Einführung in die Funktionentheorie[1]

Martin Ziegler

Freiburg, WS 1994/95, WS 2000/01, SS 2006

Literatur

[1] Klaus Jänich. *Funktionentheorie.* Springer Verlag, 1993.

[2] H.Behnke und F.Sommer. *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Heidelberger Taschenbücher. Springer Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.

Inhaltsverzeichnis

1 Holomorphe Funktionen **2**

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen 2

1.2 Komplex differenzierbare Funktionen 3

1.3 Potenzreihen 4

1.4 Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen 5

2 Der Cauchysche Integralsatz **6**

2.1 Der Satz von Goursat 6

2.2 Der Cauchysche Integralsatz 9

2.3 Der Logarithmus 10

3 Erste Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz **11**

3.1 Die Cauchyformel 11

3.2 Der Potenzreihenentwicklungssatz 12

3.3 Der Riemannsche Hebbarkeitssatz 14

3.4 Topologische Eigenschaften holomorpher Funktionen 15

[1]funktion.total.tex,v 1.11, 26. Juli 2006, (Ausdruck 26. Juli 2006)

4 **Isolierte Singularitäten** **17**

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten 17

4.2 Meromorphe Funktionen und die Riemannsche Zahlkugel 18

5 **Der Residuensatz** **20**

5.1 Laurentreihen 20

5.2 Der Residuensatz 22

5.3 Der Residuenkalkül 23

5.4 Die Umlaufszahlversion des Residuensatzes 25

5.5 Das Null– und Polstellen zählende Integral 29

6 **Folgen holomorpher Funktionen** **31**

6.1 Stetige Funktionen auf topologischen Räumen 31

6.2 Holomorphe Funktionen 32

7 **Der Satz von Mittag-Leffler und der Weierstraßsche Produktsatz** **33**

7.1 Der Satz von Mittag-Leffler 33

7.2 Der Weierstraßsche Produktsatz 35

8 **Der Riemannsche Abbildungssatz** **37**

8.1 Exkurs 1: Möbiustransformationen 40

8.2 Exkurs 2: Riemannsche Flächen 44

9 **Doppelt–periodische Funktionen** **48**

9.1 Divisoren doppelt–periodischer Funktionen 48

9.2 Funktionen mit vorgeschriebenen Null– und Polstellen 50

9.3 Der Körper der doppelt–periodischen meromorphen Funktionen 53

9.4 Die zugeordnete algebraische Kurve 55

1 Holomorphe Funktionen

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Satz 1.1 *Die euklidische Ebene* $\mathbb{R}^2$ *wird mit der (Vektor-) Addition*

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

und der Multiplikation

$$(a,b)(x,y) = (ax - by, ay + bx)$$

zu einem Körper, dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. □

Wenn man reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert, erhält man $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$. Mit $\mathrm{i} = (0,1)$ läßt sich dann jede komplexe Zahl eindeutig in der Form

$$z = a + b\,\mathrm{i} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

schreiben. Man nennt a den *Realteil* $\mathrm{Re}(z)$ und b den *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z)$ von z.

Um sich das Multiplikationsgesetz zu merken, genügt es zu wissen, daß $\mathrm{i}^2 = -1$. Weil $-\mathrm{i}$ die gleiche Eigenschaft hat, ist die Konjugation $\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\overline{a + b\,\mathrm{i}} = a - b\,\mathrm{i},$$

ein Automorphismus von $\mathbb{C}$. Man erhält das Quadrat der Länge $|z|$ von z als

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z\,\overline{z}.$$

Es folgt, daß der *Betrag* $|z|$ multiplikativ ist:

$$|wz| = |w||z|.$$

Eine komplexe Zahl z ist bestimmt durch ihren Betrag $r = |z|$ und den Winkel $0 \leq \phi < 2\pi$, den sie mit reellen Achse bildet:

$$z = r\cos(\phi) + r\sin(\phi)\,\mathrm{i}.$$

Man nennt ϕ das *Argument*[2] $\arg(z)$ von z. Aus dem Additionstheorem für Sinus und Cosinus folgt

$$\arg(wz) \equiv \arg(w) + \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Multiplikation mit z

$$\mu_z(w) = wz$$

ist also eine Drehstreckung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Als $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat μ_z die Matrix

$$r\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition *f heißt komplex differenzierbar bei $z_0 \in U$, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Wenn f überall in U komplex differenzierbar ist, heißt f holomorph.

[2] $\arg(0)$ ist undefiniert

Beispiel: $f(z) = z^n$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = n\, z^{n-1}$.

Lemma 1.2 *Wenn f und g holomorph sind, sind auch $f + g$, fg, f/g und $f \circ g$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen holomorph. Es gilt*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f \circ g)'(z) &= f'(g(z))g'(z) \end{aligned}$$

□

Es folgt, daß alle rationalen Funktionen holomorph sind.

1.3 Potenzreihen

Für den *Konvergenzradius*

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und ihren *Konvergenzkreis* $\{z \mid |z| < \rho\}$ gilt wie im Reellen

Lemma 1.3 *Die Reihe divergiert für alle z mit größerem Betrag als ρ und konvergiert für alle z im Konvergenzkreis. Auf jedem kleineren Kreis $\{z \mid |z| \leq \rho'\}$ $\quad (\rho' < \rho)$ konvergiert die Reihe gleichmäßig.* □

Innerhalb des Konvergenzkreises konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ also gegen eine stetige Funktion $f(z)$.

Satz 1.4 *f(z) ist (im Konvergenzkreis) holomorph. Es ist*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Die Potenzreihe für $f'(z)$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe für $f(z)$. □

Es folgt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Die Potenzreihe ist also durch f eindeutig bestimmt.

Wir haben hier Potenzreihen bei 0 betrachtet. Der gleiche Satz gilt natürlich für Potenzreihen bei z_0,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit Konvergenzkreis

$$\{z \mid |z - z_0| < \rho\}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ ist unendlich. Also ist die *Exponentialfunktion*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Holomorphe Funktionen, die auf $\mathbb{C}$ definiert sind, heißen *ganze* Funktionen. Die ganzen Funktionen sin und cos sind definiert durch

$$\begin{aligned}\sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Statt $\exp(z)$ schreibt man auch e^z. Man sieht leicht, daß $\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w \mathrm{e}^z$ und $\mathrm{e}^{z\,\mathrm{i}} = \cos(z) + \sin(z)\,\mathrm{i}$. Es folgt, daß für reelle Zahlen x, y

$$\mathrm{e}^{x+y\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \sin(y)\,\mathrm{i}).$$

1.4 Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ist differenzierbar bei z_0, wenn es eine lineare Abbildung $\mathrm{D}f(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so daß sich $f(z)$ der affinen Abbildung

$$f(z_0) + \mathrm{D}f(z_0)(z - z_0)$$

in der Nähe von z_0 anschmiegt. Das heißt, daß

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \mathrm{D}f(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Als Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aufgefaßt ist f also genau dann komplex differenzierbar, wenn $\mathrm{D}f(z_0)$ komplex linear, also die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, nämlich mit $f'(z_0)$, ist.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Realteil und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Imaginärteil von f, so daß also

$$f(x + y\,\mathrm{i}) = u(x, y) + v(x, y)\,\mathrm{i}.$$

Dann gilt

Satz 1.5 (Cauchy–Riemann Differentialgleichungen)
f ist genau dann bei $z_0 = x_0 + y_0\,\mathrm{i}$ komplex differenzierbar, wenn f differenzierbar ist und bei (x_0, y_0) die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

gelten. Es ist dann $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)\,\mathrm{i}$. □

Faßt man f als komplexwertige, auf $U \subset \mathbb{R}^2$ definierte Funktion auf, ist $f_x = u_x + v_x\,\mathrm{i}$, $f_y = u_y + v_y\,\mathrm{i}$ und die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen haben die Form

$$f_y = \mathrm{i} f_x.$$

Es ist dann (natürlich) $f' = f_x$.

Wir werden später sehen, daß holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Realteil und Imaginärteil einer holomorphe Funktion sind also *harmonische* Funktionen. Das heißt, es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Gibt man sich eine harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vor, ist das Vektorfeld $(-u_y, u_x)$ rotationsfrei. Es gibt also eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Funktion v mit $(v_x, v_y) = (-u_y, u_x)$, das heißt eine holomorphe Funktion mit Realteil u.

2 Der Cauchysche Integralsatz

2.1 Der Satz von Goursat

Eine holomorphe Funktion F heißt *Stammfunktion* von f, wenn $F' = f$. Wenn F existiert, und der Definitionsbereich von f zusammenhängend ist, ist F bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Satz 2.1 *Eine holomorphe Funktion hat lokale Stammfunktionen.*

Beweis: Sei $z_0 = x_0 + y_0\,\mathrm{i}$ ein beliebiges Element des Definitionsbereichs U von f und U_0 eine kreisförmige Umgebung von z_0, die ganz zu U gehört. Wir machen für $x + y\,\mathrm{i} \in U_0$ den Ansatz

$$F(x + y\,\mathrm{i}) = \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} \mathrm{i} f(x, t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei wir f als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ auffassen[3]. Man rechnet sofort nach, daß $F_y = \mathrm{i} f$. Wenn nun f *stetig* differenzierbar ist, kann man die partielle Ableitung mit dem Integral vertauschen und man erhält tatsächlich (mit Hilfe der Cauchy–Riemann Gleichung)

$$F_x = f(x, y_0) + \frac{\partial \left(\int_{y_0}^{y} \mathrm{i} f(x,t)\,\mathrm{d}t \right)}{\partial x}$$

[3] Also $f(x, y) = f(x + y\,\mathrm{i})$

$$\begin{aligned} &= f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} \mathrm{i} f_x(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} f_y(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x,y). \end{aligned}$$

F ist differenzierbar, weil die beiden partiellen Ableitungen von F stetig sind. F ist holomorph, weil $F_y = \mathrm{i}F_x$. Es ist $F' = f$, weil $F_x = f$. Wir sind also fertig, wenn f stetig differenzierbar ist. (Später werden wir sehen, daß holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar sind.)

Ohne die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von f wenden wir das unten stehende Lemma 2.2 von Goursat an, um zu sehen, daß

$$F(x+y\,\mathrm{i}) = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} \mathrm{i} f(x_0,t)\,\mathrm{d}t,$$

wie es ja auch sein müßte. Daraus folgt dann sofort $F_x = f$. □

Die betrachten Integrale sind Spezialfälle des *komplexen Kurvenintegrals.*

Definition *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist das Kurvenintegral*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beispiel:
Sei $z = x_0 + y_0\,\mathrm{i}$. Dann ist für die Kurven $\gamma_1 : [x_0,x] \to U$, und $\gamma_2 : [y_0,y] \to U$, definiert durch $\gamma_1(s) = s + y_0\,\mathrm{i}$ und $\gamma_2(t) = x + t\,\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,\mathrm{d}s \\ \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{y_0}^{y} \mathrm{i} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Diese Definition erweitert sich auf natürliche Weise auf stetige Kurven, die nur stückweise stetig differenzierbar sind: Wenn sich γ aus den stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ zusammensetzt, ist

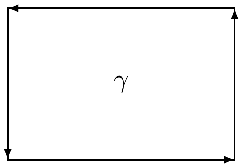
$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Man verifiziert leicht die folgenden Eigenschaften des Integrals:

- $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung von γ ab. Wenn man die Kurve rückwärts durchläuft, kehrt sich das Vorzeichen des Integrals um.
- Wenn f eine Stammfunktion F hat und γ die Punkte z_1 und z_2 verbindet, ist $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$.

- Wenn $l := \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$ die Länge von γ ist, und $|f(z)|$ entlang γ durch M beschränkt ist, ist
$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq l \cdot M.$$

Lemma 2.2 (Goursat) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und γ die Randkurve eines in U liegenden Rechtecks.*



Dann ist $\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Beweis: Wir nennen das von γ umschriebene Rechteck R_0. Wenn wir R_0 durch Seitenhalbierung in vier gleich große Rechtecke mit Randkurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ unterteilen, ist $I_0 := \int\limits_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z$. Also gilt für das Integral I_1 über eine dieser Kurven
$$|I_1| \geq 4^{-1}|I_0|.$$
R_1 sei das von dieser Kurve umschriebene Rechteck.

Wir setzen dieses Verfahren mit R_1 fort und erhalten so eine absteigende Folge $R_0, R_1, \ldots$ von Rechtecken mit
$$|I_n| \geq 4^{-n}|I_0|,$$
wobei I_n das Integral von f über die Randkurve von R_n ist. Für die Umfänge und Durchmesser gilt $U_n = 2^{-n}U_0$ und $D_n = 2^{-n}D_0$.

z_0 sei der Punkt, der in allen R_n enthalten ist. Wir schreiben
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z)(z - z_0)$$
für eine stetige Funktion mit $\phi(z_0) = 0$. Weil die ersten beiden Summanden eine Stammfunktion haben, ist I_n das Integral von $\phi(z)(z - z_0)$ über den Rand von R_n. Wenn $|\phi(z)|$ auf R_n durch M beschränkt ist, hat man die Abschätzung
$$|I_n| \leq M \cdot D_n \cdot U_n = 4^{-n}M \cdot D_0 \cdot U_0.$$
Es folgt also
$$|I_0| \leq M \cdot D_0 \cdot U_0.$$
Weil wir M für große n beliebig klein wählen können, ist $I_0 = 0$. □

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Satz 2.1 erlaubt es uns das Kurvenintegral $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z$ einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ entlang einer beliebigen stetigen Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ zu definieren. Wir zerteilen $[a,b]$ in kleine Teilintervalle $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, so daß $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ in einer offenen Teilmenge U_i liegt, in der f eine Stammfunktion F_i hat. Wir setzen dann

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \sum_{i<n} \left(F_i(\gamma(a_{i+1})) - F_i(\gamma(a_i))\right).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der U_i und der F_i ab, weil Stammfunktionen auf zusammenhängenden offenen Mengen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind[4] Die Definition hängt auch nicht von der Wahl der Unterteilung ab. Denn wenn man die Unterteilung zum Beispiel dadurch verfeinert, daß man das Intervall $[a_i, a_{i+1}]$ durch $a_i < c < a_{i+1}$ zerteilt, wählt man U_i als offene zusammenhängende Umgebung von $\gamma([a_i, c])$ und $\gamma([c, a_{i+1}])$ und hat dann

$$F_i(\gamma(a_{i+1})) - F_i(\gamma(a_i)) = (F_i(\gamma(a_{i+1})) - F_i(\gamma(c))) + (F_i(\gamma(c)) - F_i(\gamma(a_i))).$$

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven stimmt die neue Definition mit der alten überein.

Zwei Kurven $\gamma : [a,b] \to U$ und $\gamma' : [a,b] \to U$ mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt heißen *homotop*, wenn es eine stetige Familie $u_s : [a,b] \to U$ $(s \in [0,1])$ von Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gibt, so daß $u_0 = \gamma$ und $u_1 = \gamma'$. ((u_s) ist eine stetige Familie, wenn $u_s(t)$ stetige Funktion der zwei Variablen s und t ist.)

Satz 2.3 *Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist und γ und γ' zwei (in U) homotope Kurven sind, ist* $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma'} f\,\mathrm{d}z$

Definition *Eine geschlossene Kurve, die in U zu einer konstanten Kurve homotop ist, heißt in U zusammenziehbar.*

Folgerung 2.4 (Cauchyscher Integralsatz) *Wenn γ eine geschlossene, (in U) zusammenziehbare Kurve ist, ist* $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z = 0$.

Beweis von Satz 2.3:
Sei $u : [a,b] \times [0,1] \to U$ definiert durch $u(t,s) = u_s(t)$. Das Integral von $f(u(t,s))$ über die Randkurve des Rechtecks $R = [a,b] \times [0,1]$ ist die Differenz der beiden Integrale $\int_\gamma f\,\mathrm{d}z$ und $\int_{\gamma'} f\,\mathrm{d}z$. Wenn man R in kleine Rechtecke $R_1, \ldots, R_n$ einteilt, ist die Summe der Integrale über die Randkurven der R_i gleich dem Integral über den Rand von R. Wenn die R_i klein genug sind, sind die $f(u(\partial R_i))$ in offenen Mengen enthalten, auf denen f eine Stammfunktion hat. Die Integrale über die ∂R_i sind dann 0. □

[4] Seien F_i und F_i' Stammfunktionen von f auf offenen Umgebung U_i und U_i' von $\gamma([a_i, a_{i+1}])$. In $U_i \cap U_i'$ gibt es eine zusammenhängende Umgebung U_i'' von $\gamma([a_i, a_{i+1}])$. Auf U_i'' unterscheiden sich F_i und F_i' nur durch eine additive Konstante.

Wenn γ nicht zusammenziehbar ist, kann das Integral ungleich 0 sein. Zum Beispiel ist für eine positiv durchlaufene Kreislinie γ um 0,[5]

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}.$$

Definition *Ein wegweise–zusammenhängender topologischer Raum*[6] *X ist einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ zu einem Punkt zusammenziehen läßt.*

Satz 2.5 *Eine holomorphe Funktion mit einfach zusammenhängendem Definitionsbereich hat eine Stammfunktion.*

Beweis: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Fixiere ein $z_0 \in U$ und setze $F(z) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für eine beliebige Kurve von z_0 nach z. □

2.3 Der Logarithmus

Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{C}$ auf die *punktierte Ebene* $\mathbb{C}^\bullet := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab. Zwei komplexe Zahlen werden auf das gleiche Element abgebildet, wenn sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathrm{i}$ unterscheiden. Die Exponentialfunktion ist also lokal injektiv.

Definition *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\bullet$ eine Kurve in $\mathbb{C}^\bullet$. Eine Kurve $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Logarithmus von γ, wenn $\exp(\lambda(t)) = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$.*

Weil exp eine unverzweigte Überlagerung der punktierten Ebene ist, hat jede Kurve in $\mathbb{C}^\bullet$ einen Logarithmus:

Satz 2.6 *Jede Kurve γ in $\mathbb{C}^\bullet$ hat einen Logarithmus λ. λ ist eindeutig bestimmt, wenn man den Anfangspunkt $\lambda(a)$, der irgendeine Zahl z mit $\exp(z) = \gamma(a)$ sein kann, vorgibt.*

Beweis: Auf der linksgeschlitzten komplexen Ebene $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ hat exp eine stetige Umkehrfunktion, den *Hauptzweig* log des Logarithmus. Es ist $\log(z) = w$, wenn $\mathrm{e}^z = w$ und $-\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi$. Wenn γ ganz in U verläuft, ist $\lambda = \log \circ \gamma$ ein Logarithmus von γ. Alle anderen Logarithmen von γ bekommt man durch Addieren eines ganzzahligen Vielfaches von $2\pi\,\mathrm{i}$.
Wenn γ in der rechtsgeschlitzten Ebene $U' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt, verwendet man entsprechend $\log^*$, wobei $\log^*(w) = z$, wenn $\mathrm{e}^z = w$ und $0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi$. Für beliebiges γ teilt man $[a,b]$ in Intervalle $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, so daß alle Kurven $\gamma \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ ganz in U oder U' liegen. Dann setzen wir λ aus den Logarithmen dieser Kurven zusammen. □

[5] Zum Beispiel $\gamma(t) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{i}}$, $(t \in [0, 2\pi])$

[6] Ein topologischer Raum ist *wegweise–zusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte durch eine Kurve verbinden lassen. Wegweise–zusammenhängende Räume sind *zusammenhängend*, das heißt, daß nur die leere Menge und der ganze Raum offen und abgeschlossen sind

Definition *Die Umlaufszahl einer geschlossenen Kurve* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\bullet$ *in der punktierten Ebene ist* ν_γ*, wenn*

$$\lambda(b) - \lambda(a) = \nu_\gamma \cdot 2\pi\,\mathrm{i}$$

für einen Logarithmus λ *von* γ*.*

Der einmal positiv durchlaufene Einheitskreis hat zum Beispiel die Umlaufszahl 1.

Für bei z_0 punktierte Ebenen definiert man die Umlaufszahl $\nu_\gamma(z_0)$ analog.

Lemma 2.7 *Sei* λ *ein Logarithmus von* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\bullet$*. Dann ist* $\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \lambda(b) - \lambda(a)$*.*

Beweis: Man beachte im Beweis von Satz 2.6, daß die Funktionen $\log(z) + m \cdot 2\pi\,\mathrm{i}$ und $\log^*(z) + m \cdot 2\pi\,\mathrm{i}$ Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$ sind. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Wenn γ stetig differenzierbar ist, kann man folgende Rechnung verwenden: Aus $\exp(\lambda(t)) = \gamma(t)$ folgt durch Differenzieren $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \lambda'(t)$, und daraus

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lambda'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(b) - \lambda(a).$$

□

Folgerung 2.8 *Für geschlossene Kurven in der punktierten Ebene ist*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \nu_\gamma \cdot 2\pi\,\mathrm{i}.$$

Folgerung 2.9 *Eine geschlossene Kurve* γ *in der punktierten Ebene ist genau dann zusammenziehbar, wenn* $\nu_\gamma = 0$*.*

Beweis: Eine Richtung folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz 2.4. Wenn umgekehrt $\nu_\gamma = 0$, hat γ eine geschlossene Logarithmuskurve λ. Wenn man exp auf eine Zusammenziehung von λ anwendet, erhält man eine Zusammenziehung von γ. □

Man zeigt leicht, daß zwei Kurven γ und γ' genau dann homotop in $\mathbb{C}^\bullet$ sind, wenn $\gamma'\gamma^{-1}$ zusammenziehbar ist. Aus 2.9 folgt dann, daß zwei geschlossene Kurven genau dann homotop sind, wenn sie die gleiche Umlaufszahl haben.

3 Erste Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

3.1 Die Cauchyformel

Satz 3.1 (Cauchysche Integralformel) *Sei* f *eine holomorphe Funktion und* γ *der positiv durchlaufene Rand eines Kreises um* z_0*, der ganz im Definitionsbereich von* f *liegt. Dann ist*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\ .$$

Beweis: Wir werden zeigen, daß

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Daraus folgt dann die Behauptung, weil

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Wir können die Funktion $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ im Punkt z_0 durch $g(z_0) = f'(z_0)$ stetig fortsetzen. Wenn wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz 3.9 anwenden dürften (dessen Beweis aber 3.1 verwendet) würde folgen, daß g auch bei z_0 holomorph ist und daß daher $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Um ohne 3.9 auszukommen, argumentieren wir so: Weil g jedenfalls außerhalb von z_0 holomorph ist, ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} g(z)\,\mathrm{d}z$ für jedes noch so kleine r. $|g(z)|$ ist in der Nähe von z_0 beschränkt ist, sagen wir durch M. Also ist

$$\left|\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi r M$$

und $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ verschwindet. □

Wenn man 2.8 verwendet, zeigt der gleiche Beweis, daß für beliebige geschlossene Kurven γ

$$\nu_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0},$$

vorausgesetzt, daß γ in einem Kreis um z_0 verläuft, der ganz in Definitionsbereich liegt. Aus 5.11 wird folgen, daß es tatsächlich genügt, vorauszusetzen, daß γ im Definitionsbereich zusammenziehbar ist.

Eine andere Formulierung der Cauchyschen Integralformel ist:

Satz 3.2 (Mittelwertsatz) *$f(z_0)$ ist der Mittelwert der Werte von f auf der Kreislinie γ. Also*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})dt.$$

□

3.2 Der Potenzreihenentwicklungssatz

Lemma 3.3 *Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und ϕ eine auf dem Bild G der Kurve definierte stetige Funktion. Dann ist die auf $U = \mathbb{C}\setminus G$ definierte Funktion*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

in jedem Kreis, der ganz in U liegt, durch eine Potenzreihe darstellbar.

Beweis: Sei $K = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ in U enthalten. Um Schreibarbeit zu sparen, nehmen wir an, daß $z_0 = 0$. Dann ist $|\frac{z}{\zeta}| < 1$ für alle $z \in K$, $\zeta \in G$ und daher

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n.$$

Wir zeigen, daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Für jedes N ist

$$f(z) - \sum_{n<N} a_n z^n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \right) \mathrm{d}\zeta.$$

Sei M eine Schranke für die $|\phi(\zeta)|$. Für große N ist

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{|\zeta^{n+1}|} |z^n| \right| \leq \frac{M}{r} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{z}{r} \right)^n = \epsilon$$

beliebig klein. Man kann nun oben den Betrag der rechten Seite abschätzen durch $\frac{1}{2\pi} \cdot \text{Länge}(\gamma) \cdot \epsilon$. □

Satz 3.4 (Potenzreihenentwicklungssatz) *Jede holomorphe Funktion ist in jedem Kreis, der in ihrem Definitionsbereich liegt durch eine Potenzreihe darstellbar. Genauer gilt:*
Wenn die Kreisscheibe $K = \{z \mid |z - z_0| < r_0\}$ im Definitionsbereich von f liegt, gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, die f in K darstellt. Für alle $r < r_0$ berechnen sich die Taylorkoeffizienten durch die Cauchysche Koeffizientenformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z.$$

□

Wenn $|f(z)|$ auf der Kreislinie $\{z \mid |z - z_0| = r\}$ durch M beschränkt ist, gilt also die *Cauchysche Abschätzung für die Taylorkoeffizienten*

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Beispiel: Der Hauptzweig log des Logarithmus muß um $z_0 = 1$ in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 entwickelbar sein. log ist aber auf der linksgeschlitzten Ebene Stammfunktion von $\frac{1}{z}$. Wenn man die Reihe

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n$$

gliedweise integriert und beachtet, daß $\log(1) = 0$, erhält man

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$$

für alle z mit $|z-1| < 1$.

Folgerung 3.5 *Die Ableitung einer holomorphen f Funktion ist wieder holomorph. Es ist für jede im Definitionsbereich liegende abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \mid |z-z_0| \le r\}$*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Aus der Cauchyschen Abschätzung für die Taylorkoeffizienten folgt:

Satz 3.6 (Satz von Liouville) *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Eine ganze Funktion f wird durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit unendlichem Konvergenzradius dargestellt. Sei nun M eine Schranke für f. Nach der Cauchyabschätzung ist $|a_n| \le \frac{M}{r^n}$, für alle $r > 0$. Das ist nur möglich, wenn $a_n = 0$ für alle für $n > 0$. □

Folgerung 3.7 (Hauptsatz der Algebra) *Jedes nichtkonstante Polynom hat eine komplexe Nullstelle.*

Beweis: Sei $f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Für große z läßt sich $|f(z)|$ nach unten durch $\frac{1}{2}|a_n z^n|$ abschätzen. Außerhalb eines großen Kreises ist daher die Funktion $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ beschränkt. Wenn f keine Nullstellen hätte, wäre $g(z)$ holomorph und global beschränkt. Das ist nach dem Satz von Liouville nicht möglich. □

3.3 Der Riemannsche Hebbarkeitssatz

Für den Beweis des Riemannschen Hebbarkeitssatzes brauchen wir

Satz 3.8 (Morera) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für alle geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ. Dann ist f holomorph.*

Beweis: Wir können annehmen, daß U ein Kreis ist. Wir halten ein $z_0 \in U$ fest und definieren F durch

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

wobei γ irgendeine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist, die z_0 und z verbindet. Aus dem Beweis des Satzes 2.1 folgt, daß F eine Stammfunktion von f ist. Jetzt wenden wir 3.5 an und erhalten, daß auch $f = F'$ holomorph ist. □

Wie im Beweis von 2.1 braucht man die Voraussetzung nur für den Rand von Rechtecken.

Satz 3.9 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist, ist auf ganz U holomorph.*

Beweis: Wir können annehmen, daß U ein Kreis ist. Dann zeigt man wie im Beweis von 3.1, daß das Integral über jede geschlossene Kurve, die in $U \setminus \{z_0\}$ verläuft, verschwindet. Weil man jede stetige (stückweise stetig differenzierbare) Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ zu einer stetigen (stückweise stetig differenzierbaren) Kurve $\overline{\gamma}$ verschieben kann, die z_0 ausläßt und für die

$$\max_{t \in [a,b]} |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)|$$

beliebig klein wird, folgt (wegen der Stetigkeit von f), daß $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ auch für geschlossene Kurven, die durch z_0 gehen. Jetzt folgt die Behauptung aus dem Satz von Morera. □

Im letzten Satz genügt es, daß f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist:

Zusatz *Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Dann läßt sich f zu einer holomorphen Funktion auf U fortsetzen.*

Beweis: Wir können annehmen, daß U ein Kreis ist. Sei γ eine geschlossene Kurve in $U \setminus \{z_0\}$ mit Umlaufzahl n um z_0. Das Integral $\int_\gamma f$ ist gleich dem n-fachen Integral über eine beliebig kleine Kreislinie um z_0. Weil f beschränkt ist, ist $\int_\gamma f = 0$. Also existiert eine Stammfunktion F in $U \setminus \{z_0\}$. Wiederum, weil das Integral von f über kleine Kreislinien um z_0 beliebig klein wird, läßt sich F stetig nach z_0 fortsetzen. F ist also holomorph auf ganz U und wir können f durch $f(z_0) = F'(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. □

3.4 Topologische Eigenschaften holomorpher Funktionen

Definition *Eine holomorphe Funktion hat bei z_0 eine Nullstelle k–ter Ordnung, wenn*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$$

und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.4 kann der Fall, daß alle Ableitungen von f bei z_0 verschwinden, nur eintreten, wenn f in einer Umgebung von z_0 die konstante Nullfunktion ist.

Lemma 3.10 *f hat genau dann bei z_0 eine Nullstelle k–ter Ordnung, wenn*

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z)$$

für eine holomorphe Funktion h, die keine Nullstelle bei z_0 hat.

Beweis: Wenn $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ in einer Umgebung von z_0, so hat f genau dann bei z_0 eine Nullstelle k–ter Ordnung, wenn $a_0 = \ldots = a_{k-1} = 0$ und $a_k \neq 0$. □

Eine zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ nennen wir ein *Gebiet*.

Satz 3.11 (Identitätssatz) *Sei G ein Gebiet und f, g zwei auf G definierte holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G übereinstimmen, die einen Häufungspunkt in G besitzt. Dann sind f und g gleich.*

BEWEIS: Sei $h = f - g$. Nach Voraussetzung häufen sich die Nullstellen von h gegen ein $z_0 \in G$. z_0 ist wieder eine Nullstelle von h. Nach dem letzten Lemma ist eine Nullstelle k–ter Ordnung eine isolierte Nullstelle. z_0 gehört also zu $N = \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k\}$. N ist offensichtlich abgeschlossen in G, aber auch offen, weil $N = \{z \in G \mid h \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z\}$. Weil G zusammenhängend ist, muß $N = G$ sein. □

Wenn $f'(z_0) \neq 0$, ist hat f bei z_0 eine lokale Umkehrfunktion. Die Funktion $(z - z_0)^k$ für ein $k > 1$ zum Beispiel hat bei z_0 keine lokale Umkehrfunktion. Der nächste Satz zeigt, daß das im wesentlichen der einzige Fall ist.

Satz 3.12 *Wenn f bei z_0 eine k–fache Nullstelle hat ($k \geq 1$), hat f in einer Umgebung von z_0 die Gestalt*

$$f(z) = (h(z))^k$$

für eine holomorphe Funktion h, die bei z_0 nur eine einfache Nullstelle hat.

BEWEIS: Sei $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ für ein holomorphes g mit $g(z_0) \neq 0$. Sei $\sqrt[k]{z}$ eine lokale Umkehrfunktion von z^k bei $g(z_0)$. Setze (in einer genügend kleinen Umgebung von z_0)

$$h(z) = (z - z_0) \sqrt[k]{g(z)}.$$

□

Folgerung 3.13 (Satz von der Gebietstreue) *Nicht (lokal) konstante holomorphe Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ sind offene Abbildungen.*

BEWEIS: Wir müssen zeigen, daß f offen an jeder Stelle z_0 ist, das heißt, jede Umgebung von z_0 auf eine Umgebung von $f(z_0)$ abbildet. Das ist klar, wenn $f'(z_0) \neq 0$. Sonst schreiben wir

$$f(z) = f(z_0) + (h(z))^k$$

in einer Umgebung von z_0 für eine holomorphe Funktion h, die bei z_0 eine einfache Nullstelle hat. Jetzt ist aber h offen bei z_0 und z^k offen bei 0. □

Satz 3.14 (Maximumprinzip) *Der Betrag einer nicht (lokal) konstanten holomorphen Funktion kann in einer offenen Menge kein Maximum annehmen.* □

BEWEIS: Wenn f nicht lokal konstant ist, ist das Bild V von f offen. Die Betragsfunktion hat auf V kein Maximum. □

Folgerung 3.15 (Schwarzsches Lemma) *Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Abbildung des offenen Einheitskreises $\mathbb{E} = \{z \mid |z| < 1\}$ in sich, und $f(0) = 0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wenn $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, ist f eine Drehung, also von der Form $f(z) = \omega z$ für ein ω vom Betrag 1.*

Beweis: Schreibe $f(z) = zg(z)$ für eine holomorphes $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$. Wenn g konstant ist, hat f die Form ωz und die Behauptung ist leicht nachzurechnen. Sonst folgt aus 3.14, daß die Funktion

$$\phi(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|$$

streng monoton wächst. Weil $\lim_{r\to 1} \phi(r) \leq 1$, ist daher $|g(z)| < 1$ für alle $z \in E$. Das bedeutet $|f'(0)| < 1$ und $|f(z_0)| < |z_0|$ für alle $z_0 \in \mathbb{E} \setminus 0$. □

4 Isolierte Singularitäten

Sei z_0 ein Punkt der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennen wir z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten

Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt *hebbar*, wenn f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Wenn g eine auf U definierte holomorphe Funktion ist, ist z_0 zum Beispiel eine hebbare Singularität der Funktion $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_o}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 3.9 läßt sich f zu einer holomorphen Funktion auf U fortsetzen (die wir der Einfachheit halber auch f nennen). Man kann also eigentlich nicht von einer Singularität sprechen.

Eine nicht–hebbare Singularität z_0 ist ein *Pol*, wenn z_0 für ein k eine hebbare Singularität der Funktion $(z - z_0)^k f(z)$ ist. Wenn k minimal ist, ist z_0 ein Pol *k–ter Ordnung*. Eine hebbare Singularität kann man auch als Pol 0–ter Ordnung bezeichnen.

Andere isolierte Singularitäten heißen *wesentlich*.

Lemma 4.1 *f hat genau dann bei z_0 eine Polstelle k–ter Ordnung, wenn*

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} h(z)$$

für eine auch bei z_0 definierte holomorphe Funktion h, die keine Nullstelle bei z_0 hat.

Beweis: z_0 ist ein genau dann ein Pol k–ter Ordnung von f, wenn $(z - z_0)^k f(z) = h(z)$ bei z_0 definiert ist und $(z - z_0)^{-1} h(z)$ bei z_0 einen Pol hat. $(z - z_0)^{-1} h(z)$ hat aber nach 3.10 genau dann einen Pol bei z_0, wenn z_0 keine Nullstelle von h ist. □

Wenn man das letzte Lemma mit Lemma 3.10 vergleicht, sieht man, daß z_0 genau dann ein k–facher Pol von f ist, wenn z_0 eine k–fache Nullstelle der auf z_0 fortgesetzten Funktion $\frac{1}{f}$ ist. Man sieht auch, daß es Sinn hat, einen Pol der Ordnung k eine Nullstelle der Ordnung $-k$ zu nennen.

Satz 4.2 (Casorati-Weierstraß) *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann ist für jede Umgebung V von z_0 das Bild $f(V \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei W eine offene Menge, die disjunkt zu $f(V \setminus \{z_0\})$ ist und $w_0 \in W$. Dann ist $g(z) = \frac{1}{w_0 - f(z)}$ beschränkt auf $V \setminus \{z_0\}$ und also holomorph auf V fortsetzbar. Dann ist aber z_0

höchstens ein Pol von $f(z) = w_0 - \frac{1}{g(z)}$. □

Beispiel: Die Funktion $\exp(\frac{1}{z})$ hat eine wesentliche Singularität bei 0. In jeder Umgebung von 0 werden alle Werte außer 0 angenommen.

Folgerung 4.3 *Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol von f, wenn* $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

4.2 Meromorphe Funktionen und die Riemannsche Zahlkugel

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und P eine Teilmenge von U, die die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. P ist abgeschlossen in U und *diskret*, das heißt, jedes $p \in P$ hat eine Umgebung, in der keine anderen Elemente von P liegen.
2. P hat keine Häufungspunkte in U.

Wenn $f : U \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph ist, können wir die Elemente von P als isolierte Singularitäten von f auffassen.

Definition *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und P eine Teilmenge von U, die sich nicht in U häuft. Eine holomorphe Funktion*

$$f : U \setminus P \to \mathbb{C}$$

heißt meromorph auf U, wenn die Elemente von P höchstens Pole von f sind.

Man macht f zu einer auf ganz U definierten Funktion, indem man sie auf die hebbaren Singularitäten aus P stetig fortsetzt und ihr auf den Polen den Wert ∞ gibt. Zwei meromorphe Funktionen auf U nennt man gleich, wenn diese Fortsetzungen übereinstimmen.

Man sieht sofort, daß Summe, Differenz und Produkt von meromorphen Funktionen auf U wieder meromorph sind. Auch das folgende Lemma ist leicht zu beweisen:

Lemma 4.4 *Sei f eine auf U definierte meromorphe Funktion, die nicht lokal konstant $= 0$ ist. Dann ist $\frac{1}{f(z)}$ meromorph.* □

Folgerung 4.5 *Die auf einem Gebiet U definierten meromorphen Funktionen bilden einen Körper, den Körper $\mathbb{C}(U)$ der meromorphen Funktionen auf U.*

Man verwendet die Rechenregeln $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.

Die *Riemannsche Zahlkugel* $\mathbb{P}^1$ ist die Einpunktkompaktifizierung des lokalkompakten Raumes $\mathbb{C}$: Man setzt

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und setzt die Topologie von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{P}^1$ fort, indem man als offene Umgebungen von ∞ die Mengen $\mathbb{P}^1 \setminus K$ für kompakte $K \subset \mathbb{C}$ nimmt.[7]

Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{P}^1$ heißt *holomorph* an einer ∞–Stelle p, wenn in einer offenen Umgebung V von p die Funktion $\frac{1}{f(z)} : V \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz 4.6 *Die auf einem Gebiet U definierten meromorphen Funktionen sind gerade die holomorphen Funktionen*

$$f : U \to \mathbb{P}^1,$$

die nicht konstant ∞ sind.

BEWEIS: Sei f meromorph auf U und P die Menge der Pole von f. Nach 4.3 ist $f : U \to \mathbb{P}^1$ stetig. Wir müssen zeigen, daß f überall holomorph ist. Das ist klar für Punkte in $U \setminus P$. Wenn p ein k–facher Pol ist, hat nach 4.1 $\frac{1}{f}$ in einer Umgebung V die Form $(z-p)^k g(z)$ für eine holomorphes $g : V \to \mathbb{C}$. Also ist f auch bei p holomorph.

Sei nun umgekehrt $f : U \to \mathbb{P}^1$ holomorph. Das Urbild $P = f^{-1}(\infty)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von U. Wie wie im Beweis von 3.11 sieht man, daß die (abgeschlossene) Menge der Häufungspunkte von P gleich der (offenen Menge) der Punkte ist, bei denen f lokal konstant gleich ∞ ist. Weil U zusammenhängend ist und f nicht konstant ∞ ist, hat P daher keine Häufungspunkte. Sei p ein Punkt aus P. Weil in einer Umgebung von p die Funktion $\frac{1}{f}$ holomorph ist, hat f bei p einen Pol. $\square$

Definition *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$, die den Punkt ∞ enthält. Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph bei ∞, wenn $f(\frac{1}{z})$ bei 0 holomorph ist. ∞ ist k-fache Nullstelle (Pol) von f, wenn 0 k–fache Nullstelle (Pol) von $f(\frac{1}{z})$ ist.*

Viele Sätze übertragen sich auf holomorphe Funktionen, die auf offenen Teilmengen von $\mathbb{P}^1$ definiert sind. Zum Beispiel der Hebbarkeitssatz, der Satz von der Gebietstreue oder der Identitätssatz. Man kann jetzt den Satz von Liouville so beweisen: Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt ist, läßt sich f nach dem Hebbarkeitssatz auf $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. $f(\mathbb{P}^1)$ ist als Bild eines kompakten Raumes kompakt in $\mathbb{C}$, kann also nicht offen sein. Also ist f konstant.

Eine rationale Funktion $\frac{g(z)}{h(z)}$ für zwei teilerfremde Polynome g und h ist meromorph auf $\mathbb{P}^1$ und hat bei ∞ einen Pol (bzw. Nullstelle) vom Grad $\mathrm{grad}(g) - \mathrm{grad}(h)$ (bzw. $\mathrm{grad}(h) - \mathrm{grad}(g)$).

Satz 4.7 *Der Körper $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ der meromorphen Funktion auf $\mathbb{P}^1$ ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{C}(z)$.*

BEWEIS: Sei f eine auf $\mathbb{P}^1$ definierte meromorphe Funktion. $a_1, \ldots a_n$ seien die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ und $b_1, \ldots b_p$ die Polstellen von f in $\mathbb{C}$, mit ihrer Vielfachheit aufgezählt. Dann ist

$$g(z) = \frac{(z-b_1)\ldots(z-b_p)}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)} f(z)$$

eine auf $\mathbb{P}^1$ definierte meromorphe Funktion, die in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen und keine Polstellen hat. Die Menge $g(\mathbb{P}^1)$ kann also nicht sowohl 0 als auch ∞ enthalten. Weil $g(\mathbb{P}^1)$ kompakt ist und $\mathbb{P}^1$ zusammenhängend, kann $g(\mathbb{P}^1)$ nicht offen sein. Wegen 3.13 muß g konstant sein. $\square$

[7] Man kann $\mathbb{P}^1$ auch auffassen als die *projektive Gerade* $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ über den komplexen Zahlen. $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ besteht aus allen eindimensionalen Unterräumen p von $\mathbb{C}^2$. Wenn p von (x_0, x_1) aufspannt wird, nennt man x_0, x_1 *homogene Koordinaten* von p und schreibt $p = (x_0 : x_1)$. $p \mapsto \frac{x_1}{x_0}$ definiert eine Bijektion $\mathrm{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1$.

Folgerung 4.8 *Mit ihrer Vielfachheit gezählt, hat eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ gleichviel Nullstellen und Polstellen.*

Wir geben einen zweiten Beweis in 5.16.

5 Der Residuensatz

5.1 Laurentreihen

Eine *Laurentreihe*

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n$$

konvergiert, wenn die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

konvergieren, gegen die Summe beider Grenzwerte. Definiert man den *äußeren Konvergenzradius* durch

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\geq 0} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

und den *inneren Konvergenzradius* durch

$$r = \limsup_{n>0} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

gilt also

Lemma 5.1 *Die Laurentreihe*

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n$$

divergiert für alle z mit größerem Betrag als R und kleinerem Betrag als r. Die Reihe konvergiert für alle z im Konvergenzkreisring

$$\{z \mid r < |z| < R\}.$$

Auf jedem (auf beiden Seiten) kleineren Kreisring konvergiert die Reihe gleichmäßig. □

Satz 5.2 (Satz über die Entwicklung in Laurentreihen) *Jede holomorphe Funktion ist in jedem Kreisring, der in ihrem Definitionsbereich liegt durch eine Laurentreihe darstellbar. Genauer gilt:*
Wenn der Kreisring $K = \{z \mid r_0 < |z - z_0| < R_0\}$ im Definitionsbereich von f liegt, gibt es eine Laurentreihe $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z - z_0)^n$, die f in K darstellt. Für alle $r_0 < r < R_0$ und $-\infty < n < \infty$ berechnen sich die Koeffizienten durch Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Beweis: Sei f auf U definiert und $K \subset U$. Wir dürfen r_0 etwas vergrößern und R_0 etwas verkleinern und annehmen, daß auch die beiden Randkurven in U liegen. Weiter nehmen wir an, daß $z_0 = 0$. Nach der Cauchyschen Integralformel 3.1 ist für alle $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=R_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=r_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Für die ζ vom Betrag R_0 konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n,$$

für die ζ vom Betrag r_0 konvergiert die Laurentreihe

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n.$$

Wie im Beweis von 3.3 sieht man, daß man die Reihen gliedweise integrieren kann. Es ist also für alle $z \in K$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n,$$

wobei für positive n

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=R_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

und für negative n

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|\zeta|=r_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.4 lassen sich aber beide Integrale auch über die Kurve $\{z \mid |z| = r\}$ ausrechnen. □

Folgerung 5.3 *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann läßt sich f in einer bei z_0 punktierten Umgebung von z_0 durch eine Laurentreihe*

$$\sum_{-\infty<n<\infty} a_n (z - z_0)^n$$

darstellen. z_0 ist eine hebbare Singularität genau dann, wenn die Reihe die Form

$$\sum_{0\le n<\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

und (höchstens) ein Pol, wenn sie die Form

$$\sum_{-N\le n<\infty} a_n (z - z_0)^n$$

hat.

5.2 Der Residuensatz

Definition *Sei $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurententwicklung von f bei der isolierten Singularität z_0. Man nennt*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$$

das Residuum von f bei z_0.

Das Residuum bei einer hebbaren Singularität ist 0. Wenn f holomorph ist, ist zum Beispiel $\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0)$.

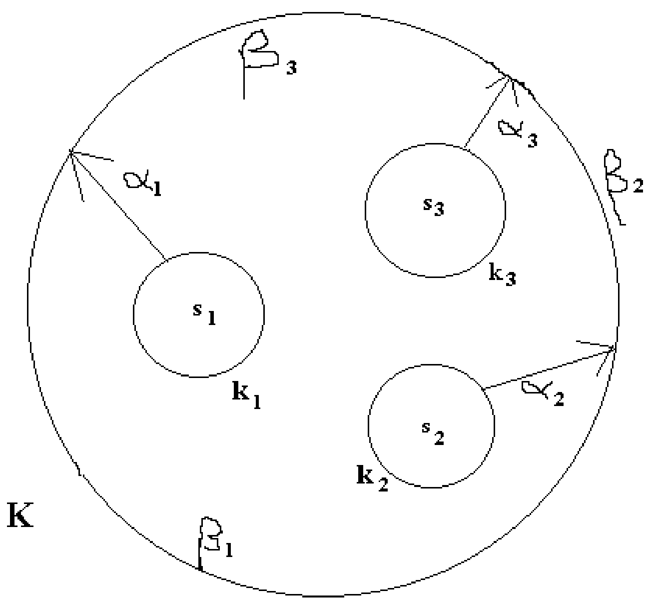
Satz 5.4 (Residuensatz) *Sei $S \subset U$ eine Teilmenge, die sich nicht in U häuft, und f holomorph auf $U \setminus S$. Sei K ein Kreis, dessen Abschluß ganz in U liegt. ∂K, die Randkurve von K enthalte keinen Punkt von S. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{s \in S \cap K} \mathrm{Res}_s f(z).$$

Beweis: Sei $s \in S$ und $\sum_{-\infty n<\infty} a_n(z-s)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f bei s. Sei k ein kleiner Kreis um s, der keine andere Singularität von f enthält. Dann ist nach 5.2

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Also gilt das Lemma für den Kreis k. Daraus folgt die Behauptung folgendermaßen. Nehmen wir an, daß K die Singularitäten s_1, s_2, s_3 enthält.



Wir verbinden die kleinen Kreise k_1, k_2 und k_3 durch Kurven α_1, α_2 und α_3 mit δK. Die Endpunkte dieser Kurven zerlegen ∂K in drei Stücke β_1, β_2 und β_3. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für die Kurve

$$\gamma = (\alpha_1^{-1}\partial k_1^{-1}\alpha_1\beta_1)(\alpha_2^{-1}\partial k_2^{-1}\alpha_2\beta_2)(\alpha_3^{-1}\partial k_3^{-1}\alpha_3\beta_3)$$

Also ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\partial K_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\partial K_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\partial K_3} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{Res}_{s_1} f(z) + \mathrm{Res}_{s_2} f(z) + \mathrm{Res}_{s_3} f(z).\end{aligned}$$

□

5.3 Der Residuenkalkül

Man kann den Residuenkalkül verwenden um reelle Integrale zu berechnen. Wir beginnen mit einem Lemma zur Berechnung von Residuen:

Lemma 5.5 *Wenn $f(z)$ bei z_0 holomorph ist und $g(z)$ bei z_0 eine einfache Nullstelle hat, ist*

$$\mathrm{Res}_{z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Beweis: $\frac{f(z)}{g(z)}$ hat einen einfachen Pol bei z_0. Darum ist das Residuum bei z_0 der Funktionswert von $(z - z_0)\frac{f(z)}{g(z)}$ bei z_0 – oder genauer gesagt der Grenzwert bei z_0. Es ist aber

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□

Satz 5.6 *Sei f eine – bis auf endlich viele Singularitäten – auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Wenn*

1. *f keine Singularitäten auf $\mathbb{R}$ hat,*
2. *und bei ∞ eine mindestens doppelte Nullstelle hat,*

dann ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \mathrm{Res}_s f(z).$$

Beweis: Sei N so groß, daß alle Singularitäten oberhalb der reellen Achse im Halbkreis $\{z \mid |z| < N,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ liegen. Wir zerlegen die Randkurve des Halbkreises in $I = [-N, N]$ und den oberen Rand γ des Halbkreises. Dann ist nach dem Residuensatz, der für den Halbkreis ebenso wie für Kreise gilt

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{-N}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\mathrm{Im}(s)>0} \mathrm{Res}_s f(z).$$

Es ist also zu zeigen, daß $\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$, wenn $N \to \infty$. Sei M das Maximum von $|f(z)|$ auf γ. Daß ∞ eines mindestens doppelte Nullstelle von $f(z)$ ist, bedeutet, daß MN^2 beschränkt bleibt, wenn $N \to \infty$. Also strebt

$$\Big|\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \frac{MN}{2}$$

gegen Null. □

Übung: *Sei f eine – bis auf endlich viele Singularitäten – auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion, die bei ∞ eine mindestens doppelte Nullstelle hat. Dann ist die Summe der Residuen von f gleich Null.*

Übung: *Wenn ∞ eine isolierte Singularität von f ist, definieren wir das Residuum von $f(z)$ bei ∞ durch*[8]

$$\mathrm{Res}_\infty f(z) = \mathrm{Res}_0\Big(-\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big).$$

Wenn f eine – bis auf endlich viele Singularitäten – auf ganz $\mathbb{P}^1$ definierte holomorphe Funktion ist, ist die Summe der Residuen von f gleich Null.

Sei λ eine reelle Zahl. Für den folgenden Satz definieren wir die Funktion z^λ auf der rechtsgeschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$z^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \log^*(z)}.$$

Satz 5.7 *Sei $0 < \lambda < 1$ und f eine – bis auf endlich viele Singularitäten – auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Wenn*

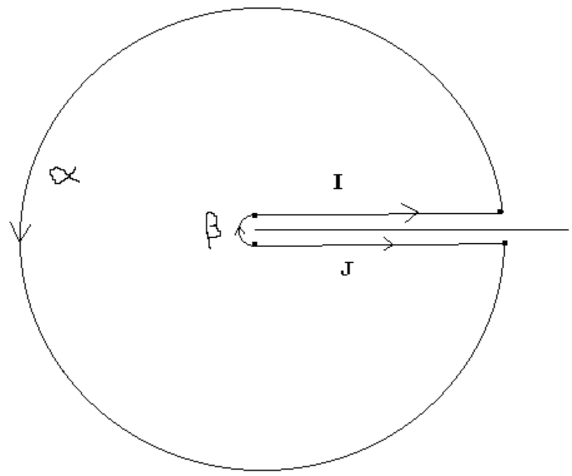
1. *f keine Singularität auf $\mathbb{R}_{>0}$ hat,*
2. *bei 0 höchstens einen Pol erster Ordnung hat,*
3. *und bei ∞ eine mindestens doppelte Nullstelle,*

dann ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\lambda 2\pi\,\mathrm{i}}} \Big(\sum_{s \neq 0} \mathrm{Res}_s \left(z^\lambda f(z)\right) \Big).$$

[8] Eigentlich ist das Residuum nämlich das Residuum der Differentialform $f(z)\,\mathrm{d}z$. Für $w = \frac{1}{z}$ ist $f(z)\,\mathrm{d}z = f\big(\frac{1}{w}\big)\,\mathrm{d}\big(\frac{1}{w}\big) = -\frac{1}{w^2} f\big(\frac{1}{w}\big)\,\mathrm{d}w$.

BEWEIS: Sei R eine große und r eine kleine positive Zahl. Betrachte die folgenden Kurven: β ist ein negativ durchlaufener Halbkreis um 0 mit Radius r, der $-r\,\mathrm{i}$ mit $r\,\mathrm{i}$ verbindet. I ist eine zu $\mathbb{R}$ parallele Gerade, die $r\,\mathrm{i}$ mit der rechten Hälfte der Kreislinie $K = \{z \mid |z| = R\}$ verbindet, J verbindet $-r\,\mathrm{i}$ mit K. α ist der Teil von K, der den Endpunkt von I mit dem Endpunkt von J verbindet. γ sei die Kurve $I\alpha J^{-1}\beta$.



Wenn wir R groß genug und r klein genug wählen, umläuft γ alle Singularitäten von f bis auf den möglichen Pol 0. Nach dem Residuensatz (der auch für γ gilt) ist also (für $g(z) = z^\lambda f(z)$)

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_I g(z)\,\mathrm{d}z + \int_\alpha g(z)\,\mathrm{d}z - \int_J g(z)\,\mathrm{d}z + \int_\beta g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{s\neq 0} \mathrm{Res}_s g(z).$$

Wenn R gegen ∞ geht und r gegen 0, konvergiert $\int_I g(z)\,\mathrm{d}z$ gegen $\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ und $\int_J g(z)\,\mathrm{d}z$ gegen $\mathrm{e}^{\lambda 2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$, weil z^λ beim Durchgang durch $\mathbb{R}_{>0}$ um den Faktor $\mathrm{e}^{\lambda 2\pi\,\mathrm{i}}$ springt. Weil ∞ eine mindestens doppelte Nullstelle von f ist, konvergiert $\int_\alpha g(z)\,\mathrm{d}z$ gegen Null, und weil f höchstens einen einfachen Pol bei 0 hat, konvergiert auch $\int_\beta g(z)\,\mathrm{d}z$ gegen Null. Im Limes haben wir also

$$2\pi\,\mathrm{i}\sum_{s\neq 0} \mathrm{Res}_s g(z) = (1 - \mathrm{e}^{\lambda 2\pi\,\mathrm{i}})\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

5.4 Die Umlaufszahlversion des Residuensatzes

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Kette* c ist eine (formale) $\mathbb{Z}$–Linearkombination

$$c = n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$$

von Kurven in X.
Wenn die Kette c im Definitionsbereich der holomorphen Funktion f liegt, definieren wir das

Integral von f entlang c durch

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = n_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + n_k \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Eine Kette $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k$, die aus Abschnitten von Stücken einer geschlossenen Kurve $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ besteht, nennen wir einen *einfachen Zyklus*. Ein *Zyklus* ist eine Linearkombination

$$c = m_1 c_1 + \ldots + m_l c_l$$

von einfachen Zyklen. Offenbar ist ein Kette genau dann ein Zyklus, wenn jeder Punkt genauso oft als Endpunkt wie als Anfangspunkt einer Kurve aus c vorkommt.

Die Umlaufszahl

$$\nu_c(z_0)$$

von c um den Punkt z_0 ist die Summe der Umlaufszahlen der zu den c_i gehörenden geschlossenen Kurven. Weil man einen Zyklus auf verschiedene Weisen als Summe von einfachen Zyklen schreiben kann, beweisen wir:

Lemma 5.8 *Für einfache Zyklen $d_1 \ldots d_l, c_1 \ldots c_k$ folgt aus*

$$d_1 + \ldots + d_l = c_1 + \ldots + c_k,$$

daß

$$\nu_{d_1}(z_0) + \ldots + \nu_{d_l}(z_0) = \nu_{c_1}(z_0) + \ldots + \nu_{c_k}(z_0).$$

Beweis: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^\bullet$ eine Kurve. Wir definieren den Winkel, den γ um 0 beschreibt, durch

$$\measuredangle(\gamma) = \frac{1}{\mathrm{i}}(\lambda(b) - \lambda(a)).$$

für einen Logarithmus λ von γ. Es ist dann für $c = n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi}(n_1 \measuredangle(\gamma_1) + \ldots + n_k \measuredangle(\gamma_k)).$$

□

Ein Zyklus c heißt 0–*homolog* in U, wenn c Linearkombination von einfachen Zyklen ist, die in U zusammenziehbar sind. Im nächsten Bild (Abbildung 1) ist zum Beispiel $c = \alpha + \beta$ in U 0–homolog. Denn es ist

$$c = (\alpha + \gamma + \beta + \gamma^{-1}) - (\gamma + \gamma^{-1}),$$

und die Kurven $\alpha\gamma\beta\gamma^{-1}$ und $\gamma\gamma^{-1}$ sind in U zusammenziehbar.

Der Cauchysche Integralsatz hat jetzt die Form:

Lemma 5.9 *Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und c in U 0–homolog ist, ist*

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

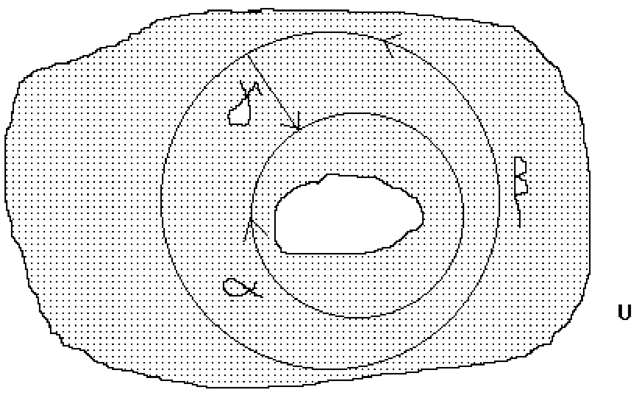


Abbildung 1:

Aus 2.9 folgt

Lemma 5.10 *Wenn c in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ 0–homolog ist, ist* $\nu_c(z_0) = 0$. □

Satz 5.11 (Residuensatz) *Sei S ohne Häufungspunkte in U, $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph und c ein Zyklus in $U \setminus S$, der in U 0–homolog ist. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_c f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{s \in S} \nu_c(s)\,\mathrm{Res}_s f(z).$$

Weil S in U keine Häufungspunkte hat, kann c nur um endlich viele Punkte aus S umlaufen. Die rechts stehende Summe ist also endlich.

Beweis: Wir nennen zwei Ketten d und d' *homolog* in V, wenn ihre Differenz in V 0–homolog ist. In Zeichen:

$$d \sim d'$$

Zum Beispiel ist $\gamma^{-1} \sim -\gamma$ und $\gamma_1 \dots \gamma_k \sim (\gamma_1 + \ldots + \gamma_k)$. Aus 5.9 folgt, daß für homologe Ketten d und d' und für jede auf V definierte holomorphe Funktion g

$$\int_d g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{d'} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Und aus 5.10 folgt, daß homologe Zyklen die gleiche Umlaufszahl um alle Punkte außerhalb von V haben.

Wir wählen jetzt um alle $s \in S$ kreisförmige Umgebungen O_s, die paarweise disjunkt sind. Sei O die Vereinigung der O_s. Wenn wir das nächste Lemma auf c und das Tripel $S \subset O \subset U$ anwenden, erhalten wir einen Zyklus c', der in $O \setminus S$ liegt und in $U \setminus S$ zu c homolog ist. Es genügt nach den Bemerkungen am Anfang, den Satz für c' zu beweisen. c' ist Summe von einfachen Zyklen, die jeweils in einer der Mengen $O_s \setminus \{s\}$ liegen. Weil eine solcher einfacher

Zyklus keine der anderen Singularitäten umläuft, genügt es den Satz zu beweisen für den Fall, daß U ein Kreis um die einzige Singularität s ist. Außerdem können wir annehmen, daß c eine geschlossene Kurve γ ist. Sei ν die Umlaufszahl von γ um s und γ' eine ν–fach durchlaufene Kreislinie um s. Nach Lemma 2.9 (das ebenso für punktierte Kreise gilt) sind γ und γ' in $U \setminus \{s\}$ homotop. Für γ' folgt aber der Satz aus der Formel

$$\nu a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

Lemma 5.12 (Excisionslemma) *Sei O eine offene Teilmenge des topologischen Raumes X und A eine abgeschlossene Teilmenge von O. Dann ist jeder Zyklus c aus $X \setminus A$, der in X 0–homolog ist, in $X \setminus A$ homolog zu einem Zyklus aus $O \setminus A$.*

Zusatz: Statt zu fordern, daß c 0–homolog ist, genügt es zu fordern, daß c in X homolog zu einem Zyklus o aus O ist.

Beweis: Sei $c - o$ eine Summe von einfachen Zyklen z aus X, die in X zusammenziehbar sind. Die z können Kurven enthalten, die nicht ganz in $X \setminus A$ oder in O liegen. Weil sich diese Kurven aber in der Summe wegheben, können wir sie so unterteilen, daß die Stücke alle in $X \setminus A$ oder O liegen.

Sei also

$$z = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$$

ein einfacher, in X zusammenziehbarer Zyklus, dessen Komponenten γ_l alle in $X \setminus A$ oder in O liegen. Wir werden zeigen, daß z *gut* ist, das heißt Summe eines in $X \setminus A$ 0–homologen Zyklus und eines Zyklus aus O ist. Daraus folgt dann, daß auch $c = d + o'$, wobei d in $X \setminus A$ 0–homolog ist und o' ein Zyklus aus O ist. Wenn wir aus o' die Kurven streichen, die nicht ganz in $X \setminus A$ liegen, erhalten wir einen Zyklus o'' aus $O \setminus A$ und es gilt immer noch $c = d + o''$. Damit ist dann das Excisionslemma bewiesen.

Weil

$$\lambda = \gamma_1 \ldots \gamma_k$$

zusammenziehbar ist, gibt es eine stetige Abbildung

$$u : [a, b] \times [0, 1] \to X,$$

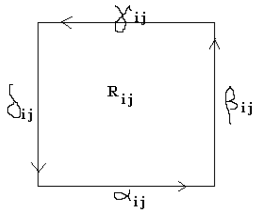
die die untere Kante des Rechtecks $[a, b] \times [0, 1]$ auf λ und die anderen Kanten auf den Anfangspunkt (= Endpunkt) von λ abbildet. Wenn wir $[a, b]$ in M Intervalle $a = x_0 < \ldots < x_M = b$ und $[0, 1]$ in N Intervalle $0 = y_0 < \ldots < y_N = 1$ zerlegen, erhalten wir eine Zerlegung von $[a, b] \times [0, 1]$ in die MN Rechtecke

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Wir nennen α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} und δ_{ij} die Bilder der vier Kanten von R_{ij} unter u, wobei

Sei r die Summe der Zyklen $r_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} + \gamma_{ij} + \delta_{ij}$. Wenn wir die Summanden umordnen, erhalten wir r als Summe der folgenden einfachen Zyklen

1. $\sum \alpha_{i1}$
2. $\gamma_{ij} + \alpha_{i,j+1}$
3. γ_{iN}
4. β_{Mj}
5. $\delta_{ij} + \beta_{i-1,j}$
6. δ_{1j}.



Wir wählen nun die Zerlegung so fein, daß u alle R_{ij} nach O oder nach $X \setminus A$ abbildet. Alle r_{ij} und alle einfachen Zyklen vom Typ 2 bis 6 liegen dann in O oder $X \setminus A$ und sind dort zusammenziehbar. Es folgt also, daß $\sum \alpha_{i1}$ gut im obigen Sinn ist.

Schließlich können die Zerlegung von $[a, b]$ so wählen, daß sich jedes γ_l aus α_{i1} zusammensetzt:

$$\gamma_l = \alpha_{i_{l-1},1}\alpha_{i_{l-1}+1,1}\cdots\alpha_{i_l-1,1}$$

Die Zyklen (!)

$$\gamma_l - (\alpha_{i_{l-1},1} + \alpha_{i_{l-1}+1,1} + \cdots + \alpha_{i_l-1,1})$$

sind in $X \setminus A$ oder in O 0-homolog. Also ist $\sum \gamma_l - \sum \alpha_{i1}$ und damit auch z gut. □

Definition *Seien $O \subset U \subset \mathbb{C}$ offen. Ein in U 0–homologer Zyklus c in $U \setminus O$* berandet *O, wenn c keinen Punkt in $U \setminus O$ umläuft und die Punkte von O genau einmal.*

Folgerung 5.13 *Sei f holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten. Wenn der Zyklus c die offene Teilmenge O berandet und keine Singularitäten enthält, ist*

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{s \in O} \mathrm{Res}_s f(z).$$

5.5 Das Null– und Polstellen zählende Integral

Sei f eine auf U definierte meromorphe Funktion und s ein Punkt in U. Wir schreiben

$$f(z) = (z - s)^k g(z)$$

für eine meromorphe Funktion g, die bei s keine Null– oder Polstelle hat. Wenn $k > 0$, hat f dann eine Nullstelle k–ter Ordnung. Wenn $k < 0$, hat f bei s eine Nullstelle $-k$–ter Ordnung.

Ableiten ergibt $f'(z) = k(z - s)^{k-1}g(z) + (z - s)^k g'(z)$ und also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - s} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Wir haben daher

$$\mathrm{Res}_s \frac{f'(z)}{f(z)} = k.$$

Es folgt

Satz 5.14 *Sei f auf U meromorph und c ein Zykel in U, der die offenen Menge O berandet und keine Nullstellen und Pole von f enthält. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathrm{N}_O - \mathrm{P}_O,$$

wobei N_O die Zahl der Nullstellen und P_O die Zahl der Polstellen von f in O ist, jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt. □

Wenn $f : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ holomorph sind und γ eine Kurve in U, so gilt

$$\int_\gamma g(f(z))f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_{f\circ\gamma} g(w)\,\mathrm{d}w.$$

Für $g(z) = \frac{1}{z}$ ist also

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w.$$

Aus 2.8 folgt also

Folgerung 5.15 (Satz vom Argument) *Die Zahl der Null-Polstellen von f in O ist die Umlaufszahl des Bildzykels $f(c)$ um 0:*

$$\mathrm{N}_O - \mathrm{P}_O = \nu_{f\circ c}.$$

Sei γ ein Kreislinie um 0, U das Äußere von γ in $\mathbb{P}^1$ und f eine auf U definierte meromorphe Funktion. Die Zahl der Null–Polstellen von f in U ist gleich der Zahl der Null–Polstellen von $f\circ\frac{1}{z}$ in $\frac{1}{z}(U) = \{\frac{1}{w} \mid w \in U\}$. Das Negative (!) der Kurve $\frac{1}{z}\circ\gamma$ berandet $\frac{1}{z}(U)$, also ist die Anzahl der Null-Polstellen die negative Umlaufszahl der Bildkurve $(f\circ\frac{1}{z})\circ(\frac{1}{z}\circ\gamma) = f\circ\gamma$. Wenn man also sagt, daß $-\gamma$ das Äußere von γ berandet, gilt der Satz von Argument auch hier. Überhaupt gilt mit der richtigen Definition von "beranden" der Satz vom Argument auch für offene Teilmengen von $\mathbb{P}^1$.

Diese Überlegungen liefern einen zweiten Beweis für Folgerung 4.8:

Folgerung 5.16 *Eine auf ganz $\mathbb{P}^1$ definierte meromorphe Funktion $f \neq 0$ hat (auf $\mathbb{P}^1$ und mit ihrer Vielfachheit gezählt) ebenso viel Nullstellen wie Polstellen.*

Weil $f(z)-a$ die gleichen Pole wie f hat, und die Nullstellen von $f(z)-a$ die a–Stellen von f sind, folgt, daß eine rationale Funktion jeden Wert aus $\mathbb{P}^1$ auf $\mathbb{P}^1$ gleich oft annimmt. Diese Zahl nennt man den *Grad* von f. Man sieht leicht, daß der Grad eines Polynoms der "Polynomgrad" ist, und daß, wenn $f = \frac{g}{h}$ für zwei teilerfremde Polynome g, h der Grad von f das Maximum der Grade von g und h ist.

Satz 5.17 (Satz von Rouché) *Seien f und g auf U meromorph und c ein Zykel in U, der die offenen Menge O berandet und keine Nullstellen und Pole von f enthält. Wenn für alle Punkte z von c*

$$|g(z)| < |f(z)|,$$

haben f und $f+g$ die gleiche Zahl von Null-Polstellen in O.

BEWEIS:

$$(f+tg)\circ\gamma \quad (t\in[0,1])$$

ist eine "stetige" Familie von Zyklen in $\mathbb{C}^\bullet$, die bei $f\circ\gamma$ beginnt und bei $(f+g)\circ\gamma$ aufhört. Daraus folgt, daß die beiden Zyklen die gleiche Umlaufszahl haben. Denn immer, wenn (α_t) eine stetige Familie von geschlossenen Kurven in $\mathbb{C}^\bullet$ ist, haben α_0 und α_1 die gleiche Umlaufszahl: Sei β die Kurve, die die Anfangspunkte der α_t beschreiben. Dann ist der einfache Zyklus $\alpha_0+\beta+\alpha_1^{-1}+\beta^{-1}$ zusammenziehbar in $\mathbb{C}^\bullet$. α_0 und α_1 sind also homolog. $\square$

6 Folgen holomorpher Funktionen

6.1 Stetige Funktionen auf topologischen Räumen

Sei $f_n : X\to\mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen.

Definition

1. *(f_n) konvergiert punktweise gegen f, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle $x\in X$.

2. *(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn es für alle $\epsilon>0$ ein N gibt, so daß*

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

für alle $x\in X$ und $n\geq N$.

3. *(f_n) konvergiert lokal gleichmäßig gegen f, wenn es für jedes $x\in X$ und $\epsilon>0$ ein N und eine Umgebung U von x gibt, so daß für alle $n\geq N$ und $y\in U$*

$$|f_n(y)-f(y)|<\epsilon.$$

Wenn X kompakt ist, stimmen die letzten beiden Begriffe überein. Für lokalkompakte X ist (f_n) genau dann lokal gleichmäßig konvergent, wenn (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig konvergiert.

Lemma 6.1 *Wenn die f_n stetig sind und lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, dann ist auch f stetig.*

BEWEIS: Sei $x\in X$ und $\epsilon>0$. Wir wählen eine Umgebung U von x und ein N, so daß $|f_N(y)-f(y)|<\frac{\epsilon}{3}$ für alle $y\in U$. Dann verkleinern wir U zu einer Umgebung U' von x, so daß $|f_N(x)-f_N(y)|<\frac{\epsilon}{3}$ für alle $y\in U'$. Es folgt $|f(y)-f(x)|<\epsilon$ für alle $y\in U'$. $\square$

Definition *(f_n) heißt gleichgradig stetig, wenn es für alle $x\in X$ und alle ϵ eine Umgebung U von x gibt, so daß für alle n und $y\in U$*

$$|f_n(y)-f_n(x)|<\epsilon.$$

Lemma 6.2 *Wenn (f_n) gleichgradig stetig ist und auf einer dichten Menge punktweise konvergiert, dann konvergiert die Folge (f_n) lokal gleichmäßig.*

BEWEIS: Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle eine Umgebung U von x, so daß $|f_n(y) - f_n(y')| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle n und $y, y' \in U$. Für ein $y_0 \in U$ ist $(f_n(y_0))$ eine Cauchyfolge, und daher $|f_n(y_0) - f_m(y_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle n und m größer als ein N. Es folgt $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Damit ist gezeigt, daß auch $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge ist. Es folgt, daß (f_n) punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Weil $|f_n(y) - f_m(y)| < \epsilon$ für alle $y \in U$ und $n, m \geq N$, ist $|f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon$ für alle $y \in U$ und $n \geq N$. Die Konvergenz ist also lokal gleichmäßig. □

6.2 Holomorphe Funktionen

Satz 6.3 *Die holomorphen Funktionen (f_n) seien auf U definiert und lokal gleichmäßig gegen f konvergent. Dann ist f holomorph.*

BEWEIS: Sei $x \in U$ und γ eine kleine Kreislinie um x. Dann ist nach 3.1

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

für alle z im Inneren des Kreises. Weil (f_n) auf γ gleichmäßig konvergiert, folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Aus 3.3 folgt, daß f holomorph ist. □

Mit 3.5 erkennt man, daß (f'_n) lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert.

Eine Folge (f_n) von Funktionen heißt *lokal beschränkt*, wenn jedes x eine Umgebung V hat, auf der der Betrag aller f_n kleiner ist als eine nur von V abhängige Schranke.

Satz 6.4 (Montel) *Sei (f_n) eine lokal beschränkte Folge von auf U definierten holomorphen Funktionen. Dann gibt es eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion konvergiert.*

BEWEIS: Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von U. Wir werden zeigen:
1. Es gibt eine Teilfolge, die auf A punktweise konvergiert
2. (f_n) ist gleichgradig stetig.
Der Satz folgt dann aus 6.2 und 6.3.

Beweis der ersten Behauptung:
Sei $A = \{a_n\}$ eine Aufzählung von A. Für eine unendliche Menge I_0 konvergiert die Folge $(f_n(a_0))_{n \in I_0}$. Für eine unendliche Teilmenge I_1 von I_0 konvergiert $(f_n(a_1))_{n \in I_1}$. Man erhält so eine absteigende Kette $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$, so daß jede Folge $(f_n(a_i))_{n \in I_i}$ konvergiert. Wähle eine aufsteigende Folge $n_i \in I_i$. Dann konvergiert die Teilfolge (f_{n_i}) punktweise auf A.

Beweis der zweiten Behauptung:
Aus 3.5 erkennt man, daß auch die Folge (f'_n) lokal beschränkt ist. Sei $x \in U$ und $\epsilon > 0$. Wähle

in U eine kreisförmige Umgebung $V = \{z \mid |z-x| < r\}$ von x, auf der die $|f'_n(z)|$ durch M beschränkt sind. Wir können annehmen, daß $rM < \epsilon$. Es ist dann für alle $y \in V$

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq |y-x|M < \epsilon.$$

□

7 Der Satz von Mittag-Leffler und der Weierstraßsche Produktsatz

7.1 Der Satz von Mittag-Leffler

Definition *Sei s eine isolierte Singularität von f und $\sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-s)^n$ die Laurententwicklung von f bei s. Wir nennen $\sum_{-\infty<n<0} a_n(z-s)^n$ den Hauptteil von f bei s. Ein Hauptteil bei s schlechthin ist eine Laurentreihe*

$$h(z) = \sum_{-\infty<n<0} a_n(z-s)^n,$$

deren innerer Konvergenzradius 0 ist.

Satz 7.1 (Mittag–Leffler) *Sei S eine Menge von komplexen Zahlen, die sich nirgends häuft, und sei für jedes $s \in S$ ein Hauptteil $h_s(z)$ bei s gegeben. Dann gibt es eine auf $\mathbb{C} \setminus S$ definierte holomorphe Funktion $f(z)$, deren Hauptteil bei $s \in S$ gerade $h_s(z)$ ist.*

Beweis: $h_s(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Wenn $S = \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}$ endlich ist, leistet daher

$$f = h_{s_0} + \ldots + h_{s_{k-1}}$$

das Gewünschte.[9]

Wenn $S = \{s_i\}$ unendlich ist, muß aber $\sum_{i=0}^{\infty} h_{s_i}$ nicht mehr konvergieren. Wir wählen daher für jedes i eine ganze Funktion k_i, so daß

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (h_{s_i} - k_i)$$

lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus S$ konvergiert. Dazu wählen wir die k_i so, daß $|h_{s_i} - k_i| < (\frac{1}{2})^i$ auf $\{z \mid |z| < \frac{|s_i|}{2}\}$. (Man wählt für k_i ein genügend großes Anfangsstück der Potenzreihenentwicklung von h_{s_i} bei 0.). □

f ist natürlich durch die vorgegebenen Hauptteile nicht eindeutig bestimmt: Für jede ganze Funktion g hat $f+g$ dieselben Hauptteile wie f.

[9] Die s_i müssen natürlich paarweise verschieden sein.

BEISPIEL: Die Funktion

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{z\,\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-z\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{z\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-z\,\mathrm{i}}}$$

hat Pole an den Stellen $s_n = \pi n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und dort die Hauptteile $\frac{1}{z-\pi n}$.

Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-\pi n}$ konvergiert nicht. Wenn man aber zur Konvergenzerzeugung die Funktionen $\frac{1}{\pi n}$ addiert, erhält man die konvergente Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^\bullet} \left(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{\pi n}\right),$$

die tatsächlich $\cot(z)$ darstellt.
Um das einzusehen, überlegt man sich zuerst, daß die Reihe für $z \notin \mathbb{Z}\pi$ absolut konvergiert. Das liegt daran, daß für $|n| > \frac{2|z|}{\pi}$

$$\left|\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{\pi n}\right| \leq \frac{2|z|}{\pi^2}\frac{1}{n^2},$$

und daran, daß $\sum_{n\in\mathbb{Z}^\bullet} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Dann verifiziert man, daß für jedes z_0, das kein Pol von $\cot(z)$ ist,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \frac{z_0}{\zeta}\frac{\cot(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta = 0,$$

wobei für jedes $N \in \mathbb{N}$ γ_N die Randkurve des Quadrats mit dem Eckpunkten $\pm\pi\left(N+\frac{1}{2}\right) \pm \pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\mathrm{i}$ ist. (Das liegt daran, daß cot auf diesen Randkurven beschränkt bleibt.) Dann wendet man das folgende Lemma an:

Lemma 7.2 *Sei f eine – bis auf eine Menge*

$$S = \{s_0, s_1, \ldots\}$$

von isolierten Singularitäten – auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Wir nehmen an, daß $s_0 = 0$ (auch, wenn 0 keine wirkliche Singularität ist) und $s_k \neq 0$ für alle $k > 0$.
$\mathbb{C}$ sei Vereinigung einer aufsteigenden Folge $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ von offenen Mengen mit Randkurven ∂K_k und m eine positive Zahl, so daß für alle $z_0 \notin S$ die Integrale

$$\int_{\partial K_k} \frac{z_0^m}{\zeta^m}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$

für $k \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Sei $h_k(z)$ der Hauptteil von $f(z)$ bei s_k und für $k > 0$ sei $k_k(z)$ die Summe der ersten m Glieder der Potenzreihenentwicklung von $h_k(z)$ bei 0. Schließlich sei $k_0(z)$ der Teil $a_0 z^0 + \ldots + a_{m-1}z^{m-1}$ der Laurententwicklung von f bei 0.
Wenn die Reihe

$$h_0(z) + k_0(z) + \sum_{k\in\mathbb{N}^\circ} (h_k(z) - k_k(z))$$

für jedes $z \notin S$ absolut konvergiert, stellt sie auf $\mathbb{C} \setminus S$ die Funktion $f(z)$ dar.

Beweis: Die Integralbedingung bedeutet, daß die Summe der Residuen der Funktion

$$F(z) = \frac{z_0^m}{z^m} \frac{f(z)}{z - z_0}$$

Null ist. Genauer:

$$\mathrm{Res}_{z_0} F(z) + \mathrm{Res}_0 F(z) + \sum_{k \in \mathbb{N}^\circ} \mathrm{Res}_{s_k} F(z) = 0.$$

Dabei muß die Summation in geeigneter Reihenfolge und Klammerung ausgeführt werden.

Wir berechnen die Residuen:

1. $\mathrm{Res}_{z_0} F(z) = f(z_0)$

2. Es ist

$$\mathrm{Res}_0 F(z) = \mathrm{Res}_0 \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_0(z) + k_0(z)}{z - z_0},$$

weil $\frac{z_0^m}{z^m} \frac{f(z) - h_0(z) - k_0(z)}{z - z_0}$ bei 0 holomorph ist. Weil die meromorphe Funktion $\frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_0(z) + k_0(z)}{z - z_0}$ bei ∞ eine doppelte Nullstelle hat, ist die Summe der Residuen Null. Wir haben also

$$\mathrm{Res}_0 F(z) = -\mathrm{Res}_{z_0} \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_0(z) + k_0(z)}{z - z_0} = -h_0(z_0) - k_0(z_0).$$

3. Sei $k > 0$. Dann ist wie oben

$$\mathrm{Res}_{s_k} F(z) = \mathrm{Res}_{s_k} \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_{s_k}(z)}{z - z_0} = -\mathrm{Res}_{z_0} \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_{s_k}(z)}{z - z_0} - \mathrm{Res}_0 \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_{s_k}(z)}{z - z_0}.$$

Man berechnet aber

$$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_{s_k}(z)}{z - z_0} = h_{s_k}(z_0)$$

und

$$\mathrm{Res}_0 \frac{z_0^m}{z^m} \frac{h_{s_k}(z)}{z - z_0} = \mathrm{Res}_0 \frac{z_0^m}{z^m} \frac{k_{s_k}(z)}{z - z_0} = -\mathrm{Res}_{z_0} \frac{z_0^m}{z^m} \frac{k_{s_k}(z)}{z - z_0} = -k_{s_k}(z_0).$$

Also ist

$$\mathrm{Res}_{s_k} F(z) = -h_{s_k}(z_0) + k_{s_k}(z_0).$$

□

7.2 Der Weierstraßsche Produktsatz

Satz 7.3 (Weierstraßscher Produktsatz) *Sei S eine Menge von komplexen Zahlen ohne Häufungspunkte und sei für jedes $s \in S$ eine ganze Zahl n_s gegeben. Dann gibt es eine auf $\mathbb{C}$ definierte meromorphe Funktion, die an jeder Stelle $s \in S$ eine Nullstelle der Ordnung n_s hat, und die außerhalb von S keine Null– und Polstellen hat.*

Wir fassen hier Polstellen als Nullstellen mit negativer Vielfachheit auf.

Beweis: Am Ende des Abschnitts.

$f(z)$ ist durch seine Null– und Polstellen nur bis auf einen Faktor $\phi(z)$ bestimmt, wobei $\phi(z)$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist. Aus dem nächsten Lemma folgt, daß die Funktionen $\phi(z)$ gerade die Funktionen der Form

$$\phi(z) = \mathrm{e}^{\psi(z)}$$

für eine ganze Funktion $\psi(z)$ sind.

Lemma 7.4 *Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}^\bullet$ holomorph. Dann hat $f(z)$ die Form $\mathrm{e}^{\phi(z)}$ für eine holomorphe Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$*

Beweis: Weil U einfach zusammenhängend ist, hat $\frac{f'(z)}{f(z)}$ eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$. Weil

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{F(z)}}{f(z)}\right)' = \frac{f(z)F'(z)\mathrm{e}^{F(z)} - f'(z)\mathrm{e}^{F(z)}}{f^2(z)} = 0,$$

unterscheiden sich $\mathrm{e}^{F(z)}$ und $f(z)$ nur durch eine multiplikative Konstante. Wir können also $\phi(z) = F(z) + c$ für eine geeignete Konstante c setzen. □

Wenn S endlich ist, leistet

$$f(z) = \prod (z - s)^{n_s}_{n \in S}$$

das Gewünschte. Wenn S unendlich ist, soll f ein unendliches Produkt sein.

Wir brauchen also zuerst ein Konvergenzkriterium für unendliche Produkte: $\prod_{i=0}^{\infty} a_i$ kann nur gegen einen Wert ungleich Null konvergieren, wenn die a_i gegen 1 konvergieren. Wir können also im folgenden Lemma annehmen, daß die $a_i = 1 + b_i$ in der linksgeschlitzten Ebene, dem Definitionsbereich des Hauptzweigs log des Logarithmus liegen. Dann gilt:

Lemma 7.5

1. *$\prod_{i=0}^{\infty} a_i$ ist genau dann konvergent gegen eine von 0 verschiedene Zahl, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \log(a_i)$ konvergiert.*

2. *$\sum_{i=0}^{\infty} |\log(1 + b_i)|$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ konvergiert.*

Beweis:

1. In beiden Fällen, wenn $\prod_{i=0}^{\infty} a_i$ gegen ein $c \neq 0$ oder wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \log(a_i)$ konvergiert, können wir ein N finden, so daß für alle $k \leq l$ oberhalb von N alle Produkte $a_k \ldots a_l$ positiven Realteil haben. Es folgt dann $\log(a_k \cdots a_l) = \log(a_k) + \cdots \log(a_l)$ für alle $k \leq l$ oberhalb von N, und daraus die Behauptung.

2. Wenn die b_i klein genug sind, hat man die Abschätzung

$$\frac{|b_i|}{2} \leq |\log(1 + b_i)| \leq \frac{|3b_i|}{2}\ .$$

□

Zum Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes verfahren wir jetzt wie beim Beweis des Satzes von Mittag–Leffler. Wir zählen S auf als $\{s_0, s_1 \ldots\}$, mit $s_0 = 0$ beginnend, schreiben n_i statt n_{s_i} und suchen ganze Funktionen $k_i(z)$, so daß das Produkt

$$f(z) = z^{n_0} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{s_i})^{n_i} \mathrm{e}^{-k_i(z)}$$

gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus S$ konvergiert. Dafür wählen wir die $k_i(z)$ so, daß auf $\{z \mid |z| < \frac{|s_i|}{2}\}$

$$\left| \log \left(\left(1 - \frac{z}{s_i} \right)^{n_i} \right) - k_i(z) \right| < 2^{-i}.$$

Für $k_i(z)$ kann man das n_i–fache eines genügend großen Anfangsstücks der Potenzreihenentwicklung

$$\log \left(1 - \frac{z}{s_i} \right) = - \left(\frac{z}{s_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{s_i} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{s_i} \right)^3 + \ldots \right)$$

nehmen. □

Beispiel: Es ist

$$\sin(z) = z \prod_{n \in \mathbb{Z}^\bullet} \left(1 - \frac{z}{\pi n} \right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\pi n}} = z \prod_{n \in \mathbb{N}^\circ} \left(1 - \left(\frac{z}{\pi n} \right)^2 \right).$$

Um das einzusehen, vergleichen wir die logarithmischen Ableitungen[10] beider Seiten. Die logarithmische Ableitung der linken Seite ist $\cot(z)$, die der rechten Seite die Summendarstellung von $\cot(z)$. Daraus folgt, daß sich rechte und linke Seite nur um einen Faktor unterscheiden. Dieser Faktor ist 1, weil beide Seiten bei 0 die Ableitung 1 haben, was leicht nachzuprüfen ist.

8 Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition *Eine Bijektion f zwischen zwei Gebieten U und V heißt biholomorph, wenn f und f^{-1} holomorph sind. U und V heißen biholomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen U und V gibt.*

Die Bedingung, daß f^{-1} holomorph ist, ist in Wirklichkeit unnötig, weil die Umkehrfunktion einer injektiven holomorphen Funktion immer holomorph ist. Aus 3.12 folgt nämlich, daß eine holomorphe Funktion f in keiner Umgebung einer Nullstelle von f' injektiv sein kann. Funktionen mit nirgends verschiedener Ableitung sind aber lokal (holomorph) invertierbar.

Biholomorphe Gebiete sind homöomorph[11]. $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^\bullet$ sind also nicht biholomorph, weil $\mathbb{C}^\bullet$ nicht einfach zusammenhängend ist.

[10] Die *logarithmische Ableitung* von f ist definiert als $\frac{f'}{f}$. Die logarithmische Ableitung eines nicht verschwindenden gleichmäßig konvergierenden Produkts ist die Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren.

[11] Zwei topologische Räume sind *homöomorph*, wenn es zwischen ihnen eine stetige Bijektion gibt, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Beispiel: $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind homöomorph, aber nicht biholomorph.

Beweis: $\frac{z}{1+|z|}:\mathbb{C}\to\mathbb{E}$ ist ein Homöomorphismus. Andererseits ist jede holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{E}$ konstant nach dem Satz von Liouville (3.6).

Beispiel: Die obere Halbebene

$$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$$

und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sind biholomorph vermöge der Abbildung

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}:\mathbb{H}\to\mathbb{E}.$$

Rationale Funktionen der Form

$$\mu=\frac{az+b}{cz+d}$$

mit $ad-bc\neq 0$ heißen *Möbiustransformationen*. Als rationale Funktionen sind Möbiustransformationen holomorphe Abbildungen von $\mathbb{P}^1$ nach $\mathbb{P}^1$.
μ bestimmt die Matrix

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

nur bis auf einen Faktor. Die Verknüpfung von Möbiustransformationen geschieht aber durch Multiplikationen der zugehörigen Matrizen. Das liegt daran, daß man μ auffassen kann als Multiplikation von Zweiervektoren mit A:
Wenn nämlich

$$z=\frac{u}{v}$$

($u,v\in\mathbb{C}$, nicht beide=0), ist

$$\mu(z)=\frac{u'}{v'},$$

wobei

$$\begin{pmatrix} u'\\ v'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}.$$

Es folgt, daß die Verknüpfung zweier Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation ist, und daß die Möbiustransformation μ ein Inverses hat, das durch A^{-1}, oder äquivalent durch

$$\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix},$$

gegeben ist. Man beachte, daß die Bedingung $ad-bc\neq 0$ einerseits ausdrückt, daß A invertierbar ist, andererseits, daß μ nicht konstant ist, weil Nenner und Zähler von μ nicht Vielfache von einander sind.[12]

[12] Aus der Linearen Algebra erinnert man sich, daß die Gruppe der Möbiustransformationen die lineare Automorphismengruppe der projektiven Gerade $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ ist.

Satz 8.1 (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$, das von $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ verschieden ist, ist biholomorph zum Einheitskreis.*

BEWEIS: Sei U ein nicht–leeres einfach zusammenhängendes Gebiet, das von $\mathbb{C}$ verschieden ist. Wir suchen eine *schlichte* Abbildung (das ist eine holomorphe und injektive Abbildung) von U auf $\mathbb{E}$. Da Translationen schlichte Abbildungen sind, können wir annehmen, daß U die Null nicht enthält. Sei $\sqrt{z}$ eine Umkehrabbildung der Quadratfunktion auf U (Lemma 8.2). $\sqrt{z}$ ist als Umkehrabbildung schlicht und $U' = \sqrt{U}$ ist wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weil U' und $-U'$ disjunkt sind, gibt es einen Kreis $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ außerhalb von U'. Die Möbiustransformation

$$\frac{r}{z - z_0}$$

bildet dann U' schlicht auf ein Teilgebiet U'' von $\mathbb{E}$ ab. Mit einer Möbiustransformation, die $\mathbb{E}$ auf sich abbildet, können wir U'' so verschieben, daß $0 \in U''$ (Lemma 8.3). Wir können also annehmen, daß $U \subset \mathbb{E}$ und $0 \in U$.

Sei

$$\alpha = \sup\{|f'(0)| \mid f : U \to \mathbb{E} \text{ schlicht}, f(0) = 0\}$$

und (f_n) eine Folge von schlichten Abbildungen $f_n : U \to \mathbb{E}$ mit $f_n(0) = 0$ und

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} |f'(0)|.$$

Weil die Identität eine schlichte Abbildung von U nach $\mathbb{E}$ ist, ist $1 \leq \alpha$. Wenn U eine Kreiskurve um 0 mit Radius r enthält, ist wegen der Cauchyschen Abschätzung der Taylorkoeffizienten $\alpha \leq \frac{1}{r}$.

Aus dem Satz von Montel 6.4 folgt, daß wir annehmen können, daß (f_n) lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Dann ist $\alpha = |f'(0)|$ (vergleiche Bemerkung nach 6.3). Nach Lemma 8.4 ist f eine schlichte Abbildung, zunächst in den abgeschlossenen Einheitskreis $\overline{\mathbb{E}}$. Weil $V = f(U)$ aber offen ist, liegt V tatsächlich in $\mathbb{E}$. Aus dem nächsten Hilfssatz folgt, daß $V = \mathbb{E}$, denn sonst gäbe es eine schlichte Abbildung $g : V \to \mathbb{E}$ mit $|g'(0)| > 1$ und g(0)=0. $g \circ f$ wäre dann eine schlichte Abbildung von U nach $\mathbb{E}$, die 0 nach 0 abbildet und deren Ableitung bei 0 größeren Betrag als α hätte. □

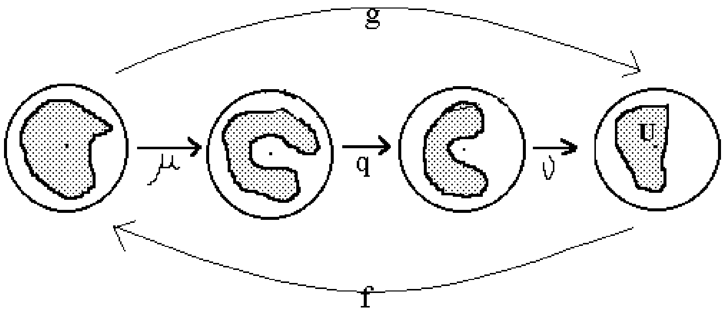
Hilfssatz *Sei $U \subsetneq \mathbb{E}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das die Null enthält. Dann gibt es eine schlichte Abbildung $f : U \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| > 1$.*

BEWEIS: Sei $\mathrm{q} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Quadratfunktion $\mathrm{q}(z) = z^2$. Mit Lemma 8.3 wählen wir zwei Möbiustransformationen μ und ν, die $\mathbb{E}$ auf sich abbilden, mit $\nu(0) \notin U$ und $g(0) = 0$, wobei

$$g = \nu \circ \mathrm{q} \circ \mu.$$

Sei $\sqrt{z}$ eine Umkehrfunktion von q auf $\nu^{-1}(U)$ mit $\sqrt{\nu^{-1}(0)} = \mu(0)$ (8.2). $f = \mu^{-1} \circ \sqrt{z} \circ \nu^{-1}$ ist Umkehrfunktion von g mit $f(0) = 0$. Weil nach dem Schwarzschen Lemma 3.15 $|g'(0)| < 1$, ist $|f'(0)| > 1$. □

Lemma 8.2 *Sei V ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das 0 nicht enthält. Dann hat z^2 eine Umkehrfunktion auf V, das heißt eine holomorphe Funktion $\sqrt{z} : U \to \mathbb{C}$ mit $q(\sqrt{z}) = z$.*



Beweis: Daß sich lokal invertierbare holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebieten umkehren lassen, ist ein allgemeiner Sachverhalt. In unserem Fall läßt sich das aber leicht folgendermaßen einsehen: Sei $\log^\circ$ eine auf V definiert Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. $\exp(\frac{1}{2}\log^\circ(z))$ kehrt z^2 um. $\square$

Lemma 8.3 *Die Möbiustransformationen* operieren transitiv *auf* $\mathbb{E}$. *Das heißt: Zu je zwei Punkten z und w aus $\mathbb{E}$ gibt es eine Möbiustransformation, die z auf w und $\mathbb{E}$ auf sich abbildet.*

Beweis: Weil $\mathbb{E}$ das Bild von $\mathbb{H}$ unter einer Möbiustransformation ist, genügt es die Behauptung für $\mathbb{H}$ zu zeigen. Man sieht aber leicht, daß sich zwei Punkte z und w der oberen Halbebene durch eine Möbiustransformation der Form

$$az + b,$$

mit positivem a und reellem b, aufeinander abbilden lassen, und daß solche Möbiustransformationen $\mathbb{H}$ in sich überführen. $\square$

Lemma 8.4 *Der Grenzwert einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge von schlichten Funktionen ist schlicht oder lokal konstant.*

Beweis: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ der lokal gleichmäßige Limes der schlichten Funktionen f_n. Sei $f(z_0) = a$. Weil f nicht konstant ist, ist z_0 in einem kleinen Kreis K enthalten, auf dessen Rand der Wert a nicht angenommen wird. Wir wählen ein ein n so groß, daß $|f(z) - f_n(z)| < |f(z) - a|$ für alle z auf ∂K. Nach dem Satz von Rouché (5.17) haben $f_n - a$ und $f - a$ die gleiche Zahl von Nullstellen in K. Also nimmt auch f_n in K den Wert a an. Daraus leicht die Behauptung. $\square$

8.1 Exkurs 1: Möbiustransformationen

Für ein Gebiet U bezeichnen wir die Automorphismengruppe von U, das heißt die Gruppe aller biholomorphen Abbildungen von U auf sich, mit $\mathrm{Aut}(U)$. Entsprechend ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (und allgemein $\mathrm{Aut}(X)$ für eine Riemannsche Fläche X) definiert.

Lemma 8.5

1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *ist die Gruppe der Möbiustransformationen.*
2. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *ist die Gruppe der linearen Möbiustransformationen* $az+b$.
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ *ist die Gruppe der Möbiustransformationen, die* $\mathbb{E}$ *auf sich abbilden.*

BEWEIS: Holomorphe Abbildungen von $\mathbb{P}^1$ sind nach Satz 4.7 rationale Funktionen oder die konstante Abbildung mit Wert ∞. Weil biholomorphe Abbildungen von $\mathbb{P}^1$ auf sich genau eine Nullstelle und genau einen Pol haben, müssen Zähler und Nenner der rationalen Abbildung linear sein.
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ auf sich selbst. Weil f^{-1} kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbildet, kann man f durch $f(\infty) = \infty$ zu einer biholomorphen Abbildung von $\mathbb{P}^1$ auf sich selbst fortsetzen, also zu einer Möbiustransformation. Eine Möbiustransformation, die $\mathbb{C}$ auf sich abbildet, muß aber linear sein.
Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph. Wir verknüpfen f mit einer Möbiustransformation $\mu : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, so daß $g = \mu \circ f$ Null auf Null abbildet. Nach 3.15 ist $|g'(0)| \leq 1$. Wenn f biholomorph ist, folgt ebenso $|g'(0)|^{-1} = |(g^{-1})'(0)| \leq 1$. g ist also eine Drehung ϵz ($|\epsilon| = 1$) und $f = \mu^{-1} \circ g$ eine Möbiustransformation. □

Die Automorphismen von $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ lassen sich leicht angegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) &= \left\{ \frac{qz+r}{sz+t} \;\middle|\; q,r,s,t \in \mathbb{R},\, qt - sr = 1 \right\} \\ \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) &= \left\{ \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \;\middle|\; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Lemma 8.6

1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *operiert dreifach transitiv: Zu je drei (paarweise) verschiedenen Punkten* a, b, c *und* a', b', c' *gibt es eine Möbiustransformation* μ *mit* $\mu(a) = a'$, $\mu(b) = b'$ *und* $\mu(c) = c'$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *operiert sogar* scharf *transitiv: das heißt, daß* μ *durch seine Werte auf drei Punkten schon eindeutig bestimmt ist.*
2. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *operiert scharf zweifach transitiv.*
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ *operiert einfach transitiv, aber nicht zweifach transitiv.*

BEWEIS: $\frac{1}{z-a}$ bildet a auf ∞ ab. $z - b$ bildet b auf 0 ab und fixiert ∞. $\frac{z}{c}$ bildet c auf 1 ab und fixiert ∞ und 0. Man kann also jedes Tripel (a, b, c) mit einer Möbiustransformationauf $(\infty, 0, 1)$ abbilden. Daraus folgt, daß $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 3–fach transitiv ist. Für die Scharfheit genügt es zu zeigen, daß nur die triviale Möbiustransformation drei Fixpunkte haben kann; wobei wir annehmen können, daß die Fixpunkte $\infty, 0, 1$ sind: Wenn $\mu(\infty) = \infty$, hat μ die Form $az + b$. Wenn 0 fixiert wird, ist $b = 0$, wenn 1 fixiert wird, $a = 1$.

Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten. Die dritte folgt aus 8.3 und der Bemerkung, daß Automorphismen von $\mathbb{E}$, die 0 fixieren, Drehungen sind. □

Wir erhalten damit einen neuen Beweis einer früheren Beobachtung (vergleiche S. 38):

Folgerung 8.7 $\mathbb{C}$ *und* $\mathbb{E}$ *sind nicht biholomorph.*

Definition *Das Doppelverhältnis von vier verschieden komplexen Zahlen a, b, x, y ist*

$$\mathrm{DV}(a,b,x,y) = \frac{a-x}{a-y} : \frac{b-x}{b-y}.$$

Man kann diese Definition zwanglos auf Punkte in $\mathbb{P}^1$ ausdehnen, indem man beachtet, daß

$$(1) \qquad \mathrm{DV}\left(\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}\right) = \frac{\begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & y \\ a' & y' \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} b & x \\ b' & x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & y \\ b' & y' \end{vmatrix}}.$$

Man rechnet zum Beispiel

$$(2) \qquad \mathrm{DV}(0, \infty, x, 1) = \mathrm{DV}\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{x}{1}, \frac{1}{1}\right) = x.$$

Folgerung 8.8

1. *Zwei Viertupel aus $\mathbb{P}^1$ sind genau dann durch eine Möbiustransformation aufeinander abbildbar, wenn sie das gleiche Doppelverhältnis haben.*
2. *Zwei Tripel aus $\mathbb{C}$ sind genau dann durch eine lineare Möbiustransformation aufeinander abbildbar, wenn sie das gleich Doppelverhältnis*

   $$\mathrm{DV}(a, \infty, x, y) = \frac{a-x}{a-y}$$

   mit ∞ haben.

BEWEIS: Aus (1) folgt, daß Möbiustransformationen das Doppelverhältnis erhalten. Aus (2) folgt, daß x durch a, b, y und $\mathrm{DV}(a,b,x,y)$ eindeutig bestimmt ist. $\square$

Lemma 8.9 *Vier Punkte liegen genau dann auf einer Kreislinie, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.*

Geraden fassen wir als Kreislinien auf, die durch ∞ gehen.

BEWEIS: Weil

$$\begin{aligned} \mathrm{DV}(b,a,x,y) &= \mathrm{DV}(a,b,x,y)^{-1} \\ \mathrm{DV}(a,x,b,y) &= 1 - \mathrm{DV}(a,b,x,y) \\ \mathrm{DV}(a,b,y,x) &= \mathrm{DV}(a,b,x,y)^{-1}, \end{aligned}$$

ist, ändert sich die Realität des Doppelverhältnisses nicht, wenn man die Argumente permutiert. Wir können also annehmen, daß $axby$ die positiv durchlaufenen Eckpunkte eines Vierecks sind, wie in der folgenden Abbildung 2. Die Eckpunkte liegen genau dann auf einem Kreis, wenn sich α und β zu π ergänzen. Weil

$$\alpha = \arg\left(\frac{a-y}{a-x}\right) \qquad \text{und} \qquad \beta = \arg\left(\frac{b-x}{b-y}\right),$$

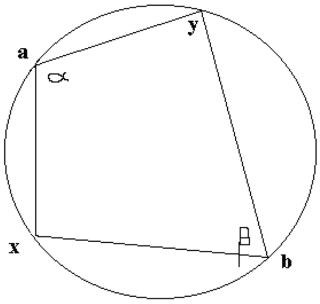


Abbildung 2:

bedeutet das $\arg \mathrm{DV}(a,b,x,y) = \pi$, das heißt, daß $\mathrm{DV}(a,b,x,y)$ reell ist[13]. □

Folgerung 8.10 *Möbiustransformationen bilden Kreise auf Kreise ab.*

Wenn a, b, c, d auf einem Kreis liegen, ist das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(a,b,c,d)$

- negativ, wenn $\{a,b\}$ das Paar $\{c,d\}$ trennt,
- größer als 1, wenn $\{a,c\}$ das Paar $\{b,d\}$ trennt,
- zwischen 0 und 1, wenn $\{a,d\}$ das Paar $\{b,c\}$ trennt.

Man erkennt das leicht aus (2), weil man annehmen kann, daß $a = 0$, $b = \infty$ und $d = 1$.

Definition *Eine nicht–euklidische Gerade in $\mathbb{E}$ ist ein Kreissegment, das auf dem Rand $\partial\mathbb{E}$ von $\mathbb{E}$ senkrecht steht. Seien x und y zwei Punkte in $\mathbb{E}$. Seien a und b Anfangs– und Endpunkt der nicht–euklidischen Geraden, die durch x und y geht. Dann definieren wird den nicht–euklidischen Abstand von x und y durch*

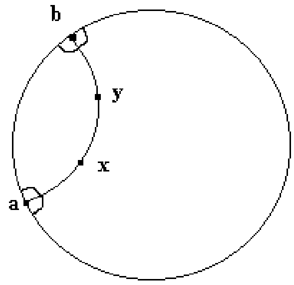
$$\mathrm{d}(x,y) = -\log(\mathrm{DV}(a,b,x,y)).$$

Man beachte, daß aus der letzten Bemerkung folgt, daß $\mathrm{DV}(a,b,x,y)$ zwischen 0 und 1 liegt. $\mathrm{d}(x,y)$ ist also wohldefiniert und positiv.

Satz 8.11 *Zwei Punktepaare in $\mathbb{E}$ sind genau dann mit einer Möbiustransformation von $\mathbb{E}$ aufeinander abbildbar, wenn sie den gleichen nicht–euklidischen Abstand haben.*

Beweis: Sei K die nicht–euklidische Gerade durch x und y mit Endpunkten a und b auf $\partial\mathbb{E}$. Wenn eine Möbiustransformation μ x auf x' und y auf y' abbildet, bildet μ K' auf eine Kreislinie ab, die durch x' und y' geht und (weil holomorphe Abbildungen winkeltreu sind) auf $\partial\mathbb{E} = \mu(\partial\mathbb{E})$ senkrecht steht. K' ist also eine nicht–euklidische Gerade. a und b werden auf die Endpunkte von K' abgebildet. Also $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(x',y')$.

[13] Wir haben a, b, x, y so angeordnet, daß der Fall $\alpha + \beta = 2\pi$, oder $\arg \mathrm{DV}(a,b,x,y) = 0$, nicht eintreten kann.



Sei umgekehrt x' und y' mit $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(x',y')$ gegeben und a' und b' die Endpunkte der nicht–euklidischen Geraden K' durch x' und y'. Weil $\mathrm{DV}(a,b,x,y) = \mathrm{DV}(a',b',x',y')$, gibt es ein μ, das (a,b,x,y) auf (a',b',x',y') abbildet. Dann bildet μ K auf K' ab. Und weil $\partial\mathbb{E}$ die einzige Kreislinie ist, die in a' und b' senkrecht auf K' steht, muß $\mu(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$ sein. □

Wenn x, y, z hintereinander auf einer nicht–euklidischen Geraden liegen, ist

$$\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z).$$

Das folgt der leicht zu verifizierenden Gleichung

$$\mathrm{DV}(a,b,x,z) = \mathrm{DV}(a,b,x,y)\mathrm{DV}(a,b,y,z).$$

Man kann leicht zeigen, daß die Möbiustransformationen von $\mathbb{E}$ genau die nicht–euklidischen *Bewegungen* von $\mathbb{E}$ sind, das heißt, Permutationen, die Abstände und die Orientierung erhalten.

8.2 Exkurs 2: Riemannsche Flächen

Literatur

[1] Otto Forster. *Riemannsche Flächen.* Springer Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

Eine n–dimensionale *Mannigfaltigkeit* X ist ein zusammenhängender, hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis, der lokal isomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist. Das heißt, daß es eine Überdeckung von X mit offenen Mengen U gibt, die jeweils homöomorph zu einer offenen Teilmenge V des $\mathbb{R}^n$ sind. *Flächen* sind 2–dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Eine $\mathbb{C}$–*Karte* einer Fläche X ist ein Homöomorphismus

$$p : U \to V$$

einer offenen Teilmenge von X mit einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zwei $\mathbb{C}$–Karten $p : U \to V$ und $p' : U' \to V'$ heißen *kompatibel*, wenn der Kartenwechsel

$$p' \circ p^{-1} : p(U \cap U') \to p'(U \cap U')$$

biholomorph ist. Ein (holomorpher) Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Familie von kompatiblen $\mathbb{C}$–Karten, deren Definitionsbereiche X überdecken. Zwei Atlanten heißen *äquivalent*, wenn ihre Karten kompatibel sind. Wir sagen, daß äquivalente Atlanten die *dieselbe holomorphe Struktur* auf X bestimmen.

Definition *Eine Riemannsche Fläche ist eine Fläche mit einer holomorphen Struktur.*

Beispiel 1: $\mathbb{C}$ mit der offensichtlichen komplexen Struktur ist eine Riemannsche Fläche.

Jede zusammenhängende offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche ist, mit der induzierten komplexen Struktur, wieder eine Riemannsche Fläche. Insbesondere ist $\mathbb{E}$ eine Riemannsche Fläche.

Beispiel 2: $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Riemannsche Fläche, deren komplexe Struktur durch den Atlas mit den beiden Karten $z : \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ und $\frac{1}{z} : \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben ist.

Definition *Eine stetige Abbildung $f : X \to X'$ zwischen Riemannschen Flächen heißt holomorph , wenn für jede Karte $p : U \to V$ (des Atlases) von X und jede holomorphe Karte $p' : U' \to V'$ von X' die Funktion*

$$p' \circ f \circ p^{-1} : p(f^{-1}(U') \cap U) \to V'$$

holomorph ist.

Wenn X und X' die Riemannsche Zahlkugel oder ein Teilgebiet von $\mathbb{C}$ sind, stimmt diese Definition mit der in Abschnitt 4.2 gegebenen überein. Man beachte auch, daß der Begriff der holomorphen Abbildung nur von den komplexen Strukturen von X und X' und nicht von den gewählten Atlanten abhängt.

Beispiel 3: Sei $\omega \neq 0$ und sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$ die Gruppe aller ganzzahligen Vielfachen von ω. Wir nennen zwei komplexe Zahlen z und z' äquivalent ($z \equiv z'$), wenn $z - z' \in \Gamma$. Sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die Projektion auf die Menge der Äquivalenzklassen. $\mathbb{C}/\Gamma$ versehen mit der Quotiententopologie (d.h. U ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist) ist eine Fläche, die wie ein unendlich langer Zylinder aussieht. Die Karten $\pi^{-1} : \pi(V) \to V$, für alle offenen $V \subset \mathbb{C}$, auf denen π injektiv ist, machen $\mathbb{C}/\Gamma$ zu einer Riemannschen Fläche. Die uns aber schon bekannt war: Die Funktion $e(z/\equiv) = \exp(z\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\omega})$ ist wohldefiniert und liefert einen Isomorphismus $e : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}^\bullet$.

Beispiel 4: Für zwei $\mathbb{R}$–linear unabhängige komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ das von ihnen aufgespannte Gitter. Die Riemannsche Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$ ist ein *Torus*, also homöomorph zu $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$, für den Einheitskreis $\mathrm{S}^1 = \{z \mid |z| = 1\}$. Die komplexe Struktur hängt aber von ω_1 und ω_2 ab:

Satz 8.12 *Seien Γ und Γ' zwei, jeweils von zwei $\mathbb{R}$–linear unabhängigen Zahlen aufgespannte, Gitter. Dann ist $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{C}/\Gamma'$ genau dann, wenn $\alpha\Gamma = \Gamma'$ für eine komplexe Zahl α.*

Die Riemannschen Flächen $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\,\mathrm{i})$ und $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}2 + \mathbb{Z}\,\mathrm{i})$ sind zum Beispiel nicht isomorph.

Beweis: Wenn $\alpha\Gamma = \Gamma'$, definiert αz einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}/\Gamma$ und $\mathbb{C}/\Gamma'$.

Sei umgekehrt $\phi : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ ein Isomorphismus. Weil wir durch Addition mit einer komplexen Zahl jeden Punkt von $\mathbb{C}/\Gamma'$ nach $0/\equiv'$ verschieben können, können wir annehmen, daß

$\phi(0/\equiv) = 0/\equiv'$. Mit Hilfe des nächsten Hilfssatzes aus der Topologie liften wir ϕ zu einer Abbildung $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ϕ^{-1} zu einer Abbildung $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $\pi' \circ \alpha = \phi \circ \pi$, $\pi \circ \beta = \phi^{-1} \circ \pi'$ und $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[d, "\pi'"] \\
\mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{C}/\Gamma'
\end{tikzcd}$$

Weil $\beta \circ \alpha$ eine Liftung der identischen Abbildung von $\mathbb{C}/\Gamma$ ist, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes, daß $\beta \circ \alpha$ die Identität ist. Ebenso ist $\alpha \circ \beta$ die Identität. Aus 8.5 folgt, daß α Multiplikation mit einer Zahl $\neq 0$ ist, die wir auch α nennen. Es ist dann $\beta(z) = \alpha^{-1}z$. Aus $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ und $\alpha^{-1}\Gamma' \subset \Gamma$ folgt $\alpha\Gamma = \Gamma'$. $\square$

Hilfssatz *X, Y und Z seien Mannigfaltigkeiten, $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung und Z einfach zusammenhängend. Dann läßt sich jede stetige Abbildung $\psi : Z \to Y$ liften zu einer stetigen Abbildung $\alpha : Z \to X$ mit $\psi = \pi \circ \alpha$. Wenn man ein $z_0 \in Z$ festhält, gibt es für jedes $x \in \pi^{-1}(\psi(z_0))$ genau eine Liftung α mit $\alpha(z_0) = x$.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\pi"] \\
Z \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\psi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\square$

$\pi : X \to Y$ ist eine *Überlagerung*, wenn π eine stetige Surjektion ist, und wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U hat, für die $\pi^{-1}(U)$ in disjunkte offene Menge zerfällt, die vermöge π homöomorph zu U sind. Die Räume X, Y und Z müssen nicht Mannigfaltigkeiten sein. Es genügt, wenn sie global und lokal wegweise zusammenhängend sind.

Beispiel 5: Wenn Γ eine diskrete Gruppe von fixpunktfreien Automorphismen von $\mathbb{E}$ ist, ist $\mathbb{E}/\Gamma$ eine Riemannsche Fläche. Sei zum Beispiel S ein nicht–euklidisches reguläres Achteck in $\mathbb{E}$, dessen Winkelsumme 2π ist.

(In der nichteuklidischen Geometrie kann die Winkelsumme eines n–Ecks jeden Wert zwischen 0 und $(n-2)\pi$ annehmen. Die Differenz zwischen der Winkelsumme und $(n-2)\pi$ ist zur nichteuklidischen Fläche des n–Ecks proportional.) Die nicht–euklidischen Bewegungen, die eine Seite von S auf ihre Gegenseite so verschieben, daß sich der Umlaufsinn der Seite umgekehrt, erzeugen eine Gruppe Γ der gewünschten Art. Die Bilder von S unter den Elementen von Γ bilden eine Pflasterung von $\mathbb{E}$. Die Fläche $\mathbb{E}/\Gamma$ entsteht aus S durch Verkleben gegenüberliegender

Seiten von S. Man sieht so, daß die $\mathbb{E}/\Gamma$ das Geschlecht 2 hat, das heißt, homöomorph ist zu einer Kugel mit zwei angeklebten Henkeln.

Jede Mannigfaltigkeit X hat eine (eindeutig bestimmte) einfach zusammenhängende Überlagerung U, die *universelle* Überlagerung $\pi : U \to X$. Aus der Gruppe Γ der Homöomorphismen von U, die alle Fasern $\pi^{-1}(x)$ präservieren, (den *Decktransformationen*) erhält man X zurück als $X \cong U/\Gamma$. Wenn X eine Riemannsche Fläche ist, ist auch U eine Riemannsche Fläche und Γ ist eine diskrete Gruppe von fixpunktfreien Automorphismen. Der Riemannsche Uniformisierungssatz

Satz 8.13 (Uniformisierungssatz) *Die einfachen zusammenhängenden Riemannschen Flächen sind* $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ *und* $\mathbb{P}^1$. □

ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes. Er bedeutet, daß man zur Bestimmung aller Riemannschen Flächen nur die diskreten, fixpunktfreien Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ bestimmen muß. Das ist trivial für $\mathbb{P}^1$ (es gibt keine fixpunktfreien Automorphismen) und unproblematisch für $\mathbb{C}$ (die nicht–trivialen Gruppen haben die Form $\mathbb{Z}\omega$ oder $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$). Für $\mathbb{E}$ ist das etwas komplizierter; aber im Prinzip sehen alle Γ so aus wie im letzten Beispiel.

Beispiel 6: Eine *ebene algebraische Kurve* $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ für ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{C}[x, y]$ definiert eine Fläche, wenn C *glatt* ist. Das heißt, daß auf C die partiellen Ableitungen f_x und f_y keine gemeinsame Nullstelle haben. C ist auf natürliche Weise eine Riemannsche Fläche. Wenn man zu projektiven Koordinaten übergeht (siehe Seite 55), erhält C noch endlich viele Punkte im Unendlichen. Und wenn C auch dort glatt ist, wird C zu einer kompakten Riemannschen Fläche.

Satz 8.14 (Riemannscher Existenzsatz) *Kompakte Riemannsche Flächen sind glatte projektive algebraische Kurven.* □

Der Riemannsche Existenzsatz in dieser Form ist nur richtig, wenn man neben ebenen Kurven auch algebraische Kurven zuläßt, die durch Gleichungen in mehr als zwei Variablen definiert sind. (Es genügen allerdings drei Variable.)

Beispiel 7: Die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion:
Wir stellen uns vor, daß eine irreduzible Polynomgleichung $f(z, w) = 0$ eine *algebraische Funktion* $z \mapsto w$ bestimmen sollte. In Wirklichkeit ist die Funktion aber nur auf der *Riemannschen Fläche der algebraischen Funktion* definiert: Wir betrachten die Familie aller Paare (U, g), wobei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist und $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z, g(z)) = 0$ für alle $z \in U$ ist. Wir verkleben zwei solche Paare (U, g) und (V, h) am Durchschnitt $U \cap V$, wenn $U \cap V$ nicht leer ist und g und h auf dem Durchschnitt übereinstimmen. Es resultiert eine Riemannsche Fläche, die $\mathbb{C}$ fast ganz , bis auf endliche viele *Verzweigungspunkte*, überlagert. Wenn wir unserer Fläche an den Verzweigungspunkten und bei ∞ in geeigneter Weise endliche viele Punkte hinzufügen, erhalten wir eine kompakte Riemannsche Fläche. Wenn $f(z, w) = 0$ eine glatte (projektive) Kurve definiert, erhalten wir die gleiche Riemannsche Fläche wie im letzten Beispiel.

Eine Variante des Riemannschen Existenzsatzes ist:

Satz 8.15 *Jede kompakte Riemannsche Fläche ist Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion.* □

Wir werden im nächsten Abschnitt einen Spezialfall des Riemannschen Existenzsatzes zeigen: Jede Riemannsche Fläche der Form $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ ist isomorph zu einer glatten, ebenen, projektiven algebraischen Kurve.

9 Doppelt–periodische Funktionen

Literatur

[1] C.L. Siegel. *Topic in Complex Function Theory*, volume I. Wiley–Interscience; New York, London, Sydney, Toronto, 1969.

9.1 Divisoren doppelt–periodischer Funktionen

Definition *ω_1 und ω_2 seien zwei $\mathbb{R}$–linear unabhängige komplexe Zahlen. Wir nennen eine auf $\mathbb{C}$ definierte meromorphe Funktion f doppelt–periodisch mit Perioden ω_1, ω_2, wenn*

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$$

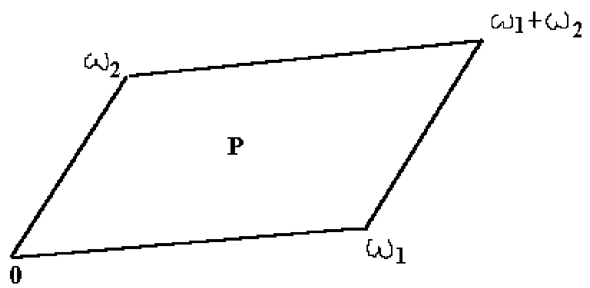
für alle $z \in \mathbb{C}$.

Mit ω_1 und ω_2 sind auch alle $\mathbb{Z}$–Linearkombinationen aus dem *Periodengitter*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

Perioden von f. f ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf dem *Fundamentalbereich*

$$P = \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x < 1,\, 0 \leq y < 1\}.$$



Doppelt–periodische Funktionen mit Periodengitter Γ lassen sich auffassen als Funktionen auf der Riemannschen Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$.

Wir halten in Folgenden ein Periodengitter Γ fest und benützen die Bezeichnung

$$x \equiv y$$

für $x - y \in \Gamma$.

Lemma 9.1 *Holomorphe doppelt–periodische Funktionen sind konstant.*

Beweis: Eine doppelt–periodische Funktion nimmt alle ihre Werte schon auf P an. f ist also beschränkt durch $\max\{|f(z)| \mid z \in \overline{P}\}$ und daher nach dem Liouvilleschen Satz 3.6 konstant. $\square$

Satz 9.2 *Die Summe der Residuen einer doppelt–periodischen meromorphen Funktion im Fundamentalbereich ist Null.*

Beweis: Die meromorphe Funktion f hat im Fundamentalbereich nur endlich viele Polstellen. Wir können f so verschieben (das heißt durch $f(z+a)$ ersetzen), daß die Pole nicht auf dem Rand von P liegen. Die Summe der Residuen ist dann $\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z$. Das Integral ist aber $= 0$, weil sich die Integrale über gegenüberliegende Seiten von P gegenseitig aufheben. $\square$

Folgerung 9.3 *Eine doppelt–periodische Funktion $f \neq 0$ hat (mit Vielfachheiten gezählt) im Fundamentalbereich ebenso viele Nullstellen wie Polstellen.*

Beweis: (Zahl der Nullstellen) – (Zahl der Pole) ist die Summe der Residuen von $\frac{f'(z)}{f(z)}$. $\square$

Folgerung 9.4 *Eine nicht–konstante doppelt–periodische Funktion f nimmt (mit Vielfachheiten gezählt) jeden Wert in $\mathbb{P}^1$ gleich oft an.*

Null– und Polstellen einer doppelt–periodischen Funktion müssen einer weiteren Bedingung genügen. Dazu brauchen wir eine Definition

Definition *Ein Divisor ist eine mit Elementen von P indizierte Familie*

$$(n(z))_{z\in P}\,,$$

von ganzen Zahlen, von denen nur endlich viele $\neq 0$ sind. Der Divisor $(f) = (n_f(z))_{z\in P}$ einer doppelt–periodischen Funktion $f \neq 0$ ordnet jedem $z \in P$ die Vielfachheit der "Nullstelle" z von f zu:

$$n_f(z) = \begin{cases} n & \text{, wenn } z \text{ } n\text{–fache Nullstelle von } f \\ -n & \text{, wenn } z \text{ } n\text{–facher Pol von } f \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Divisoren der Form (f) heißen Hauptdivisoren.

Die Folgerung 9.3 bedeutet, daß für jeden Hauptdivisor

$$\sum_{z\in P} n_f(z) = 0.$$

Satz 9.5 *Für jeden Hauptdivisor ist*

$$\sum_{z\in P} n_f(z) z \equiv 0.$$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß umgekehrt jeder Divisor, der 9.3 und 9.5 erfüllt, ein Hauptdivisor ist.

Beweis: Bei Polen oder Nullstellen hat $\frac{f'(z)}{f(z)}$ hat einen einfachen Pol mit Residuum $n_f(z)$. Das Residuum von $\frac{f'(z)}{f(z)}z$ ist also immer $n_f(z)z$. Es folgt, daß

$$\sum_{z\in P} n_f(z)z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} z\,\mathrm{d}z.$$

(Sollten Null– oder Polstellen auf dem Rand von f liegen, verschieben wir f geeignet. Wegen 9.3 ändert das nichts an der zu beweisenden Behauptung.) Die Integrale über gegenüberliegende Seiten von P heben sich nicht mehr auf. Das Gesamtintegral berechnet sich aber als

$$-\left(\omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\right). \tag{1}$$

Weil die Bildkurve $\alpha(t) = f(t\omega_1)$ des unteren Randes von P geschlossen ist, ist (wie in Beweis von 5.15)

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^{\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

die Umlaufszahl von α um 0, also eine ganze Zahl. Das gleiche gilt für $\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^{\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)}$. Der Ausdruck (1) ist also eine $\mathbb{Z}$–Linearkombination von ω_1 und ω_2. □

Die Sätze 9.3 und 9.5 lassen sich so zusammenfassen:

Satz *Eine doppelt–periodische Funktion hat ebensoviele Nullstellen $a_1, \ldots, a_m$ wie Pole $p_1, \ldots, p_m$. Weiterhin gilt*

$$a_1 + \ldots + a_m \equiv p_1 + \ldots + p_m.$$

9.2 Funktionen mit vorgeschriebenen Null– und Polstellen

Wir wollen zuerst eine möglichst einfache nicht–konstante doppelt–periodische Funktion angeben. Doppelt–periodische Funktionen mit einem einfachen Pol und einer einfachen Nullstelle kann es nach dem letzten Satz nicht geben. Die *Weierstraßsche $\wp$–Funktion* hat einen doppelten Pol bei 0 und zwei einfache Nullstellen a und $-a$ in P.

Satz 9.6 *Die Reihe*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma^\circ} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

ist außerhalb von Γ lokal gleichmäßig (absolut) konvergent und stellt eine meromorphe doppelt–periodische Funktion mit Periodengitter Γ dar, die Weierstraßsche $\wp$–Funktion. $\wp$ ist eine gerade Funktion, *das heißt, daß $\wp(-z) = \wp(z)$. In P ist* 0 *der einzige Pol (der Ordnung 2) von $\wp$.*

Beweis: Wir verwenden folgende Tatsache, die leicht zu beweisen ist, indem man Summen durch Integrale abschätzt, die leicht zu berechnen sind:

Hilfssatz

$$(2) \qquad \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus 0} \frac{1}{|m+n\,\mathrm{i}|^3} \quad < \quad \infty$$

□

Wenn $|\gamma| > |2z|$, ist

$$\left|\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right| = \left|\frac{z^2 - 2z\gamma}{(z-\gamma)^2\gamma^2}\right| \le \left|\frac{3z\gamma}{\frac{1}{4}\gamma^4}\right| \le \left|\frac{12z}{\gamma^3}\right|.$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{1}{\gamma^3}$ absolut konvergiert. Lineare Algebra zeigt, daß es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß

$$\frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|} \le \epsilon \frac{1}{|m+n\,\mathrm{i}|}$$

für alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Also sind wir auf das Problem reduziert, zu zeigen, daß

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus 0} \frac{1}{|m+n\,\mathrm{i}|^3}$$

konvergiert.
Die Funktion $\wp(z+\omega_1)$ wird durch die Reihe

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{(\gamma-\omega_1)^2}\right)$$

(wobei hier $\frac{1}{0} = 0$) dargestellt. Es ist also

$$\wp(z+\omega_1) - \wp(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{(\gamma-\omega_1)^2}\right).$$

Wegen der absoluten Konvergenz berechnet sich das als

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2} - \frac{1}{((m-1)\omega_1+n\omega_2)^2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 = 0$$

□

Die Ableitung $\wp'$ hat einen dreifachen Pol bei 0 und drei Nullstellen (mit ihrer Vielfachheit gezählt) in P. Weil $\wp'$ *ungerade* ist (d.h. $\wp'(-z) = -\wp(z)$), sind diese drei Nullstellen $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Das sind (neben 0) gerade die Elemente a von P mit $a \equiv -a$ und die einzigen Elemente von P, wo $\wp$ seinen Wert zweifach annimmt.

Wir bezeichnen den Divisor, der bei $a \in P$ den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 hat, mit $\mathcal{D}(a)$. Wenn $a \notin P$, meinen wir mit $\mathcal{D}(a)$ den Divisor $\mathcal{D}(a')$, wobei $a' \in P$ und $a' \equiv a$.

Lemma 9.7 *Wenn $a+b+c \equiv 0$ ist $\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(c) - 3\mathcal{D}(0)$ Divisor einer Funktion der Form $\alpha\wp(z) + \beta\wp'(z) - \gamma$.*

BEWEIS:
Sei $D = \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(-a-b) - 3\mathcal{D}(0)$ unser Divisor. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $a, b \not\equiv 0$ und $a \not\equiv b$
   Sei $\alpha x + \beta y = \gamma$ die Gleichung einer Geraden, die durch die beiden Punkte $(\wp(a), \wp'(a))$ und $(\wp(b), \wp'(b))$ geht. Dann sind a und b Nullstellen von $f(z) = \alpha\wp(z) + \beta\wp'(z) - \gamma$ und 0 ist ein zwei– oder dreifacher Pol von f. Aus 9.3 und 9.5 folgt $(f) = D$.

2. $a \equiv b \not\equiv 0$
   Wir wählen α und β, nicht beide gleich Null, so daß $\alpha\wp'(a) + \beta\wp''(a) = 0$, und setzen $\alpha\wp(a) + \beta\wp'(a) = \gamma$. Dann ist a (mindestens) doppelte Nullstelle von $f(z) = \alpha\wp(z) + \beta\wp'(z) - \gamma$. 0 ist der einzige Pol von f in P, mit der Vielfachheit 2 oder 3. Es bleibt nichts anderes übrig, als daß $(f) = D$.

3. $a \equiv 0$ oder $b \equiv 0$
   Wenn $a \equiv b \equiv 0$, ist D der Nulldivisor. Also ist $(1) = D$. Wenn $b \not\equiv 0$, sei $\gamma = \wp(b)$. Dann ist $(\wp(z) - \gamma) = \mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(-b) - 2\mathcal{D}(0) = D$.

□

Folgerung 9.8 $\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) - \mathcal{D}(a+b) - \mathcal{D}(0)$ *ist ein Hauptdivisor.*

BEWEIS: $\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) - \mathcal{D}(a+b) - \mathcal{D}(0)$ ist Differenz der beiden Hauptdivisoren $\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(-a-b) - 3\mathcal{D}(0)$ und $\mathcal{D}(a+b) + \mathcal{D}(-a-b) - 2\mathcal{D}(0)$. □

Satz 9.9 *Ein Divisor* $(n(z))_{z\in P}$ *ist genau dann Hauptdivisor, wenn* $\sum_{z\in P} n_f(z) = 0$ *und* $\sum_{z\in P} n_f(z) z \equiv 0$.

BEWEIS: Aus 9.8 folgt, daß

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(c) - \mathcal{D}(a+b+c) - 2\mathcal{D}(0) \\ = \quad &(\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) - \mathcal{D}(a+b) - \mathcal{D}(0)) \\ &+ (\mathcal{D}(a+b) + \mathcal{D}(c) - \mathcal{D}(a+b+c) - \mathcal{D}(0)) \end{aligned}$$

Hauptdivisor ist. Oder allgemeiner, daß alle

$$\mathcal{D}(a_1) + \ldots + \mathcal{D}(a_m) - \mathcal{D}(a_1 + \ldots + a_m) - (m-1)\mathcal{D}(0)$$

Hauptdivisoren sind. Wenn $a_1 + \ldots + a_m \equiv b_1 + \ldots + b_m$, ist also

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(a_1) + \ldots + \mathcal{D}(a_m) - (\mathcal{D}(b_1) + \ldots + \mathcal{D}(b_m)) \\ = \quad &(\mathcal{D}(a_1) + \ldots + \mathcal{D}(a_m) - \mathcal{D}(a_1 + \ldots + a_m) - (m-1)\mathcal{D}(0)) \\ &-(\mathcal{D}(b_1) + \ldots + \mathcal{D}(b_m) - \mathcal{D}(b_1 + \ldots + b_m) - (m-1)\mathcal{D}(0)) \end{aligned}$$

Hauptdivisor. Das war zu zeigen. □

9.3 Der Körper der doppelt–periodischen meromorphen Funktionen

Aus dem Beweis von 9.9 folgt, daß jede doppelt–periodische Funktion Quotient von Produkten von Funktionen der Form $\alpha\wp(z) + \beta\wp'(z) - \gamma$ ist. Der Körper

$$\mathbb{C}(\mathbb{C}/\Gamma)$$

der doppelt–periodischen Funktionen wird also erzeugt von $\wp(z)$ und $\wp'(z)$. Genauer gilt:

Satz 9.10 *Jede doppelt–periodische Funktion hat die Gestalt:*

$$Q(\wp(z)) + \wp'(z)R(\wp(z))$$

für zwei rationale Funktionen $Q(x)$ und $R(x)$.

BEWEIS: Jede meromorphe Funktion f ist Summe einer geraden Funktion $\frac{f(z)+f(-z)}{2}$ und einer ungeraden $\frac{f(z)-f(-z)}{2}$, die beide doppelt–periodisch sind, wenn f doppelt–periodisch ist. Ungerade Funktionen lassen sich in der Form $\wp'(z)g(z)$ für eine gerade Funktion g schreiben. Es genügt also zu zeigen, daß jede gerade doppelt–periodische Funktion f eine rationale Funktionen von $\wp(z)$ ist.

Wir brauchen einen Hilfssatz

Hilfssatz *Wenn f gerade ist, haben seine Nullstellen und Pole aus*

$$P[2] = \left\{0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right\}$$

gerade Vielfachheit.

BEWEIS: Wenn k ungerade ist, ist $f^{(k)}$ ungerade, und daher $f^{(k)}(a) = 0$ für alle a mit $a \equiv -a$. Daraus folgt die Behauptung für Nullstellen. Für Pole betrachtet man f^{-1}. □

Die Menge P' enthalte für alle $a \in P \setminus P[2]$ genau eins der Element a oder $-a$. Wenn wir $Q(X)$ definieren durch

$$\prod_{a\in P'} (X - \wp(a))^{n_f(a)} \prod_{b\in P[0]\setminus 0} (X - \wp(b))^{\frac{n_f(b)}{2}}$$

haben $Q(\wp(z))$ und $f(z)$ den gleichen Divisor auf $P \setminus 0$ und daher, wegen 9.3, auch auf ganz P. Es folgt, daß sich $Q(\wp(z))$ und $f(z)$ nur durch einen Faktor unterscheiden. □

Um den Körper $\mathbb{C}(\mathbb{C}/\Gamma) = \mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z))$ zu bestimmen, muß man noch herausbekommen, ob $\wp'(z)$ von $\wp(z)$ algebraisch unabhängig ist, oder einer algebraischen Gleichung genügt. Wenn man den letzten Satz (und seinen Beweis) auf $\wp'(z)^2$ anwendet, sieht man aber, daß $\wp'(z)^2$ eine rationale Funktion von $\wp(z)$ sein muß. Der nächste Satz gibt diese Funktion an:

Satz 9.11 *Sei $p_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$, $p_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ und $p_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$. Dann ist für alle z*

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - p_1)(\wp(z) - p_2)(\wp(z) - p_3).$$

Beweis: Beide Seiten haben im Fundamentalbereich die gleichen Pol– und Nullstellen. Nämlich einen sechsfachen Pol bei 0 und bei $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ jeweils eine doppelte Nullstelle. Die beiden Seiten können sich also nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Die Laurententwicklung von $\wp(z)$ bei 0 beginnt mit z^{-2}, die Laurententwicklung von $\wp'(z)$ mit $-2z^{-3}$. Also beginnen die Laurententwicklungen der rechten und linken Seite der behaupteten Gleichung beide mit $4z^{-6}$. □

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} g_1 &= 4(p_1+p_2+p_3) \\ g_2 &= -4(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1) \\ g_3 &= 4p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

ist also

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_1\wp(z)^2 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Aus dem nächsten Satz folgt insbesondere, daß $g_1 = 0$.

Satz 9.12 *Sei $z^{-2}+a+bz^2+cz^4+\ldots$ der Anfang der Laurententwicklung von $\wp(z)$ bei 0. Dann ist $a=0$ und*

(3) $$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

wobei $g_2 = 20b$ und $g_3 = 28c$.

Beweis: a ist die Summe der konstanten Terme der Laurententwicklungen der $(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2})$ $(\gamma \in \Gamma^\circ)$. Diese Terme, die man ja durch Einsetzen von $z=0$ erhält, sind aber alle gleich Null. Wir betrachten die Koeffizienten von $z^{-6}, z^{-5}, z^{-4}, z^{-3}, z^{-2}, z^{-1}, z^0$, der Laurententwicklung von $\wp'(z)^2$, $\wp(z)^3$, $\wp(z)$ und 1 :

	z^{-6}	z^{-5}	z^{-4}	z^{-3}	z^{-2}	z^{-1}	z^0
$\wp'(z)^2$	4	0	0	0	$-8b$	0	$-16c$
$\wp(z)^3$	1	0	0	0	$3b$	0	$3c$
$\wp(z)$	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1

Wenn man die erste Zeile mit 1, zweite mit -4, die dritte mit $20b$ und die vierte mit $28c$ multipliziert, ist die Summe aller Spalten gleich Null. Die Funktion $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20b\wp(z) + 28c$ hat also keine Pole und eine Nullstelle bei 0, muß also nach 9.1 die Nullfunktion sein. □

Man kann auf g_2 und g_3 auf folgende Weise einfach aus ω_1 und ω_2 ausrechnen: $2b$ ist der konstante Term der Laurententwicklung von $\wp''(z)$ bei Null, $24c$ der konstante Term von $\wp''''(z)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} b &= 3\sum_{\gamma\in\Gamma^\circ}\frac{1}{\gamma^4} \\ c &= 5\sum_{\gamma\in\Gamma^\circ}\frac{1}{\gamma^6}. \end{aligned}$$

9.4 Die zugeordnete algebraische Kurve

Satz 9.13 *Die Abbildung*

$$z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$$

definiert eine Bijektion zwischen $P \setminus \{0\}$ und der ebenen algebraischen Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}.$$

BEWEIS:
Surjektivität: $\wp(z)$ nimmt jeden Wert zweimal an, ist also surjektiv. Wenn $(a, b) \in C$, gibt es also ein $x \in P$ mit $\wp(x) = a$. Weil $(a, \wp'(x)) \in C$, ist $(a, b) = (\wp(x), \wp'(x))$ oder $(a, b) = (\wp(-x), \wp'(-x))$.
Injektivität: Wenn $x \neq y$ und $\wp(x) = \wp(y)$ ist $x \equiv -y$ und daher $\wp'(x) = -\wp'(y)$. Weil $x \not\equiv -x$, ist x keine Nullstelle von $\wp'(z)$ und daher $\wp'(x) \neq \wp'(y)$. □

$0 \in P$ sollte einem "unendlichen" Punkt von C entsprechen. Um von solchen Punkten sprechen zu können, erweitert man $\mathbb{C}^2$ zur *projektiven* Ebene

$$\mathrm{P}^2(\mathbb{C}) = \left\{(\alpha : \beta : \gamma) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus 0\right\}.$$

Dabei bestimmen die *homogenen Koordinaten* α, β, γ und α', β', γ' denselben Punkt

$$(\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha' : \beta' : \gamma'),$$

wenn der Vektor $(\alpha', \beta', \gamma')$ ein Vielfaches von (α, β, γ) ist. Ein Punkt (x, y) von $\mathbb{C}^2$ hat die homogenen Koordinaten $(x : y : 1)$, die neuen unendlichen Punkte Koordinaten $(x : y : 0)$. In homogenen Koordinaten hat C die homogene Gleichung

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3. \tag{4}$$

In $\mathrm{P}^2(\mathbb{C})$ hat die "projektive" Kurve C den neuen Punkt $(0 : 1 : 0)$, der nun tatsächlich $0 \in P$ entspricht, wie man der Gleichung

$$(\wp(z) : \wp'(z) : 1) = \Big(\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} : 1 : \frac{1}{\wp'(z)}\Big)$$

entnimmt.

Weil die drei Nullstellen $\wp(\frac{\omega_1}{2})$, $\wp(\frac{\omega_2}{2})$ und $\wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ von $4x^3 - g_2 x - g_3$ paarweise verschieden sind, ist C glatt (auch im unendlichen Punkt). Die im Satz beschriebene Bijektion ist ein Biholomorphismus zwischen $\mathbb{C}/\Gamma$ und der Riemannschen Fläche C. (Siehe Beispiel 6 auf Seite 47.)

Die Bijektion mit $\mathbb{C}/\Gamma$ gibt C die Struktur einer abelschen Gruppe: Man definiert $\oplus$ durch

$$(\wp(z_1), \wp'(z_1)) \oplus (\wp(z_2), \wp'(z_2)) = (\wp(z_1 + z_2), \wp'(z_1 + z_2)).$$

Der nächste Satz zeigt, daß die Koordinaten von $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)$ rationale Funktionen von x_1, y_1, x_2, y_2 sind. Wir beschränken uns auf die x–Koordinate.

Satz 9.14 (Additionstheorem für die $\wp$–Funktion) *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ mit $z_1 \not\equiv z_2$ gilt*

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_2) - \wp'(z_1)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)}\right)^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2)$$

Beweis: Im Beweis von 9.7 (Fall 1) sieht man, daß eine Gerade $y = ax + b$, die C in $(x_1, y_1) = (\wp(z_1), \wp'(z_1))$ und $(x_2, y_2) = (\wp(z_2), \wp'(z_2))$ schneidet, C auch in

$$(x_3, y_3) = (\wp(-z_1 - z_2), \wp'(-z_1 - z_2))$$

schneidet. Wenn man $x_3 = \wp(z_1 + z_2)$ aus x_0, y_0, x_1, y_1 berechnen will, muß man die Gleichung dritten Grades

$$4x^3 - (ax + b)^2 - g_2 x - g_3 = 0$$

lösen, von der man zwei Lösungen, nämlich x_0 und x_1, schon kennt. Der Zerlegung

$$4x^3 - (ax + b)^2 - g_2 x - g_3 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

entnimmt man $\frac{1}{4}a^2 = x_1 + x_2 + x_3$. Weil $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ist also

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2.$$

□

Mit dem gleichen Beweis[14] (man verwendet aber vom Beweis von 9.7 den Fall 2) sieht man:

Zusatz *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$*

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z)$$

□

Die rechte Seite läßt leicht durch $\wp(z)$ und $\wp'(z)$ ausdrücken, weil (wie sich aus (3) durch Ableiten ergibt)

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}.$$

Beispiel: Wenn man glücklich zwei rationale Lösungen von

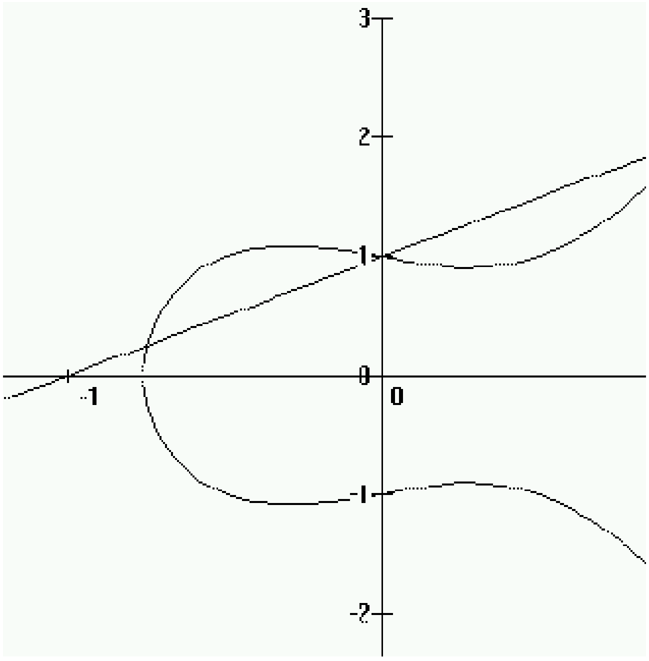
$$y^2 = 4x^3 - x + 1$$

gefunden hat, zum Beispiel $(0, 1)$ und $(1, 2)$, liefert unsere Formel eine dritte:

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{2 - 1}{1 - 0}\right)^2 - 0 - 1 = -\frac{3}{4}$$

mit $y_3 = -\frac{1}{4}$.

[14] Man erhält die Formel auch durch Grenzübergang $z_1 \to z_2$ aus dem Additionstheorem.



Die Differentialform $\mathrm{d}z$ entspricht beim Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}/\Gamma$ und C der Differentialform

$$\mathrm{d}x \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}} = \frac{\mathrm{d}x}{\wp'(z)} = \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

Sei $I(w) = z$ eine lokale Umkehrfunktion von $\wp(z) = w$. Die Ableitung von I berechnet sich als

$$I'(w) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\wp'(z)} = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}.$$

Die Berechnung sogenannter *elliptischen Integrale* wie zum Beispiel

$$\int \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} \,\mathrm{d}w$$

war der Ausgangspunkt der Theorie der doppelt–periodischen Funktionen.

Wenn man in C den Punkt ∞ mit $(\wp(z_0), \wp'(z_0))$ durch eine Kurve α verbindet, erhält man $z_0 \in \mathbb{C}/\Gamma$ zurück als

$$z_0 = \int_\alpha \frac{\mathrm{d}x}{y}.$$

Wenn man ∞ und $(\wp(z_0), \wp'(z_0))$ in C mit einer anderen Kurve verbindet, ändert sich der Wert des Integrals nur um ein Element von Γ. Man kann auf diese Weise zeigen, daß man jede glatte, durch eine Gleichung $y^2 = x^3 + bx + c$ gegebene Kurve für geeignete Perioden ω_1 und ω_2 aus Satz 9.13 erhält. Derartige Kurven heißen *elliptisch*.

Wenn b und c rationale Zahlen sind, bilden die rationalen Punkte (inklusive ∞) einer elliptischen Kurve auf die oben beschrieben Weise eine abelsche Gruppe. Der *Satz von Mordell* besagt, daß diese Gruppe endlich erzeugt ist.

Index

arg, 3
log, 10
$\log^*$, 10
$\mathrm{Aut}(X)$, 40
$\mathbb{C}(U)$, 18
$\cos(z)$, 5
$\cot(z)$, 34
$\mathcal{D}(a)$, 51
$\mathrm{DV}(a, b, x, y)$, 42
e^z, 5
$\exp(z)$, 5
$\mathbb{H}$, 38
$c \sim d$, 27
i, 3
$\mathrm{Im}(z)$, 3
$\nu_\gamma(z_0)$, 11
P, 48
$\mathbb{P}^1$, 18
$\wp$, 50
$\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$, 19
$\mathrm{P}^2(\mathbb{C})$, 55
$\mathrm{Res}_{z_0} f(z)$, 22
$\mathrm{Re}(z)$, 3
$\sin(z)$, 5, 37
∞, 18
$\measuredangle(\gamma)$, 26
$x \equiv y$, 48
$|z|$, 3

Abbildungssatz
  von Riemann, 39
Abstand
  nicht–euklidischer, 43
Additionstheorem für $\wp(z)$, 56
äquivalenter Atlas, 45
äußerer Konvergenzradius, 20
algebraische
  Funktion, 47
  Kurve, 47
Argument, 3
Atlas, 45
  äquivalenter, 45
Automorphismus, 40

berandender Zyklus, 29
Betrag, 3
Bewegung
  nicht–euklidische, 44
biholomorphe
  Abbildung, 37
  Gebiete, 37

Casorati-Weierstraß, Satz von, 17
Cauchysche
  Abschätzung für die Taylorkoeffizienten, 13
  Integralformel, 11
  Koeffizientenformel, 13

diskrete Menge, 18
Divisor, 49
doppelt–periodische Funktion, 48
Doppelverhältnis, 42

einfach zusammenhängender Raum, 10
einfacher Zyklus, 26
elliptische Kurve, 57
Excisionslemma, 28
Existenzsatz von Riemann, 47
Exponentialfunktion, 5

Fläche, 44
  Riemannsche, 45
Fundamentalbereich, 48
Funktion
  algebraische, 47
  biholomorphe, 37
  doppelt–periodische, 48
  ganze, 5
  gerade, 50
  holomorphe, 3, 19, 45
  meromorphe, 18, 19
  offene, 16
  rationale, 4, 19, 30
  schlichte, 39
  ungerade, 51
Funktionenfolge
  gleichgradig stetige, 31
  gleichmäßig konvergente, 31
  lokal beschränkte, 32
  lokal gleichmäßig konvergente, 31
  punktweise konvergente, 31

ganze Funktionen, 5
Gebiet, 15

biholomorphes, 37
Gebietstreue, 16
Gerade
nicht–euklidische, 43
gerade Funktion, 50
Gitter, 45
glatte Kurve, 47
gleichgradig stetige Funktionenfolge, 31
gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, 31
Goursat
Satz von, 8
Gruppenoperation
scharf n-fach transitive, 41
transitive, 40

Hauptdivisor, 49
Hauptsatz der Algebra, 14
Hauptteil, 33
Hauptzweig des Logarithmus, 10
hebbare Singularität, 17
holomorphe Funktion, 3, 19, 45
holomorphe Struktur, 45
homöomorphe topologische Räume, 37
homogene Koordinaten, 19, 55
homologe Kette, 27
homologer Zyklus, 26
homotope Kurven, 9

Identitätssatz, 16
Imaginärteil, 3
innerer Konvergenzradius, 20
Integral, 7, 9, 26
isolierte Singularität, 17

Körper der meromorphen Funktionen, 18
Karte, 44
kompatible, 44
Kette, 25
homologe, 27
kompatible Karte, 44
komplexe Differenzierbarkeit, 3
komplexe Zahl, 3
Konjugation, 3
Konvergenzkreis, 4
Konvergenzkreisring, 20
Konvergenzradius, 4
äußerer, 20
innerer, 20
Kurve
algebraische, 47
elliptische, 57
glatte, 47
homotope, 9
projektive, 47, 55
zusammenziehbare, 9

Laurentreihe, 20
Liouville
Satz von, 14
logarithmische Ableitung, 37
Logarithmus
einer Kurve, 10
Hauptzweig, 10
lokal beschränkte Funktionenfolge, 32
lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, 31

Mannigfaltigkeit, 44
Maximumprinzip, 16
meromorphe Funktion, 18, 19
Mittag–Leffler
Satz von, 33
Mittelwertsatz, 12
Möbiustransformation, 38
Montel
Satz von, 32
Morera
Satz von, 14

nicht–euklidische
Abstände, 43
Bewegung, 44
Gerade, 43
Nullstelle k–ter Ordnung, 15

offene Abbildung, 16

Periodengitter, 48
Pol, 17
k–ter Ordnung, 17
Potenzreihenentwicklungssatz, 13
Produktsatz von Weierstraß, 35
projektive
Ebene, 55
Gerade, 19, 38
Kurve, 47, 55
punktierte Ebene, 10
punktweise konvergente Funktionenfolge, 31

rationale Funktion, 4, 19, 30

Realteil, 3
Residuensatz, 22, 27
Residuum, 22, 24
Riemannsche
    Fläche, 45
    Zahlkugel, 18
Riemannscher
    Abbildungssatz, 39
    Existenzsatz, 47
    Hebbarkeitssatz, 15
Rouché
    Satz von, 30

Satz
    von Casorati-Weierstraß, 17
    von Goursat, 8
    von Liouville, 14
    von Mittag–Leffler, 33
    von Montel, 32
    von Morera, 14
    von Rouché, 30
Satz vom Argument, 30
scharf n-fach transitive Gruppenoperation, 41
schlichte Funktion, 39
Schwarzsches Lemma, 16
Singularität
    hebbare, 17
    isolierte, 17
    wesentliche, 17
Stammfunktion, 6

topologischer Raum
    diskreter, 18
    einfach zusammenhängender, 10
    homöomorpher, 37
    wegweise–zusammenhängender, 10
    zusammenhängender, 10
Torus, 45
transitive Gruppenoperation, 40

Überlagerung, 46
    universelle, 47
Umlaufszahl, 11, 26
ungerade Funktion, 51
Uniformisierungssatz, 47
universelle Überlagerung, 47

wegweise–zusammenhängender Raum, 10
Weierstraßsche $\wp$–Funktion, 50
Weierstraßscher Produktsatz, 35
Winkel, 26

Zahlkugel, 18, 45
zusammenhängender Raum, 10
zusammenziehbare Kurve, 9
Zyklus, 26
    0–homologer, 26
    berandender, 29
    einfacher, 26