$. Das sei bezeugt durch $\models$

[10] Das ist nichts anderes als $\mathrm{S}_n(K)$ in der Theorie des algebraischen Abschlusses von K.

$\phi_1(a, a', h_1)$. Für b finden wir analog $\models \phi_2(b, b', h_2)$. Wegen der Unabhängigkeit und der Erbeneigenschaft gibt es $h'_i \in M$ mit

$$\models \exists x, y \phi(a, x, y) \wedge \phi_1(x, a', h'_1) \wedge \phi_2(y, b', h'_2).$$

Daraus folgt $c \in KL$. $\square$

Index