R E K U R S I O N S

T H E O R I E

M a r t i n   Z i e g l e r

Vorlesung

gehalten im Sommersemester 1982 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

ausgearbeitet 1985 von

Erich Reck, Ursula Gropp und Gisbert W. Selke

2., verbesserte Auflage 1987

Inhalt

Einleitung

Einleitung fehlt.

§ 1 Registermaschinen

Wir führen in diesem ersten Kapitel den Begriff der Registermaschine ein und geben eine erste Präzisierung des Begriffs der Berechenbarkeit durch den Begriff der Registermaschinen-Berechenbarkeit.

Notationen :
- A^* sei die Menge aller **Wörter** (d.h. aller endlichen Zeichenreihen) über dem **Alphabet** (der Zeichenmenge) A.
- $\emptyset$ sei das leere Wort.
- α^n sei das Wort $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{n\text{-mal}}$.
- $a_1 \ldots a_n - 1$ sei das Wort $a_1 \ldots a_{n-1}$.

Nun definieren wir zunächst anschaulich, was eine Registermaschine ist, indem wir beschreiben, was eine solche tut: Eine **Registermaschine** über $A = \{a_1, \ldots, a_L\}$ manipuliert nach einem Programm Wörter $W \in A^*$, die in ihren Registern $\mathcal{R}_r (r < R)$ stehen. Ein Programm wiederum besteht aus einer Folge von Befehlen.

Befehle:

$\boxed{\mathcal{R}_r a}$: "verlängere das Wort, das in Register $\mathcal{R}_r$ steht, rechts um $a \in A$"

$\boxed{\mathcal{R}_r - 1}$: "streiche den rechten Buchstaben des Wortes in $\mathcal{R}_r$, falls überhaupt ein Buchstabe vorhanden ist, oder lasse das Register, wie es ist, falls es leer ist."

$\boxed{\mathcal{R}_r ?}$ $\emptyset\swarrow a_1\downarrow\ldots\searrow a_L$: "wenn $\mathcal{R}_r$ das leere Wort enthält, folge dem Pfeil $\xrightarrow{\emptyset}$; wenn das Wort in $\mathcal{R}_r$ rechts mit a_i aufhört, folge dem Pfeil $\xrightarrow{a_i}$"

$\boxed{\textit{stop}}$: "halt"

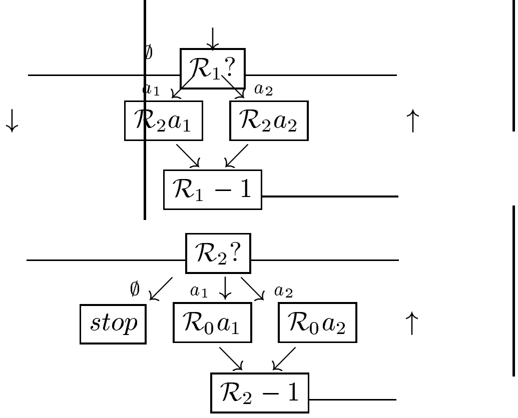
Beispiel: Eine Registermaschine, die über dem Alphabet $A = \{a_1, a_2\}$ die Funktion

$$F : A^* \times A^* \to A^*$$

$$F(V, W) := VW$$

berechnet. Ihr Flußdiagramm – zur Beschreibung von Registermaschinen benutzen wir meist Flußdiagramme – sieht folgendermaßen aus:

Input: $V \to \mathcal{R}_0$, $W \to \mathcal{R}_1$ (, $\emptyset \to \mathcal{R}_2$)



Output: Ergebnis in $\mathcal{R}_0$

Um eine mathematische Theorie entwickeln zu können, geben wir nun die formale Definition einer Registermaschine mit R Registern $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_{R-1}$ über dem Alphabet $A = \{a_1, \dots, a_L\}$:

Definition (Registermaschine, Berechenbarkeit) :
a) Ein **Befehl** b

ist ein Paar (r, l) $\quad (r < R,\ l \leq L)$
oder ein $(L+2)$*-Tupel* $(r, c_0, \dots, c_L)$ $\quad (r < R,\ c_i \in \mathbb{N})$
oder s.

(r, l) *steht dabei für den Befehl* $\boxed{\mathcal{R}_r a_l}$, *wenn* $l \geq 1$, *und für* $\boxed{\mathcal{R}_r - 1}$, *wenn* $l = 0$.
$(r, c_0, \dots, c_L)$ *bedeutet den Befehl* $\underset{\emptyset\swarrow\ a_1\downarrow\ \dots\ \searrow a_L}{\boxed{\mathcal{R}_r?}}$
(wobei c_i *die zu* a_i *gehörige Befehlsnummer ist).*
s *ist der Stop-Befehl* $\boxed{\textit{stop}}$.
b) Eine **Registermaschine** M *ist eine Folge*

$$(b_0, \dots, b_N)$$

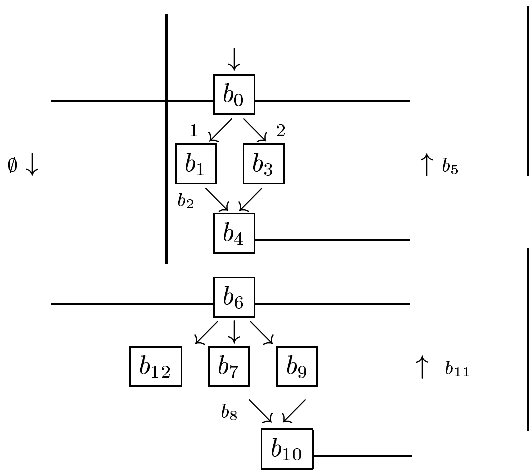
von Befehlen, wobei $b_N = s$, $b_n \neq s$, *wenn* $n \neq N$, *und, wenn* $b_c = (r, c_0, \dots, c_L)$, *dann* $c_i \leq N$.
(Also: Registermaschine $\approx$ *Programm)*
Die Maschine beginnt mit Befehl b_0 *und führt, wenn* $b_c \neq s$ *und* $b_c \neq (r, c_0, \dots, c_L)$ *nach* b_c *den Befehl* b_{c+1} *aus. Sonst hält die Maschine an bzw. geht zu dem entsprechenden Befehl* b_{c_i} *über.*

Beispiel: Unser Flußdiagramm von oben läßt sich folgendermaßen schreiben:

Befehle:

$b_0 = (1, 6, 1, 3)$	$b_6 = (2, 12, 7, 9)$
$b_1 = (2, 1)$	$b_7 = (0, 1)$
$b_2 = (0, 4, 4, 4)$	$b_8 = (0, 10, 10, 10)$
$b_3 = (2, 2)$	$b_9 = (0, 2)$
$b_4 = (1, 0)$	$b_{10} = (2, 0)$
$b_5 = (0, 0, 0, 0)$	$b_{11} = (0, 6, 6, 6)$
	$b_{12} = s$

Flußdiagramm:



c) Ein **Registerinhalt** *I ist eine Folge*

$$(W_0, \ldots, W_{R-1})$$

von Wörtern aus A^*.

– *Eine* **Konfiguration** *K ist ein Paar*

$$(c, I),$$

wobei $c \leq N$ der Index eines Befehls und I ein Registerinhalt ist.

– *K ist eine* **Stopkonfiguration**, *wenn $b_c = s$.*

– *Die* **Nachfolgekonfiguration** *$M(K)$ von K ist wie folgt erklärt:*
Es sei $K = (c, W_0, \ldots, W_{R-1})$; dann ist

$$M(K) := (\bar{c}, \overline{W}_0, \ldots, \overline{W}_{R-1}),$$

wobei

$\bar{c} := c\,,\ \overline{W}_q := W_q$ *(für alle* $q < R$*)*, *falls* $b_c = s$

$\bar{c} := c{+}1\,,\ \overline{W}_q := W_q\ (q \neq r)$ *und* $\overline{W}_r := \begin{cases} W_r a_l & (l > 0) \\ W_r - 1 & (l = 0) \end{cases}$, *falls* $b_c = (r, l)$

$\bar{c} := c_l\,,\ \overline{W}_q := W_q\ (q < R)$, *falls* $b_c = (r, c_0, \dots c_L)$ *und falls* $W_r = \begin{cases} \emptyset & (l = 0) \\ W a_l \text{ für ein } W & (l > 0). \end{cases}$

*d) Wir sagen "***M angesetzt auf I stoppt bei J***" (Notation:* $I \xrightarrow{M} J$*), wenn*

$$M^n(0, I) := (\underbrace{M(\dots M}_{n-mal}(I)\dots))(0, I) \ = \ (c, J) \quad \text{und } b_c = s \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

I heißt dabei Startkonfiguration, J Stopkonfiguration.
e) Es sei $A_0 \subseteq A$. *Wir sagen "***M berechnet die Funktion F***" (wobei* $F : (A_0^*)^n \to A^*$*), wenn*
für alle $W_1, \dots, W_n \in A_0^*$ *gilt:*

$$(\emptyset, W_1, \dots, W_n, \emptyset, \dots, \emptyset) \xrightarrow{M} (F(W_1, \dots, W_n), \dots)$$

– Wir identifizieren außerdem $\mathbb{N}$ *mit* $\{|\}^*$ *(durch* $n \mapsto |^n$*) und sagen "***M berechnet** f*" (wobei* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$*), wenn M die zu f gehörige Funktion F (mit* $F(|^{x_1}, \dots, |^{x_n}) = |^{f(x_1, \dots, x_n)}$*) berechnet.*
– f heißt **berechenbar mit einer Registermaschine***, wenn es eine Registermaschine M gibt, die f berechnet.*

Übung 1: Berechne $x \cdot y$.

Übung 2: Berechne $x + y$ (wobei x, y binär geschrieben seien).

Übung 3: Rechne die Strichdarstellung in Binärdarstellung um und umgekehrt.

§ 2 Rekursive Funktionen

In diesem Kapitel erklären wir, was eine rekursive Funktion ist, und stellen den Zusammenhang zum Begriff der Registermaschine her (fortgesetzt in §3).

Definition :

a) Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt **rekursiv** *gdw. sie sich aus den (folgenden) Grundfunktionen R0 mit Hilfe der Operationen R1, R2 und R3 bilden läßt (d.h. wenn es eine – nicht notwendig eindeutige – Darstellung der Funktion mittels R0-R3 gibt; zu diesem "gibt" vgl. die Warnung weiter unten):*

R0 :

$$\begin{array}{lll} N(x) & := x+1 & \textit{(einstellig)} \\ I_i^n(x_1,\dots,x_n) := & x_i \quad (i=1,\dots,n) & \textit{(n-stellig)} \\ C_0^0 & := \ 0 & \textit{(nullstellig)} \end{array}$$

R1 (Einsetzung) :

Wenn h (k-stellig) und $f_1,\dots,f_k$ (n-stellig) rekursiv sind, dann ist auch f – definiert durch

$$f(x_1,\dots,x_n) := h(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$$

– rekursiv.

R2 (Induktion) :

Wenn h ($n+2$-stellig) und g (n-stellig) rekursiv sind, dann ist auch f – definiert durch

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n,0) &:= g(x_1,\dots,x_n) \\ f(x_1,\dots,x_n,y+1) &:= h(x_1,\dots,x_n,y,f(x_1,\dots,x_n,y)) \end{aligned}$$

– rekursiv.

R3 (μ-Operator) :

Wenn g ($n+1$-stellig) rekursiv ist, und wenn $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y (g(x_1,\dots,x_n,y) = 0)$, dann ist auch f – definiert durch

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &:= \mu y(g(x_1,\dots,x_n,y)=0) \\ &\quad (= \text{das kleinste } y \text{ mit } g(x_1,\dots,x_n,y)=0) \end{aligned}$$

– rekursiv.

(Beschränken wir die Anwendung von R3 wie hier auf Funktionen g, die die Formel $\forall \vec{x}\, \exists y (g(\vec{x},y)=0)$ erfüllen, so sprechen wir auch von eingeschränkter Anwendung von R3, im Gegensatz zur uneingeschränkten Anwendung, wie sie in §4 vorkommen wird.)

b) Die **Klasse der rekursiven Funktionen** *ist die kleinste Klasse von Funktionen, die die Funktionen R0 enthält und unter den Operationen R1, R2 und R3 abgeschlossen ist.*

BEISPIEL: Die Rekursivität von $x_1 + x_2$ ergibt sich, indem wir die Regel R2 auf $g(x_1) = I_1^1(x_1)$ und $h(x_1, x_2, x_3) = N(I_3^3(x_1, x_2, x_3))$ anwenden.

Übung 1: Zeige die Rekursivität von $x_1 \cdot x_2$ und von ${x_1}^{x_2}$.

Bemerkung : Die rekursiven Funktionen sind (im intuitiven Sinn) berechenbar.

Beweis: Die Funktionen R0 sind offensichtlich im intuitiven Sinn berechenbar. Weiter ist klar, daß die berechenbaren Funktionen unter R1 (Einsetzung) abgeschlossen sind: Man berechnet einfach der Reihe nach $f_1(\vec{x}) = y_1, \ldots, f_n(\vec{x}) = y_n$ und dann $h(y_1, \ldots, y_n)$. Zu R2: Es seien h und g berechenbar und f sei definiert durch

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) \quad &:= g(\vec{x}) \text{ und} \\ f(\vec{x}, y+1) &:= h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)). \end{aligned}$$

Dann ist auch f berechenbar: Zur Berechnung von $f(\vec{x}, y)$ berechne der Reihe nach $z_0 = g(\vec{x})$, $z_1 = h(\vec{x}, 0, z_0)$, $\ldots$, $z_{i+1} = h(\vec{x}, i, z_i)$, $\ldots$, $z_y = h(\vec{x}, y-1, z_{y-1})$. Das Ergebnis ist $f(\vec{x}, y) = z_y$. Zu R3: Es sei g berechenbar und es gelte $\forall \vec{x}\, \exists y (g(\vec{x}, y) = 0)$. Dann berechnet sich

$$\mu y (g(\vec{x}, y) = 0),$$

indem man der Reihe nach $g(\vec{x}, 0)$, $g(\vec{x}, 1)$, $\ldots$ berechnet, bis zum ersten Mal Null herauskommt. ∎

Wir haben eben von "Berechenbarkeit im intuitiven Sinn" gesprochen. Ist dies unproblematisch, d.h. ist in jedem Fall klar, was wir damit meinen?

Warnung : Die folgende Funktion ist rekursiv und damit berechenbar (im obigen Sinne):

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{, falls Fermats Theorem stimmt} \\ x+1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Denn entweder haben wir $g = I_1^1$ (falls Fermats Theorem stimmt), oder $g = N$ (falls nicht); g ist in jedem Fall rekursiv. Wir stellen uns bei der Definition von "rekursiv" also auf den Standpunkt der klassischen Logik, von dem aus Fermats Theorem entweder stimmt oder nicht, und es egal ist, ob wir entscheiden können, was der Fall ist.

Die meisten Mathematiker akzeptieren unsere Definition einer rekursiven Funktion als "richtige", d.h. adäquate, Präzisierung des Begriffs einer berechenbaren Funktion. Sie akzeptieren damit

Churchs These: berechenbar = rekursiv

(nach Alonso Church). Diese These wird gestützt durch die Beobachtung, daß sich alle bisherigen mathematisch "brauchbaren" Präzisierungen des Begriffs der berechenbaren Funktion (z.B auch der Begriff der Turingmaschinen-berechenbaren Funktion) als äquivalent zum Begriff der rekursiven Funktion herausgestellt haben. Wir zeigen als ein Beispiel:

Satz 1 : *f ist rekursiv gdw. f mit einer Registermaschine berechenbar ist. (Es genügt das Alphabet $A = \{|\}$).*

Wir beweisen zuerst, daß sich rekursive Funktionen mit Registermaschinen berechnen lassen, und beweisen die Umkehrung in §3.

Vorbereitungen des Beweises: Wir brauchen zwei Hilfsmaschinen, und wir müssen Maschinen nacheinander anwenden können.

Die **Löschmaschine**:

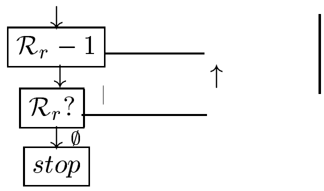
$$L^r := ((r,0),(r,2,0),s)$$

(über $A = \{|\}$) löscht das Register $\mathcal{R}_r$.

Wirkungsweise:

$$(W_0,\dots,W_r,\dots,W_{R-1}) \xrightarrow{L^r} (W_0,\dots,\emptyset,\dots,W_{R-1})$$

Flußdiagramm:



Die **Kopiermaschine**:

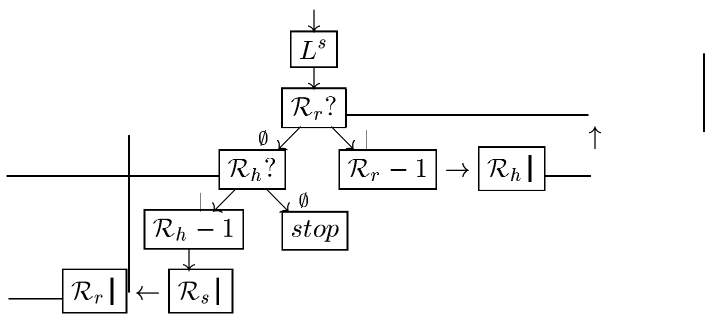
$$K_h^{r,s} := ((s,0),(s,2,0),(r,6,3),(r,0),(h,1),(0,2,2),(h,11,7),(h,0),(s,1),(r,1),(0,6,6),s)$$

(über $A = \{|\}$) kopiert $\mathcal{R}_r$ auf $\mathcal{R}_s$ mit Hilfsregister $\mathcal{R}_h$ ($r \neq s \neq h \neq r$).

Wirkungsweise:

$$(W_0,\dots,W_s,\dots,\underbrace{\emptyset}_{W_h},\dots,W_{R-1}) \xrightarrow{K_h^{r,s}} (W_0,\dots,W_r,\dots,\emptyset,\dots,W_{R-1})$$

Flußdiagramm:



Eben haben wir schon davon Gebrauch gemacht, *zusammengesetzte* Maschinen mit Flußdiagrammen zu beschreiben, die auch Befehle $\boxed{M}$ enthalten, wobei M eine Maschine ist. Die formale Beschreibung ist wie folgt:

Definition : *Eine* **zusammengesetzte Registermaschine** *über* $A = \{a_1, \dots, a_L\}$ *mit* R *Registern ist eine Folge*

$$(B^0, B^1, \dots, B^k)$$

wobei $B^k = s$ *und* $B^i \quad (i < k)$ *von der folgenden Form ist:*

$b_0^i = (r, c_0, \dots, c_L) \quad , r < R \, , c_l \leq k$
oder $b_0^i = (r, l) \quad , l \leq L$
oder eine Registermaschine $(b_0^i, \dots, b_{N_i}^i)$ *über* $A = \{a_1, \dots, a_L\}$ *mit* R *Registern.*

Wir fordern $b_c^i = s \leftrightarrow c = N_i$. *Die zu einer zusammengesetzten Registermaschine gehörige Registermaschine ist*

$$[B^0 \dots B^k] := (\bar{b}_0^0, \dots, \bar{b}_{N_0-1}^0, \bar{b}_0^1, \dots, \bar{b}_{N_{k-1}-1}^{k-1}, s),$$

wobei $N_i := 1$ *, falls* B^i *keine Registermaschine ist, und*

$$\bar{b}_c^i := \begin{cases} b_c^i & \text{, falls } b_c^i = (r, l) \\ \bar{b}_c^i = (r, \bar{c}_0, \dots, \bar{c}_L) \text{ mit } \bar{c}_l := c_l + \sum_{j<i} N_j \; (\text{bzw. } \bar{c}_l := \sum_{j<c_l} N_j) & \text{, falls } b_c^i = (r, c_0, \dots, c_L), \end{cases}$$

wobei B^i *eine (bzw. keine) Registermaschine ist.*
(Die Komplizierung ergibt sich dadurch, daß man die Befehlsnummern "trennen" muß; Vorsicht auch wegen Konfusion bei der Registerbenutzung!)

Beispiel: $\underline{L}^n := [L^0 \dots L^n]$ löscht $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_n$. (Wir werden diese Maschine später noch benutzen.)

Nun zum *Beweis* der einen Hälfte des Satzes 1:

Behauptung : *Die Funktionen* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *, die von Registermaschinen (über* $A = \{|\}$*) berechnet werden, sind unter R0, R1, R2 und R3 abgeschlossen.*

Hieraus folgt unsere Behauptung, daß sich alle rekursive Funktionen f durch Registermaschinen berechnen lassen, sofort durch Induktion über den Aufbau (einer Darstellung) von f. (f kann natürlich mehrere Darstellungen haben).

Beweis:
R0: N wird berechnet von $[K_2^{1,0}\,(0,1)\,s]$.
I_i^n wird berechnet von $K_{n+1}^{i,0}$.
C_0^0 wird berechnet von s.

R1: Es seien h, $f_1, \dots, f_k$ von H, $F_1, \dots, F_k$ mit R Registern berechnet. Dann wird

$$f(x_1, \dots, x_n) := h(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$$

von der folgenden Maschine (mit $R{+}n{+}k{+}1$ Registern) berechnet (Abkürzung: $K^{r,s} := K^{r,s}_{R+n+k}$):

$$
\begin{array}{lllllll}
[\ K^{1,R} & K^{2,R+1} & \dots\ K^{n,R+n-1} & F_1 & K^{0,R+n} & \underline{L}^{R-1} \\
\ \ K^{R,1} & K^{R+1,2} & \dots\ K^{R+n-1,n} & F_2 & K^{0,R+n+1} & \underline{L}^{R-1} \\
\ \ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ \ K^{R,1} & K^{R+1,2} & \dots\ K^{R+n-1,n} & F_k & K^{0,R+n+k-1} & \underline{L}^{R-1} \\
K^{R+n,1} & K^{R+n+1,2} & \dots K^{R+n+k-1,k} & H & s &]
\end{array}
$$

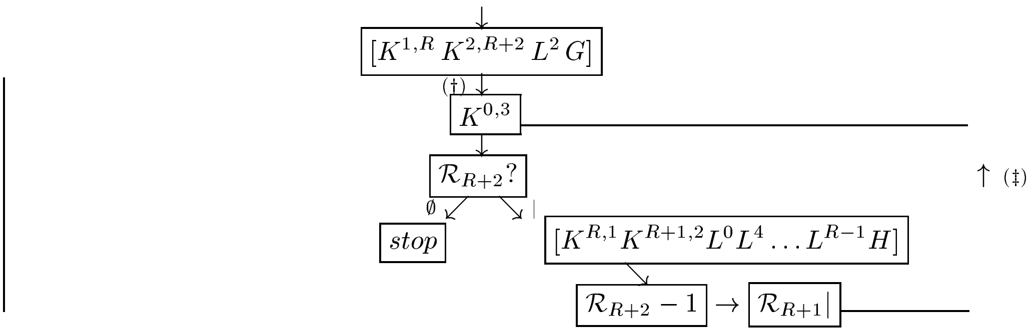
Indem man betrachtet, wie sich die Registerinhalte verändern, kann man sich klarmachen, daß diese Maschine das Gewünschte leistet:

	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$	$\dots$	$\mathcal{R}_n$	$\dots$	$\dots$	$\mathcal{R}_R$	$\dots$	$\mathcal{R}_{R+n-1}$	$\mathcal{R}_{R+n}$	$\dots$	$\dots$	$\mathcal{R}_{R+n+k-1}$	$\mathcal{R}_{R+n+k}$
Input	0	x_1	$\dots$	x_n	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
nach 1. Zeile	0	0	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	x_1	$\dots$	x_n	$f_1(\vec{x})$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$
nach 2. Zeile	0	0	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	x_1	$\dots$	x_n	$f_1(\vec{x})$	$f_2(\vec{x})$	0	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nach k. Zeile	0	0	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	x_1	$\dots$	x_n	$f_1(\vec{x})$	$\dots$	$\dots$	$f_k(\vec{x})$	0

R2 (Fall $n = 1$): Wenn g und h von G und H mit R Registern berechnet werden, dann wird f – definiert durch

$$
\begin{aligned}
f(x,0) &:= g(x) \\
f(x,y+1) &:= h(x,y,f(x,y))
\end{aligned}
$$

– von der folgenden Maschine (mit $R + 4$ Registern) berechnet (Abkürzung: $K^{r,s} := K^{r,s}_{R+3}$):



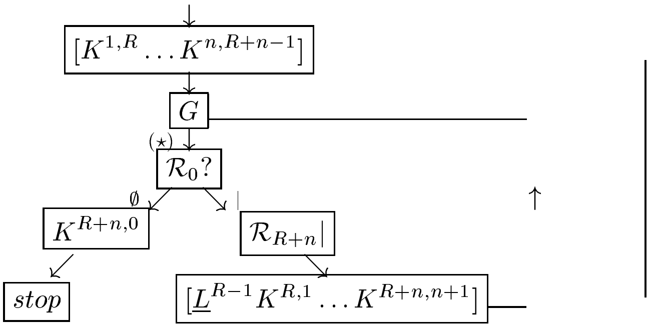
Die Inhalte der Register sind (bei Input x, y):

	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_R$	$\mathcal{R}_{R+1}$	$\mathcal{R}_{R+2}$
bei (†) :	$g(x)$	x	0	y
bei (‡) :	$f(x,1)$	x	1	$y-1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$f(x,y)$	x	y	0

R3: Wenn $\forall \vec{x}\, \exists y (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ und g von der Maschine G mit R Registern berechnet wird, dann wird

$$f(\vec{x}) := \mu y (g(\vec{x}, y) = 0)$$

von der folgenden Maschine mit $R + n + 2$ Registern berechnet (Abkürzung: $K^{r,s} := K^{r,s}_{R+n+1}$):



Die Inhalte (bei Input $x_1, \ldots, x_n$) der Register sind bei $(\star)$:

$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_R$	$\ldots$	$\mathcal{R}_{R+n-1}$	$\mathcal{R}_{R+n}$
$g(\vec{x}, 0)$	x_1	$\ldots$	x_n	0
$g(\vec{x}, 1)$	x_1	$\ldots$	x_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$0 = g(\vec{x}, y)$	x_1	$\cdots$	x_n	$y = f(\vec{x})$

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen. $\square$

§ 3 Primitiv rekursive Funktionen und Godelisierung

Um die Rückrichtung von Satz 1 aus §2 zu zeigen, brauchen wir die Technik der Gödelisierung, zu der wir nun kommen. Zuerst führen wir noch den Begriff der primitiv rekursiven Funktion ein.

Definition : *Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt* **primitiv rekursiv (p.r.)**, *wenn sie sich aus den Grundfunktionen R0 durch Anwendung der Operationen R1 und R2 (also ohne R3) ergibt.*

Beispiel: Die Funktionen C_k^n mit $C_k^n(x_1, \ldots, x_n) := k$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ (wobei $n, k \in \mathbb{N}$) sind p.r. Denn C_0^n ergibt sich durch Einsetzen von I_1^n in C_0^0, und C_k^n daraus durch k-faches Anwenden von N.

Nun ein paar einfache, aber grundlegende Ergebnisse über p.r. Funktionen:

Lemma 1 : *f sei definiert durch*

$$f(x_1, \ldots, x_n) := T(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei T ein Term ist, der sich aus $x_1, \ldots, x_n$, natürlichen Zahlen und Funktionen $g_1, \ldots, g_m (m \in \mathbb{N})$ aufbaut. Es gilt: Wenn die g_i rekursiv (bzw. p.r.) sind, so ist auch f rekursiv (bzw. p.r.).

Beweis: Es genüge uns folgendes Beispiel als Beweis:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= g_1(x_1, g_2(x_1, x_2), 3) \\ &= g_1(I_1^3(x_1, x_2, x_3), g_2(I_1^3(x_1, x_2, x_3), I_2^3(x_1, x_2, x_3)), C_3^3(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

(Ausführlicher Beweis: Induktion über den Aufbau der Terme.) $\Box$

Folgerung 2 : *f sei definiert durch*

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &:= T^1(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &:= T^2(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

wobei die T^i Terme in g_i sind. Dann gilt: Wenn die g_i rekursiv (p.r.) sind, ist auch f rekursiv (p.r.).

Beweis: klar. $\Box$

Beispiele:
Folgendes sind primitiv rekursive Funktionen, wie man aus ihren Definitionen unmittelbar sieht:

$x + y$	Definition:	$x + 0 := x$	$x + (y+1) := N(x+y)$
$x \cdot y$		$x \cdot 0 := 0$	$x \cdot (y+1) := x \cdot y + x$
x^y		$x^0 := 1$	$x^{y+1} := x^y \cdot x$
$x!$		$0! := 1$	$(x+1)! := x! \cdot (x+1)$
$x \dot{-} 1$		$0 \dot{-} 1 := 0$	$(x+1) \dot{-} 1 := x$
$x \dot{-} y$		$x \dot{-} 0 := x$	$x \dot{-} (y+1) := (x \dot{-} y) \dot{-} 1$

Nun erweitern wir den Begriff der Rekursivität auf Relationen.

Definition : *Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ (wir sagen auch "Prädikat") heißt* **rekursiv** *(bzw.* **primitiv rekursiv***), wenn ihre charakteristische Funktion*

$$K_R(\vec{x}) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \vec{x} \in R \\ 1 & \text{, falls } \vec{x} \notin R \end{cases}$$

rekursiv (bzw. p.r.) ist. (Wir unterscheiden nicht genau zwischen R als Relation(ssymbol) und als Menge; insbesondere benutzen wir sowohl die Schreibweise "$R(\vec{x})$" als auch "$\vec{x} \in R$". In unserem Zusammenhang führt dies zu keinen Komplikationen, da wir nicht verschiedene Interpretationen eines Relationssymbols betrachten.)

BEISPIELE:
– $\emptyset$ ist eine p.r. Menge; denn $K_\emptyset = C_1^0$.
– "$x = 0$" ist p.r.; denn aus der Darstellung

$$K_{=0}(0) = 0 \text{ und } K_{=0}(x+1) = 1$$

und mit Folgerung 2 sieht man, daß $K_{=0}$ p.r. ist.

Lemma 3 : *Wenn P und Q rekursiv (p.r.) sind, dann auch $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\neg P$ (und damit auch $P \to Q$ und $P \leftrightarrow Q$). Wenn $f_1, \ldots, f_n$ rekursiv (p.r.) sind, dann auch $P(f_1, \ldots, f_n)$.*

BEWEIS:

$$\begin{aligned} K_{\neg P} &= 1 \dot{-} K_P \\ K_{P \wedge Q} &= K_{=0}(K_P + K_Q) \\ K_{P \vee Q} &= K_P \cdot K_Q \\ K_{P(f_1,\ldots,f_n)} &= K_P(f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

($\to$ und $\leftrightarrow$ lassen sich darstellen durch $\neg$, $\vee$ und $\wedge$). $\square$

BEISPIELE:
– Die Relationen "$x = y$" und "$x < y$" sind p.r.; denn

$$\begin{aligned} x = y &\longleftrightarrow (x \dot{-} y = 0 \wedge y \dot{-} x = 0), \\ x < y &\longleftrightarrow y \dot{-} x \neq 0. \end{aligned}$$

– Jede endliche Menge $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist p.r.; denn

$$x \in E \longleftrightarrow \exists i \leq n (x = a_i)$$

.

Lemma 4 (Rekursive Fallunterscheidung):
Wenn $P_1, \ldots, P_n$ und $f_0, \ldots, f_n$ rekursiv (p.r.) sind, dann ist auch f – definiert durch

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} f_0(\vec{x}) & \text{, falls } P_1(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ f_i(\vec{x}) & \text{, falls } P_{i+1}(\vec{x}) \text{ und } \neg P_1(\vec{x}), \ldots, \neg P_i(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(\vec{x}) & \text{, falls } \neg P_1(\vec{x}), \ldots, \neg P_n(\vec{x}) \end{cases}$$

- rekursiv (p.r.).

Beweis: Es gilt

$$f(\vec{x}) = \sum_{i \leq n} (f_i(\vec{x}) \cdot K_{Q_i}(\vec{x})),$$

wobei

$$Q_i(\vec{x}) \;:\longleftrightarrow\; \begin{cases} \neg(\neg P_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \neg P_i(\vec{x}) \wedge P_{i+1}(\vec{x})) & \text{, falls } i < n \\ \neg(\neg P_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \neg P_i(\vec{x})) & \text{, falls } i = n. \end{cases}$$

□

Lemma 5 : *Es sei P rekursiv (p.r.). Dann ist auch*

$$R(\vec{x}, z) \;:\longleftrightarrow\; \forall y < z P(\vec{x}, y)$$

rekursiv (p.r.). (Beachte: Für unbeschränkte $\forall$-Quantifizierung ist dies falsch! Und: Mit Lemma 3 haben wir auch dasselbe Ergebnis für den $\exists$-Quantor.)

Beweis: $K_R(\vec{x}, 0) = 0$ und $K_R(\vec{x}, z+1) = K_{=0}(K_R(\vec{x}, z) + K_P(\vec{x}, z))$. □

Lemma 6 : *Es seien g und h p.r. und es gelte $\forall \vec{x} \exists y \leq h(\vec{x})(g(\vec{x}, y) = 0)$. Dann ist auch die Funktion $\mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$ p.r.*

Beweis: Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) &:= 0 \\ f(\vec{x}, z+1) &:= \begin{cases} f(\vec{x}, z) & \text{, falls } g(\vec{x}, f(\vec{x}, z)) = 0 \\ z+1 & \text{, sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, ist f p.r. und hat folgende Eigenschaft: Bei festem $\vec{x}$ und variablem z gilt $f(\vec{x}, z) = z$, solange $g(\vec{x}, y) \neq 0$ für alle $y < z$ gilt; sobald einmal $g(\vec{x}, y) = 0$ eintritt, bleibt $f(\vec{x}, z)$ von da an konstant. Daraus sieht man sofort:

$$f(\vec{x}, h(\vec{x})) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0),$$

woraus unsere Behauptung folgt. (Formaler Beweis durch Induktion über den Wert von $h(\vec{x})$.) □

Mit den Lemmata 5 und 6 erhalten wir weitere einfache, aber wichtige Ergebnisse:

Beispiele:
– "$x|y$" ist p.r.; denn es gilt $x|y \leftrightarrow R(x, y, y+1)$, wobei $R(x, y, z) \leftrightarrow \exists w < z(x \cdot w = y)$.
– "x ist Primzahl" ist p.r.; denn es gilt x ist prim $\leftrightarrow \{1 < x \wedge \forall y < x \forall z < x(y \cdot z \neq x)\}$.
– Die Funktion "$n \mapsto p_n :=$ n+1-te Primzahl" ist p.r.; denn es gilt $p_0 = 2$ und $p_{n+1} = \mu y(\leq p_n! + 1)(y \text{ prim } \wedge y > p_n)$. (Beachte: Die Funktion $x \mapsto x! + 1$ ist

p.r. und
$p_n! + 1 \geq p_{n+1}$.)

Als Vorbereitung für die Methode der Gödelisierung benötigen wir noch eine weitere technische Einzelheit.

Lemma 7 (Gödelnummern von endlichen Folgen):
Die Zuordnung

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle := p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_{n-2}^{x_{n-2}} \cdot p_{n-1}^{x_{n-1}+1} - 1$$

liefert eine Bijektion (Codierung oder "Gödelisierung") zwischen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ (der Menge aller endlichen Folgen von natürlichen Zahlen) und $\mathbb{N}$. Die Funktionen $lg(\cdot) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $(\cdot)_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – definiert durch

$$lg(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle) := n \quad \text{und}$$
$$(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)_i := \begin{cases} x_i & \text{, falls } i < n \\ 0 & \text{, falls } i \geq n \end{cases}$$

– sind p.r.
Zusatz: Es gilt $lg(s) \leq s$ und $(s)_i < s$. Außerdem gibt es eine p.r. Funktion $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$x_0, \dots, x_{n-1}, n \leq N \implies \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \leq B(N).$$

Beweis: Beachte: $\langle\ \rangle = 0$. Wir beweisen zuerst den Zusatz. Die Ungleichungen für $lg(s)$ und $(s)_i$ folgen aus

$lg(s) = n \leq (\, n\text{-te Primzahl } -1) = \langle 0, \dots, 0 \rangle \leq \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle = s$ und $(s)_i = x_i < 2^{x_i} \leq s$

Weiter setze z.B. $B(x) := \underbrace{p_x^{(x+1)^2}}_{\text{p.r.}}$ (Anmerkung: Man kann B noch "kleiner" wählen).

Zur Bijektivität der Zuordnung: Die Injektivität folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen und aus unserer Definition (beachte die Rolle von $^{+1}$ und -1), die Surjektivität aus der Existenz der Primfaktorzerlegung.
Zur primitiven Rekursivität von $lg(\cdot)$ und $(\cdot)_i$ (wobei wir nun den Zusatz benutzen): Es gilt

$lg(s) = \mu y \leq s[\forall z \leq s(z > y \to \neg[p_{z-1} | (s+1)])]$ und $(s)_i = \mu y \leq s[(i+1 = lg(s) \wedge \neg[p_i^{y+2} | (s+1)]) \vee (i+1 < lg(s) \wedge \neg[p_i^{y+1} | (s$

Mit Lemma 6 folgt daraus unsere Behauptung. ∎

Folgerung 8 : *Für jedes n ist die Funktion $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ p.r.*

Beweis: Das ist eigentlich schon klar wegen der Definition der Funktion $\langle \cdot \rangle$. Es folgt aber auch aus

$$\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle = \mu y \leq B(x_0 + \ldots + x_{n-1} + n)[lg(y) = n \wedge \forall i < n((y)_i = x_i)]$$

mit Lemma 6. ∎

Übung 1: Es sei $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon_i \cdot 2^i$ mit $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ (endliche Summe).
a) Zeige: Die Abbildung $x \mapsto D_x := \{i \mid \varepsilon_i = 1\}$ liefert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Zeige weiter: Die Relationen $y \in D_x$ und $y = |D_x|$ (= Mächtigkeit von D_x) sind p.r.
b) Es sei $x \mapsto E_x$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und den endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann gibt es genau dann eine rekursive Permutation $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $E_x = D_{\pi(x)}$, wenn "$y \in E_x$" und "$y = |E_x|$" rekursiv sind.

Übung 2 (Wertverlaufsrekursion):
Es sei $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ gegeben. f ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n, y) := g(\langle x_1, \dots, x_n\rangle, y, \langle f(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, f(x_1, \dots, x_n, y-1)\rangle)$$

[also insbesondere $f(\vec{x}, 0) := g(\langle \vec{x}\rangle, 0, 0)$] eindeutig bestimmt. Wenn g rekursiv (p.r.) ist, ist auch f rekursiv (p.r.).

(Wir werden Wertverlaufsrekursion im folgenden öfters benutzen. Insofern sei diese Übung dem Leser besonders ans Herz gelegt.)

Übung 3: Es sei durch $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_0, \dots, x_{n-1}]$ eine Bijektion von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ auf $\mathbb{N}$ definiert. $[\cdot]_i$ und $LG(\cdot)$ seien weiterhin durch

$$[[x_0, \dots, x_{n-1}]]_i := \begin{cases} 0 & \text{, falls } i \geq n \\ x_i & \text{, falls } i < n \end{cases} \qquad \text{und} \qquad LG([x_0, \dots, x_{n-1}]) := n$$

definiert. Wir sagen, zwei solche Funktionen $[\cdot]$ und $[\cdot]'$ sind **rekursiv (p.r.) äquivalent** gdw. es eine Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\pi([x_0, \dots, x_{n-1}]) = [x_0, \dots, x_{n-1}]'$$

gibt und π, π^{-1} rekursiv (p.r.) sind. Offenbar ist das eine Äquivalenzrelation.
a) Zeige: $[\cdot]$ ist rekursiv äquivalent zu $\langle\cdot\rangle$ gdw. $[\cdot]_i$ und $LG(\cdot)$ rekursiv sind. $[\cdot]$ ist p.r. äquivalent zu $\langle\cdot\rangle$ gdw. $[\cdot]_i$ und $LG(\cdot)$ p.r. sind und wenn es eine p.r. Funktion $\bar{B}$ gibt mit

$$x_0, \dots, x_{n-1}, n \leq N \longrightarrow [x_0, \dots, x_{n-1}] \leq \bar{B}(N)$$

b) Zeige: $(\mathbb{N}, \langle\cdot\rangle) \cong (\mathbb{N}, [\cdot])$ (d.h. es existiert eine Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\pi(\langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle) = [\pi(x_0), \dots, \pi(x_{n-1})]$) gdw. eine Funktion $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $l(x_i) < l([x_0, \dots, x_{n-1}])$.

Nun zur angekündigten Technik der "Gödelisierung" (nach Kurt Gödel) von Registermaschinen:

Definition (Gödelnummern) :
– *Die* **Gödelnummer** *einer Registermaschine* $M = (b_0, \dots, b_N)$ *ist*

$$\ulcorner M \urcorner := \langle \ulcorner b_0 \urcorner, \dots, \ulcorner b_N \urcorner \rangle$$

wobei

$$\ulcorner(r,l)\urcorner := \langle r,l\rangle\ , \quad \ulcorner(r,c_0,\ldots,c_L)\urcorner := \langle r,c_0,\ldots,c_L\rangle \quad \textit{und} \quad \ulcorner s\urcorner := 0.$$

– Die Gödelnummer einer Konfiguration $K = (c, W_0, \ldots, W_{R-1})$ *ist*

$$\ulcorner K\urcorner := \langle c, \ulcorner W_0\urcorner, \ldots, \ulcorner W_{R-1}\urcorner\rangle,$$

wobei

$$\ulcorner a_{l_0}\ldots a_{l_{n-1}}\urcorner := \langle l_0,\ldots,l_{n-1}\rangle.$$

– Mit $\mathcal{W}_w$ *bezeichnen wir das Wort mit Gödelnummer* w*, d.h.* $\ulcorner\mathcal{W}_w\urcorner = w$*; entsprechend* B_b *für den*
Befehl mit $\ulcorner B_b\urcorner = b$ *und* M_m *für die Maschine mit* $\ulcorner M_m\urcorner = m$.

Bemerkungen :
a) $W^{\clubsuit}(w,L)$:= "$\mathcal{W}_w \in A^*$", wobei $A = \{a_1,\ldots,a_L\}$, ist p.r. in w und L; denn

$$W^{\clubsuit}(w,L) \longleftrightarrow \forall i < lg(w)[(w)_i \in \{1,\ldots,L\}].$$

b) $B^{\spadesuit}(b,L,R)$:= "B_b ist Befehl einer Registermaschine über A mit R Registern" ist p.r. in b, L, R; denn

$$\begin{aligned} B^{\spadesuit}(b,L,R) \longleftrightarrow & [lg(b) = 0 \vee (lg(b) = 2 \wedge (b)_0 < R \wedge (b)_1 \leq L) \\ & \vee (lg(b) = L+2 \wedge (b)_0 < R)]. \end{aligned}$$

c) $M^{\heartsuit}(m,L,R)$:= "M_m ist Registermaschine über A mit R Registern" ist p.r. in m, L, R; denn

$$\begin{aligned} M^{\heartsuit}(m,L,R) \longleftrightarrow & \big[m \neq 0 \wedge \forall i < lg(m)[B^{\spadesuit}((m)_i, L, R) \wedge (m)_{lg(m)-1} = 0 \\ & \wedge (lg((m)_i) > 2 \to \forall j < lg((m)_i)(j > 0 \to ((m)_i)_j < lg(m)))]\big]. \end{aligned}$$

Lemma 9 : *Es gibt eine p.r. Funktion* Na*, so daß für alle Registermaschinen* M *und Konfigurationen* K *gilt*

$$\ulcorner M(K)\urcorner = Na(\ulcorner M\urcorner, \ulcorner K\urcorner).$$

Beweis: Wir brauchen die folgenden drei p.r. Hilfsfunktionen:

$$Ers(s,i,y) := \begin{cases} \langle x_0,\ldots,y,\ldots,x_{n-1}\rangle & , \text{ wenn } s = \langle x_0,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1}\rangle \\ s & , \text{ wenn } i \geq lg(s) \end{cases}$$

$$D(s,i) := \langle x_0,\ldots,x_{n-1},i\rangle, \text{ wenn } s = \langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle$$

$$F(s,i) := \begin{cases} D(s,i) & , \text{ wenn } i > 0 \\ \langle x_0,\ldots,x_{n-2}\rangle & , \text{ wenn } i = 0\,,\ s = \langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle \end{cases}$$

In der Tat sind sie p.r., denn z.B.

$$Ers(s,i,y) = \mu z \leq B(s{+}y)\big[lg(z) = lg(s) \wedge \forall j < lg(s)((j = i \to (z)_j = y) \wedge (j \neq i \to (z)_j = (s)_j))\big]$$

und

$$\begin{aligned} F(s,i) =& \mu z \leq B(s+i)[(i = 0 \to lg(z) = lg(s) \dot{-} 1 \wedge \forall j < lg(z)(z)_j = (s)_j) \\ & \wedge (i > 0 \to lg(z) = lg(s) + 1 \wedge \forall j < lg(s)(z)_j = (s)_j \wedge (z)_{lg(s)} = i)]. \end{aligned}$$

Setze nun

$$Na(m,k) := \begin{cases} k & \text{, falls } lg(b) \leq 1 \\ Ers(Ers(k,0,c+1), r+1, F(w,(b)_1)) & \text{, falls } lg(b) = 2 \\ Ers(k,0,(b)_{(w)_{lg(w)\dot{-}1}+1}) & \text{, falls } lg(b) > 2, \end{cases}$$

wobei $c = (k)_0$, $b = (m)_c$, $r = (b)_0$, $w = (k)_{r+1}$. Es ist nicht allzu schwer einzusehen, daß dieses Na wie gewünscht ist. Falls etwa

$$m = \ulcorner M \urcorner = \ulcorner (b_0, \ldots, b_N) \urcorner \text{ und } k = \ulcorner K \urcorner = \ulcorner (c, W_0, \ldots, W_{R-1}) \urcorner$$

(also der Fall, der uns interessiert), dann werden in der Definition von Na gerade die Fälle $b = \ulcorner s \urcorner$, $b = \ulcorner (r,l) \urcorner$ und $b = \ulcorner (r, c_0, \ldots, c_L) \urcorner$ unterschieden. Im dritten Fall erhalten wir z.B.

$$b = \ulcorner b_c \urcorner = \ulcorner (r, c_0, \ldots, c_L) \urcorner = \langle r, c_0, \ldots, c_L \rangle \text{ und } w = (\ulcorner K \urcorner)_{r+1} = \ulcorner W_r \urcorner = \ulcorner (a_{i_0}, \ldots, a_{i_{lg(w)\dot{-}1}}) \urcorner,$$

also

$(w)_{lg(w)\dot{-}1} =$ Index des letzten Buchstaben von W_r bzw. $=0$ falls $W_r = \emptyset$ und $(b)_{(w)_{lg(w)\dot{-}1}+1} = c_{(w)_{lg(w)\dot{-}1}}$.

Wie man nun aus der Definition von Na leicht sieht, gilt in diesem Fall wie gewünscht:

$$Na(\ulcorner M \urcorner, \ulcorner K \urcorner) = \ulcorner M(K) \urcorner.$$

Die anderen Fälle kann man sich analog klarmachen. ▯

Bemerkung : Natürlich ist dann auch

$$(n,m,k) \mapsto Na^n(m,k) := \underbrace{Na(m, Na(m, \ldots, Na(m,k)}_{n\text{-mal}} \ldots)$$

primitiv rekursiv.

Nun können wir die Rückrichtung von Satz 1 aus §2 zeigen:

Behauptung : *Jede RM-berechenbare Funktion ist rekursiv.*

BEWEIS: Wir brauchen die p.r. Hilfsfunktion

$$x \mapsto \underline{x} := \langle \underbrace{1, \dots, 1}_{x\text{-mal}} \rangle$$

(Es ist $\underline{0} = 0$, $\underline{x+1} = F(\underline{x}, 1)$, also ist die Funktion p.r.)
und die p.r. Hilfsfunktionen ("Anfangskonfiguration")

$$G_n : (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle 0, 0, \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{t\text{-mal}} \rangle$$

(Es ist $G_n(0, \vec{x}) = \langle 0, 0, \vec{x} \rangle$ und $G_n(t+1, \vec{x}) = D(G(t, \vec{x}), 0)$.)
Beachte, daß M mit $\ulcorner M \urcorner$ Registern auskommt; denn falls die Registernummer r in M auftaucht, dann gilt $r \leq \ulcorner (r, l) \urcorner \leq \ulcorner M \urcorner$.
Nun definieren wir das Prädikat

$$\begin{aligned} T^n(m, x_1, \dots, x_n, g) :\longleftrightarrow & (m)_{(N^{(g)_1}(m, G_n(m, x_1, \dots, x_n)))_0} = 0 \\ & \wedge lg((N^{(g)_1}(m, G_n(m, x_1, \dots, x_n)))_1) = (g)_0 \end{aligned}$$

Erläuterung: Die Idee ist, auszudrücken, daß die Registermaschine mit Gödelnummer m bei Input $\vec{x}$ (+ m-vielen Nullen) nach $(g)_1$-vielen Schritten mit Output $(g)_0$ stoppt. Genauer: Es gilt $T^n(m, \vec{x}, g)$ gdw. bei Anfangskonfiguration $(0, 0, \vec{x}, 0, \dots, 0)$ die Maschine mit Gödelnummer m (wobei dies aber nicht unbedingt die Nummer einer Registermaschine zu sein braucht) nach $(g)_1$ Schritten die Stopkonfiguration erreicht, mit $(g)_0$ im 0-ten Register.

Daraus ist ersichtlich: Wenn $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ von M berechnet wird, dann ist

$$(*) \qquad f(x_1, \dots, x_n) = (\mu g T^n(\ulcorner M \urcorner, x_1, \dots, x_n, g))_0$$

Anmerkung: Man muß nicht unbedingt das kleinste solche g wählen, aber dieses tut's. Aus $(*)$ folgt unsere Behauptung. ∎

Aus $(*)$ erhalten wir unmittelbar ein weiteres wichtiges Ergebnis:

Folgerung 10 : *Für jedes n gibt es ein p.r. Prädikat $T^n(m, x_1, \dots, x_n, g)$ (das "Kleene-Prädikat" (nach Stephen C. Kleene)), so daß jede rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ die Form*

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\mu g T^n(e, x_1, \dots, x_n, g))_0$$

für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$ hat.

Man erhält also eine uniforme Darstellung für rekursive Funktionen f, wobei in der Darstellung e die Gödelnummer einer Registermaschine ist, die f berechnet.

Definition : *Wir setzen $\varphi^n_m(\vec{x}) := (\mu g T^n(m, \vec{x}, g))_0$.*

Unser Ergebnis von oben legt die Frage nahe, ob (für alle $n, m \in I\!N$) die Funktion φ^n_m für alle $\vec{x} \in I\!N^n$ definiert ist. Die Antwort ist negativ, denn wenn e nicht die Gödelnummer der Registermaschine einer rekursiven Funktion ist, dann ist $\varphi^n_e(\vec{x})$ im allgemeinen nur eine partiell definierte Funktion. (Beispiel: Wenn $M = (0, 0, \ldots, 0), s)$, dann ist φ^n_m, $m = \ulcorner M \urcorner$, nirgends definiert.)

Bemerkung : Es gibt keine rekursive Funktion $F(e, x)$, so daß jede rekursive Funktion $f(x)$ die Form $F(e, x)$ für ein geeignetes e hat. Gäbe es nämlich eine solche Funktion, dann hätte auch die rekursive Funktion $F(x, x) + 1$ die Form $F(e, x)$; für $x = e$ ergibt sich ein Widerspruch.

§ 4 Partiell rekursive Funktionen

Wir wollen uns nun mit partiell rekursiven Funktionen, auf die wir im letzten Kapitel gestoßen sind, näher beschäftigen.

Notationen :

– Mit $f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ bezeichnen wir eine partielle Funktion von $\mathbb{N}^n$ nach $\mathbb{N}$. f ist definiert auf

$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{N}^n$.

– $f(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$ bedeutet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}(f)$. Sonst schreiben wir $f(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$ (manchmal

schreiben wir dafür auch $f(\vec{x}) \simeq \uparrow$).

– Für zwei partielle Funktionen f und g bedeutet

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq g(x_1, \ldots, x_n),$$

daß gilt: $(f(\vec{x}) \uparrow$ und $g(\vec{x}) \uparrow)$ oder $(f(\vec{x}) \downarrow, g(\vec{x}) \downarrow$ und $f(\vec{x}) = g(\vec{x}))$. Man beachte, daß wir $\simeq$ als Relation zwischen den Termen $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n)$ eingeführt haben, nicht als Relation zwischen den Funktionen f und g. Es gilt daher insbesondere für zwei partielle Funktionen f und $g : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$:

$$f = g \longleftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n f(\vec{x}) \simeq g(\vec{x}).$$

Beachte auch, daß $f(\vec{x}) \simeq y$ gdw. $f(\vec{x}) \downarrow$ und $f(\vec{x}) = y$ (d.h. die Relation $f(\vec{x}) \simeq y$ ist der Graph von f).

– Es sei M eine Registermaschine mit R Registern über A und $A_0 \subseteq A$. Dann "berechnet" M eine

partielle Funktion $F : (A_0^*)^n \hookrightarrow A^*$, wobei

$$F(W_1, \ldots, W_n) \simeq W_0 \iff (\emptyset, W_1, \ldots, W_n, \emptyset, \ldots, \emptyset) \xrightarrow{M} (W_0, \ldots).$$

– Wenn $A_0 = \{|\}$, so sagen wir, daß M die partielle Funktion $f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ berechnet, wenn M

die Funktion $F : (A_0^*)^n \hookrightarrow A^*$ berechnet, für die gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \text{ Länge von } F(|^{x_1}, \ldots, |^{x_n}).$$

Definition : *$f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ heißt* **partiell rekursiv** *gdw. sich f aus den Grundfunktionen R0 durch die Operationen R1, R2 und uneingeschränkte Anwendung*

von R3 ergibt (d.h. in R3 braucht nicht $\forall\vec{x}\,\exists y(g(\vec{x},y)=0)$ erfüllt zu sein). Für partielle Funktionen bedeuten dabei die Operationen R1-R3 folgendes:
R1: f ist definiert als

$$f(x_1,\dots,x_n) :\simeq h(f_1(\vec{x}),\dots,f_k(\vec{x})),$$

d.h.

$$f(\vec{x}) \simeq y_0 \iff \text{es existieren } y_1,\dots,y_k \text{ mit } f_1(\vec{x}) \simeq y_1,\dots,f_k(\vec{x}) \simeq y_k, \text{ und } h(y_1,\dots,y_k) \simeq y_0.$$

R2: f ist definiert als

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n,0) &:\simeq g(x_1,\dots,x_n) \\ f(x_1,\dots,x_n,y+1) &:\simeq h(x_1,\dots,x_n,y,f(x_1,\dots,x_n,y)) \end{aligned}$$

(analog zu R1 zu verstehen).
R3: f ist definiert als

$$f(x_1,\dots,x_n) :\simeq \mu y(g(x_1,\dots,x_n,y)=0),$$

d.h.

$$f(\vec{x}) \simeq y \iff g(\vec{x},0)\downarrow,\dots,\ g(\vec{x},y)\downarrow,\ g(\vec{x},0)>0,\ \dots,\ g(\vec{x},y-1)>0 \text{ und } g(\vec{x},y)=0.$$

Die alten Beweise liefern

Satz 1 : *$f : I\!N^n \hookrightarrow I\!N$ ist genau dann partiell rekursiv, wenn f von einer Registermaschine berechnet wird. f hat die Form*

$$f(x_1,\dots,x_n) \simeq (\mu g T^n(e,x_1,\dots,x_n,g))_0$$

für ein geeignetes $e \in I\!N$.

Folgerung 2 : *f ist rekursiv gdw. f partiell rekursiv und total ist.*

BEWEIS: "$\Rightarrow$": klar.
"$\Leftarrow$": Nicht unmittelbar klar aus der Definition (wegen der uneingeschränkten Anwendung des μ-Operators in R3); aber wir haben mit Satz 1: Wenn f partiell

rekursiv und total ist, dann existiert ein $e \in I\!N$ mit $f(\vec{x}) \simeq \varphi_e^n(\vec{x})(\simeq (\mu g T^n(e, \vec{x}, g))_0)$ und f ist total, daher (betrachte den Aufbau von $(\mu g T^n(e, \vec{x}, g))_0$) ist f rekursiv.
$\square$

Als nächstes erhalten wir das für alles weitere zentrale Ergebnis (von Stephen C. Kleene):

Satz 3 (Hauptsatz der Rekursionstheorie) :
Zu jedem n gibt es eine $n+1$-stellige partiell rekursive Funktion $\varphi^n(e, x_1, \ldots, x_n) :\simeq \varphi_e^n(x_1, \ldots, x_n)$ mit
a) ("Universelle Funktion":) Jede partiell rekursive n-stellige Funktion f hat die Form φ_e^n für ein geeignetes $e \in I\!N$.
b) ("s-m-n-Theorem":) Für alle n, m gibt es eine p.r. Funktion s_n^m mit

$$\varphi_e^{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \simeq \varphi^n_{s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Zusatz: s_n^m läßt sich sogar injektiv wählen (für alle n, m).

Definition : *Das e aus a) heißt ein* **Index** *von f (f kann mehrere Indizes haben).*
$f = \varphi_e^n$ heißt **e-te n-stellige partiell rekursive Funktion**.

Beweis (von Satz 3): Setze $\varphi^n(e, x_1, \ldots, x_n) :\simeq (\mu g T^n(e, x_1, \ldots, x_n, g))_0$, dann gilt a), wie wir schon gezeigt haben (mit $e = \ulcorner M \urcorner$, wobei M f berechnet). Zum Beweis von b) nehmen wir an, daß e Gödelnummer einer Registermaschine M ist, die $\varphi_e^{n+m}(\vec{x}, \vec{y})$ berechnet. $s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ ist dann die Gödelnummer der folgenden Maschine M', die $\varphi^n_{s_n^m(e, \vec{y})}(\vec{x})$ berechnet:

$$\to \underbrace{\boxed{\mathcal{R}_{n+1}|, \mathcal{R}_{n+1}|, \ldots}}_{y_1\text{-mal}} \to \ldots \to \underbrace{\boxed{\mathcal{R}_{n+m}|, \mathcal{R}_{n+m}|, \ldots}}_{y_m\text{-mal}} \to \boxed{M}$$

Für den einfachen Fall $m = 1$ schreiben wir $s_n^1(e, y)$ explizit hin: Falls $e = \ulcorner M \urcorner = \langle \ulcorner b_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner b_N \urcorner \rangle$, dann ist

$$M' = (\underbrace{(n+1, 1), \ldots, (n+1, 1)}_{y\text{-viele}}, \bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_N) \text{ und } s_n^1(e, y) = \langle \langle n+1, 1 \rangle, \ldots, \langle n+1, 1 \rangle, \bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_N \rangle,$$

wobei

$$\begin{aligned} b_i &= (r, l) &&\Longrightarrow \bar{b}_i = (r, l) \\ b_i &= s &&\Longrightarrow \bar{b}_i = s \\ b_i &= (r, c_0, \ldots, c_L) &&\Longrightarrow \bar{b}_i = (r, c_0 + y, \ldots, c_L + y). \end{aligned}$$

Formaler: Setze

$$H(b,y) := \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{, falls } lg(b) \leq 2 \\ \mu\bar{b} < p_b^{(b+y)^2} & [lg(\bar{b}) = lg(b) \wedge (\bar{b})_0 = (b)_0 \\ \wedge \forall i < lg(b)(i > 0 \rightarrow (\bar{b})_i = (b)_i + y] & \text{, sonst;} \end{array} \right\}.$$

d.h. H berechnet $\bar{b}_i$ aus b_i und y. Nun setze

$$s_n^1(e,y) := \mu\bar{e} < p_{e+y}^{((e+y)+\langle n+1,1\rangle)^2} \big[lg(\bar{e}) = lg(e) + y \wedge \forall i < y\,((\bar{e})_i = \langle n+1, 1\rangle)$$
$$\wedge \forall j < lg(e)((\bar{e})_{y+j} = H((e)_j, y))\big].$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß s_n^1 p.r. ist. Außerdem ist leicht zu sehen, daß s_n^1 die gewünschten Eigenschaften für alle Zahlen e hat. Die Injektivität ist einfach nachzuprüfen und sei dem Leser als Übung überlassen. (Beachte: s_n^1 ist total, also auch für solche e, x definiert, für die e nicht Gödelnummer einer Registermaschine ist oder e die Nummer einer Maschine ist, die für x nicht stoppt.) $\square$

Folgerung 4 (Effektivität von R1, R2 und R3) :

a) Für alle n, k gibt es eine p.r. Funktion E mit

$$\varphi_{E(e,e_1,\ldots,e_k)}^n(x_1,\ldots,x_n) \simeq \varphi_e^k(\varphi_{e_1}^n(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_{e_k}^n(x_1,\ldots,x_n))$$

b) Für alle n gibt es eine p.r. Funktion I mit

$$\begin{aligned} \varphi_{I(e,f)}^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,0) &\simeq \varphi_e^n(x_1,\ldots,x_n) \\ \varphi_{I(e,f)}^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,y+1) &\simeq \varphi_f^{n+2}(x_1,\ldots,x_n,y,\varphi_{I(e,f)}^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,y)) \end{aligned}$$

c) Für alle n gibt es eine p.r. Funktion M mit

$$\varphi_{M(e)}^n(x_1,\ldots,x_n) \simeq \mu y(\varphi_e^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,y) = 0)$$

d.h. man kann jeweils mit den vorgegebenen Indizes den Index der zusammengesetzten Funktion "effektiv", d.h. mit einer p.r. Funktion, berechnen.

Beweis: Die Nachweise sind einfach; wir zeigen als Beispiel b): Die Funktion F – definiert durch

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_n,0,e,f) &:\simeq \varphi^n(e,x_1,\ldots,x_n) \\ F(x_1,\ldots,x_n,y+1,e,f) &:\simeq \varphi^{n+2}(f,x_1,\ldots,x_n,y,F(x_1,\ldots,x_n,y,e,f)) \end{aligned}$$

– ist, wie man aus ihrer Definition sieht, partiell rekursiv. Wenn $F = \varphi_g^{n+3}$ für ein $g \in I\!N$, wähle nach dem s-m-n-Theorem s_{n+1}^2 mit $\varphi_g^{n+3}(\vec{x},y,e,f) \simeq \varphi_{s_{n+1}^2(g,e,f)}^{n+1}(\vec{x},y)$.

Setze nun $I(e,f) := s^2_{n+1}(g,e,f)$, dann ist I wie gewünscht.
a) und c) analog. ∎

Bemerkungen :
a) Aus der Entwicklung in §2 erkennt man, daß es eine rekursive Menge P von Gödelnummern von

Maschinen gibt, so daß die φ^1_p $(p \in P)$ gerade die p.r. Funktionen sind.
b) Es gibt keine rekursive Menge P', so daß $\{\varphi^1_p \mid p \in P'\}$ die Klasse der rekursiven Funktionen ist.
c) Es gibt rekursive Funktionen, die nicht p.r. sind.

Beweis:
a) Wir verzichten auf den Beweis (Übung).
b) (Diagonaltrick) Sonst wäre die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \notin P' \\ \varphi^1_x(x) + 1 & \text{, falls } x \in P' \end{cases}$$

rekursiv, also $f = \varphi^1_{p_0}$ für ein $p_0 \in P$. Das ergibt den Widerspruch $f(p_0) = \varphi^1_{p_0}(p_0)+1 = f(p_0) + 1$!
c) folgt aus a) und b). ∎

Wir werden gleich noch ein konkretes Beispiel einer rekursiven, aber nicht p.r. Funktion – die Ackermann-Funktion – kennenlernen.

Der Diagonaltrick, den wir zum Beweis von b) verwendet haben, liefert auch den Beweis des folgenden Satzes (von Stephen C. Kleene):

Satz 5 (Rekursionssatz oder auch Fixpunktsatz) :
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv. Dann gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^n_{h(e)} = \varphi^n_e.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß eine rekursive (also totale) Funktion φ^1_f existiert mit

$$\varphi^n_{h(\varphi^1_x(x))}(\vec{y}) \simeq \varphi^n_{\varphi^1_f(x)}(\vec{y}).$$

Beweis: Es ist $\varphi^n_{h(\varphi^1_x(x))}(\vec{y})(\simeq \varphi^n(h(\varphi^1(x,x)),\vec{y}))$ partiell rekursiv, also existiert nach dem Hauptsatz $g \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^n_{h(\varphi^1_x(x))}(\vec{y}) \simeq \varphi^{n+1}_g(\vec{y},x) \simeq \varphi^n_{s^1_n(g,x)}(\vec{y})$. Weiter ist $s^1_n(g,\cdot)$ rekursiv, also existiert wieder nach dem Hauptsatz ein $f \in I\!N$ mit $\varphi^1_f(x) \simeq s^1_n(g,x)$. Die Funktion φ^1_f ist wie gewünscht.

Damit haben wir für $e := \varphi^1_f(f)$ ($\downarrow$, da φ^1_f total!)

$$\varphi^n_{h(e)} = \varphi^n_{h(\varphi^1_f(f))} = \varphi^n_{\varphi^1_f(f)} = \varphi^n_e,$$

also unsere Behauptung. $\square$

Anwendung : Wir definieren die Ackermann-Funktion als eine Funktion, die rekursiv, aber nicht p.r. ist. (Es gibt mehrere Varianten der Ackermann-Funktion. Wir stellen nur eine vor.)

Wir definieren zunächst rekursiv für alle $n \in I\!N$:

$$\begin{aligned} g_0(x,y) &:= x+y \\ g_{n+1}(x,y) &:= \begin{cases} 0 & \text{, falls } y=0 \\ x & \text{, falls } y=1 \\ g_n(x, g_{n+1}(x,y-1)) & \text{, falls } y>1. \end{cases} \end{aligned}$$

(Es ist $g_1(x,y) = x{\cdot}y$, $g_2(x,y) = x^y$ $(y>0)$, $\ldots$) Man sieht leicht (Induktionsbeweis): Alle Funktionen g_n sind p.r.

Behauptung: Die Funktion $(n,x,y) \mapsto g_n(x,y)$ – wir nennen sie die **Ackermann-Funktion** – ist rekursiv.

Beweis: Wir betrachten dazu $\varphi^3_z(n,x,y)$ für variables z. *Idee:* Wir suchen z_0, so daß $\varphi^3_{z_0}(n,x,y) \simeq g_n(x,y)$. Zunächst definieren wir mit rekursiver Fallunterscheidung eine Funktion $F : (n,x,y,z) \mapsto F(n,x,y,z)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} F(0,x,y,z) &:\simeq x+y \\ F(n+1,x,y,z) &:\simeq \begin{cases} 0 & \text{, falls } y=0 \\ x & \text{, falls } y=1 \\ \varphi^3_z(n,x,\varphi^3_z(n+1,x,y \dot{-} 1)) & \text{, falls } y>1 \end{cases} \end{aligned}$$

F ist nach Definition partiell rekursiv in n, x, y, z (beachte: $\varphi^3_z(n,x,y) \simeq \varphi^3(z,n,x,y)$ ist partiell rekursiv in z, n, x, y). Folglich existiert ein $f \in I\!N$ mit: $F = \varphi^4_f$; und mit dem s-m-n-Theorem erhalten wir $\varphi^4_f(n,x,y,z) \simeq \varphi^3_{s^1_3(f,z)}(n,x,y)$. Wir setzen nun $h(z) := s^1_3(f,z)$, also $F(n,x,y,z) \simeq \varphi^3_{h(z)}(n,x,y)$. Nach dem Rekursionssatz existiert weiter ein $e \in I\!N$ mit $\varphi^3_e = \varphi^3_{h(e)}$, d.h. wir haben

$$F(n,x,y,e) \simeq \varphi^3_e(n,x,y).$$

Also gilt nach Definition $\varphi_e^3(0, x, y) \simeq x + y$ und

$$\varphi_e^3(n+1, x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, falls } y = 0 \\ x & \text{, falls } y = 1 \\ \varphi_e^3(n, x, \varphi_e^3(n+1, x, y \dot{-} 1)) & \text{, falls } y > 1. \end{cases}$$

Durch Vergleich mit der Definition von $g_n(x, y)$ erhalten wir

$$g_n(x, y) \simeq \varphi_e^3(n, x, y) \text{ für alle } n,\ x,\ y$$

(genauer Beweis durch Induktion über n). Damit ist unsere Behauptung bewiesen (siehe Folgerung 2).

Übung 1: Zu jeder p.r. Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $x_1, \ldots, x_m$ gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_m) \leq g_n(2, x_1 + \ldots + x_m + 1)$$

Folgere: Die Ackermann-Funktion $(n, x, y) \mapsto g_n(x, y)$ ist nicht p.r.

Nun zu einer Verstärkung des Rekursionssatzes:

Satz 6 (Effektive Version des Rekursionssatzes) :
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine rekursive Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^n_{s(f)}(y_1, \dots, y_n) \simeq \varphi^n_{\varphi^1_f(s(f))}(y_1, \dots, y_n)$$

für alle $f \in \mathbb{N}$.

(Da $h = \varphi^1_f$ für ein f, folgt der Rekursionssatz hieraus mit $e = s(f)$.)

BEWEIS (genau wie der alte Beweis): Nach zweimaliger Anwendung des s-m-n-Theorems erhält man eine rekursive Funktion g mit

$$\varphi^n_{\varphi^1_z(\varphi^1_x(x))}(\vec{y}) \simeq \varphi^n_{\varphi^1_{g(z)}(x)}(\vec{y}),$$

wobei $\varphi^1_{g(z)}$ total für alle z ist. Denn wähle e_0 mit $\varphi^n_{\varphi^1_z(\varphi^1_x(x))}(\vec{y}) \simeq \varphi^{n+2}_{e_0}(\vec{y}, x, z) \simeq \varphi^n_{s^2_n(e_0,x,z)}(\vec{y})$; wenn $s^2_n(e_0, x, z) \simeq \varphi^2_{e_1}(x, z) \simeq \varphi^1_{s^1_1(e_1,z)}(x)$, setze $g(z) := s^1_1(e_1, z)$, dann ist g wie gewünscht.
Setze nun

$$s(f) := \varphi^1_{g(f)}(g(f)),$$

dann ist s wie gewünscht. ∎

Übung 2: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine rekursive Funktion r mit

$$\varphi^n_{r(y)}(x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi^{n+1}_y(r(y), x_1, \dots, x_n).$$

Übung 3: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und rekursiven Funktionen g, $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt es e, f mit

$$\varphi^n_e = \varphi^n_{h(e,f)} \quad \text{und} \quad \varphi^n_f = \varphi^n_{g(e,f)}.$$

Hinweis: Definiere

$$\langle f_1, f_2\rangle(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} f_1(y, x_2, \dots, x_n) \text{ , falls } x_1 = 2y \\ f_2(y, x_2, \dots, x_n) \text{ , falls } x_1 = 2y + 1. \end{cases}$$

Zeige: Es gibt rekursive Funktionen s, t, m mit

$$\langle \varphi^n_e, \varphi^n_f\rangle = \varphi^n_{m(e,f)} \quad \text{und} \quad \varphi^n_e = \langle \varphi^n_{s(e)}, \varphi^n_{t(e)}\rangle.$$

§ 5 Rekursiv aufzaehlbare Mengen

In diesem Kapitel gehen wir über zur nächsten wichtigen Klasse von Mengen natürlicher Zahlen neben der der rekursiven, nämlich zur Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen.

Definition : *$A \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt* **rekursiv aufzählbar (r.a.)** *gdw. eine rekursive Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ existiert mit*

$$A(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y).$$

Zunächst einige einfache Abgeschlossenheitseigenschaften:

Lemma 1 :

a) Jede rekursive Relation ist r.a.

b) $A(\vec{x}, y)$ r.a. und $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv $\Longrightarrow A(\vec{x}, f(\vec{x}))$ r.a.

c) A, B r.a. $\Longrightarrow A \vee B$ und $A \wedge B$ r.a.

d) $A(\vec{x}, y)$ r.a. $\Longrightarrow \exists y A(\vec{x}, y)$ r.a.

e) $A(\vec{x}, y)$ r.a. $\Longrightarrow \forall y < z A(\vec{x}, y)$ r.a.

Beweis:
a) $A(\vec{x})$ sei rekursiv. Wir setzen $R(\vec{x}, y) :\leftrightarrow A(\vec{x})$ (also ist auch R rekursiv), dann gilt

$$A(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y),$$

also A r.a.
b) Es gelte $A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y, z)$, dann haben wir

$$A(\vec{x}, f(\vec{x})) \longleftrightarrow \exists z R(\vec{x}, f(\vec{x}), z)$$

(benutze die Abgeschlossenheitseigenschaften rekursiver Mengen).
c) Es gelte $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$ und $B(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z S(\vec{x}, z)$; dann folgt

$$A(\vec{x}) \vee B(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists u (R(\vec{x}, u) \vee S(\vec{x}, u)) \ \text{und} A(\vec{x}) \wedge B(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists u (R(\vec{x}, (u)_0) \wedge S(\vec{x}, (u)_1))$$

(benutze b)).
d) Es gelte $A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y, z)$, dann folgt

$$\exists y A(x_1, \ldots, x_n, y) \longleftrightarrow \exists u R(x_1, \ldots, x_n, (u)_0, (u)_1)$$

(benutze wieder b)).
e) R sei wie in d), dann haben wir

$$\forall y < z A(\vec{x}, y) \longleftrightarrow \exists u \underbrace{\forall i < z R(\vec{x}, i, (u)_i)}_{\text{rekursiv}}.$$

$\square$

Die Bezeichnung "rekursiv aufzählbar" wird gerechtfertigt durch Teil a) des folgenden Lemmas:

Lemma 2 :

a) $A \subseteq \mathbb{N}$ ist r.a. gdw. $A = \emptyset$ oder $A = f[\mathbb{N}] := \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, f rekursiv. Man kann f sogar

p.r. oder, wenn A unendlich ist, injektiv wählen.

b) $A \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv gdw. A endlich ist oder $A = f[\mathbb{N}]$, f rekursiv und streng monoton wachsend.

BEWEIS:
a) "$\Rightarrow$": Es sei A r.a., $a \in A$ und es gelte $A(x) \leftrightarrow \exists y R(x, y)$, R rekursiv. Setze

$$f(x) := \begin{cases} (x)_0 & \text{, falls gilt } R((x)_0, (x)_1) \\ a & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $A = f[\mathbb{N}]$, wie man leicht sieht. Wir werden unten (als Folgerung aus Satz 5) sehen, daß man R p.r. wählen kann; dann ist auch f p.r. Wenn $A = f[\mathbb{N}]$ unendlich ist, definiere (durch Wertverlaufsrekursion)

$$f'(x) := f(\mu y (f(y) \notin \{f'(0), \ldots, f'(x-1)\})).$$

Dann ist f' injektiv, und es gilt $A = f'[\mathbb{N}]$, wie man leicht sieht.
"$\Leftarrow$": Falls $A = \emptyset$, dann ist A rekursiv, also auch r.a. Falls $\emptyset \neq A = f[\mathbb{N}]$, f rekursiv, dann gilt

$$A(x) \longleftrightarrow \underbrace{\exists y \overbrace{f(y) = x}^{\text{rekursiv}}}_{\text{r.a.}},$$

also ist A r.a.
b) "$\Rightarrow$": Es sei A rekursiv und unendlich. Setze

$$f(x) := \mu y (y \in A \wedge \forall i < x (y > f(i))).$$

Dann ist $A = f[\mathbb{N}]$, f rekursiv und streng monoton wachsend.
"$\Leftarrow$": Falls A endlich ist, klar. Falls A unendlich ist und $A = f[\mathbb{N}]$, f rekursiv und streng monoton wachsend, dann gilt

$$A(x) \longleftrightarrow \underbrace{\exists y \leq x f(y) = x}_{\text{rekursiv}},$$

also ist A rekursiv. ∎

Nun zu einem neuen Begriff, der eine weitere Charakterisierung der rekursiven und r.a. Relationen erlaubt:

Definition : *Es sei $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$. Wir sagen, eine partielle Funktion $\varphi : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$* **uniformisiert** *$A$, wenn*

$$Graph(\varphi) \subseteq A \text{ (also } \varphi(\vec{x}) \simeq y \rightarrow A(\vec{x}, y)) \text{ und } \operatorname{dom}(\varphi) = \operatorname{dom}(A),$$

wobei $Graph(\varphi) := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq x_{n+1}\}$
und $\operatorname{dom}(A) := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \exists x_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in A\}$.

Satz 3 (Uniformisierungssatz) :
Jede r.a. Relation ist durch eine partiell rekursive Funktion uniformisierbar.

Beweis: Es gelte $A(x_1, \ldots, x_{n+1}) \leftrightarrow \exists y R(x_1, \ldots, x_{n+1}, y)$, R rekursiv. Setze

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) :\simeq (\mu z R(x_1, \ldots, x_n, (z)_0, (z)_1))_0,$$

dann ist φ wie gewünscht. ∎

Folgerung 4 :
a) A ist rekursiv gdw. A und $\neg A$ r.a. sind.
b) $f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ ist partiell rekursiv gdw. $Graph(f)$ r.a. ist.
c) $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ist r.a. gdw. $A = \operatorname{dom}(f)$ mit partiell rekursivem f.

Beweis: a) "$\Rightarrow$": klar aus dem bisherigen.
"$\Leftarrow$": Es seien A und $\neg A$ r.a., dann ist auch $B := A \times \{0\} \cup \neg A \times \{1\}$ r.a. Nun uniformisiere φ die Menge B; dann ist $K_A = \varphi$ partiell rekursiv und total, also A rekursiv.
b) "$\Rightarrow$": Es sei $f = \varphi^n_e$, dann gilt

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in Graph(f) \longleftrightarrow \exists g(T^n(e, x_1, \ldots, x_n, g) \wedge (g)_0 = x_{n+1}),$$

also ist $Graph(f)$ r.a.
"$\Leftarrow$": Es sei $Graph(f)$ r.a.; dann gilt: f uniformisiert seinen eigenen Graphen; d.h. wenn φ den Graphen von f uniformisiert (also insbesondere partiell rekursiv ist), ist $\varphi = f$. Also ist f partiell rekursiv.
c) "$\Rightarrow$": Es sei A r.a. und

$$f(\vec{x}) :\simeq \begin{cases} \uparrow, \text{ falls } \vec{x} \notin A \\ 0, \text{ falls } \vec{x} \in A. \end{cases}$$

Dann ist $Graph(f) = A \times \{0\}$ r.a., also ist f partiell rekursiv (mit b)). Außerdem gilt nach Definition $A = \mathrm{dom}(f)$.
"$\Leftarrow$": Es gilt $f = \varphi_e^n$ für ein $e \in I\!N$ und

$$\vec{x} \in A = \mathrm{dom}(f) \longleftrightarrow \exists g T^n(e, \vec{x}, g),$$

also ist A r.a. $\square$

Da die Relation $\exists g T^n(e, \vec{x}, g)$ weiterhin eine wichtige Rolle spielen wird, geben wir ihr einen eigenen Namen:

Definition : *Wir setzen*
– $W^n(e, x_1, \ldots, x_n) :\leftrightarrow \exists g T^n(e, \vec{x}, g)$. *($W^n$ ist offensichtlich r.a.)*
– $W_e^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid W^n(e, x_1, \ldots, x_n)\}$. *$n = 1$ lassen wir weg, d.h. $W_e := W_e^1$. (W_e^n ist r.a. für alle $e, n \in I\!N$, da $W_e^n = \mathrm{dom}(\varphi_e^n)$.) $A = W_e^n$ heißt* **e-te r.a. Menge***; e heißt ein* **Index** *von $A = W_e^n$.*

Der letzte Teil der Definition wird durch Teil a) des folgenden Satzes gerechtfertigt:

Satz 5 :
a) (Universelle Relation:) Jede r.a. Menge $A \subseteq I\!N^n$ hat die Form W_e^n für ein $e \in I\!N$.
b) (s-m-n-Theorem:) $W_e^{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \longleftrightarrow W^n_{s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n)$.

c) (Rekursionssatz:) Für jede rekursive Funktion h und jedes $n \in I\!N$ existiert $e \in I\!N$ mit $W_e^n = W_{h(e)}^n$.
d) (Rekursionssatz, effektive Version:) Für jedes $n \in I\!N$ gibt es eine rekursive Funktion s mit

$$W^n_{s(f)}(x_1,\dots,x_n) \longleftrightarrow \varphi^1_f(s(f))\downarrow \wedge W^n_{\varphi^1_f(s(f))}(x_1,\dots,x_n).$$

Beweis:
a) ist aus dem vorangehenden klar (siehe Beweis von c) in Folgerung 4).
b) Benutze das s-m-n-Theorem, um folgendes zu zeigen: $W^{n+m}_e(\vec{x},\vec{y}) \leftrightarrow \exists g T^{n+m}(e,\vec{x},\vec{y},g)$

$\leftrightarrow \exists g \varphi^{n+m}_e(\vec{x},\vec{y}) \simeq (g)_0 \leftrightarrow \exists g \varphi^n_{s^m_n(e,\vec{y})}(\vec{x}) \simeq (g)_0 \leftrightarrow \exists g T^n(s^m_n(e,\vec{y}),\vec{x},g) \leftrightarrow W^n_{s^m_n(e,\vec{y})}(\vec{x})$.
c) Benutze den Rekursionssatz; sonst ähnlich wie b).
d) Benutze die effektive Version des Rekursionssatzes; sonst ähnlich wie b). ▯

Natürlich ist noch zu klären: Gibt es überhaupt r.a., aber nicht rekursive Mengen? Die Antwort ergibt sich leicht aus Satz 5:

Folgerung 6 : $K := \{x \mid x \in W_x\}$ *ist r.a., aber nicht rekursiv.*

Beweis: Angenommen, $K(x)$ wäre rekursiv, dann auch $\neg K(x)$. Also gäbe es $e \in \mathbb{N}$ mit $\neg K(x) \leftrightarrow W_e(x)$ (Satz 5a)); insbesondere gälte nach Definition von K auch $\neg W_e(e) \leftrightarrow \neg K(e) \leftrightarrow W_e(e)$. Widerspruch! ▯

Folgerung 7 : *Die Operationen von Lemma 1 sind effektiv; z.B. gibt es eine rekursive Funktion h mit*

$$W_e \cup W_f = W_{h(e,f)}.$$

Beweis: Übung 1 (benutze Satz 5b)). ▯

Aus dem Uniformisierungssatz (Satz 3) folgt das sogenannte "Reduktionsprinzip" für r.a. Mengen:

Satz 8 (Reduktion für r.a. Mengen) :
Für alle r.a. Mengen A, $B \subseteq \mathbb{N}^n$ gibt es ein **reduzierendes Paar** A^*, B^* *von r.a. Mengen, d.h.* $A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A^* \cap B^* = \emptyset$, $A^* \cup B^* = A \cup B$.

Beweis: Wir geben zwei Beweise:
1.Beweis: φ uniformisiere $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$. Setze

$$A^* := \{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x}) \simeq 0\} \text{ und } B^* := \{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x}) \simeq 1\}.$$

2.Beweis: Es sei $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$, $B(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z S(\vec{x}, z)$, R, S rekursiv. Setze

$A^*(\vec{x}) :\leftrightarrow \exists y(R(\vec{x}, y) \wedge \forall z < y \neg S(\vec{x}, z))$ und $B^*(\vec{x}) :\leftrightarrow \exists z(S(\vec{x}, z) \wedge \forall y \leq z \neg R(\vec{x}, y))$.

In beiden Fällen sieht man leicht, daß A^* und B^* wie gewünscht sind. $\square$

Im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen führen wir nun folgende Bezeichnungsweise ein:

Definition :

– *A heißt Σ^0_1-Menge gdw. A r.a. ist.*
– *A heißt Π^0_1-Menge, gdw. $\mathbb{N}^n \setminus A$ r.a. ist.*

Folgerung 9 (Separation von Π^0_1-Mengen) :
Disjunkte Π^0_1-Mengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ lassen sich rekursiv **trennen** *("separieren"), d.h. es gibt ein rekursives C mit $\bar{A} \subseteq C$ und $C \cap \bar{B} = \emptyset$.*

Beweis: Das Paar A^*, B^* reduziere $\mathbb{N}^n \setminus \bar{A}$, $\mathbb{N}^n \setminus \bar{B}$ (beide sind r.a.), d.h. es gelte $A^* \subseteq \mathbb{N}^n \setminus \bar{A}$, $B^* \subseteq \mathbb{N}^n \setminus \bar{B}$ und $A^* \mathbin{\dot\cup} B^* = (\mathbb{N}^n \setminus \bar{A}) \cup (\mathbb{N}^n \setminus \bar{B}) = \mathbb{N}^n$. ($A^* \mathbin{\dot\cup} B^*$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung von A^* und B^*.) Setze

$$C := B^* = \mathbb{N}^n \setminus A^*.$$

Man sieht sofort, daß C die Mengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ trennt; C ist rekursiv, da $C = B^*$ r.a. und $\mathbb{N}^n \setminus C = A^*$ r.a. sind. $\square$

Gilt das Separationsprinzip auch für Σ^0_1-(also r.a.)Mengen? Der folgende Satz gibt eine negative Antwort:

Satz 10 : *Es gibt disjunkte r.a. Mengen A^* und B^*, die nicht rekursiv trennbar sind.*

Beweis: Es seien $A := \{x \mid x \in W_{(x)_0}\}$ und $B := \{x \mid x \in W_{(x)_1}\}$. Wähle A^*, B^* als reduzierendes Paar rekursiv aufzählbarer Mengen zu A und B.

Zwischenbehauptung: Für alle $e, f \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle e, f\rangle \in (A^* \cap W_e) \cup (B^* \cap W_f) \cup (\mathbb{N} \setminus (W_e \cup W_f)).$$

Beweis: Es sei $\langle e, f\rangle \in W_e \cup W_f$, also $\langle e, f\rangle \in A \cup B = A^* \cup B^*$. Zu zeigen ist: $\langle e, f\rangle$ liegt dann in $A^* \cap W_e$ oder in $B^* \cap W_f$.

1.Fall: $\langle e, f\rangle \in A^*$, also $\langle e, f\rangle \in A$, daher $\langle e, f\rangle \in W_e$; damit haben wir $\langle e, f\rangle \in$

$A^* \cap W_e$.
2.Fall: $\langle e, f\rangle \in B^*$, also $\langle e, f\rangle \in B$, daher $\langle e, f\rangle \in W_f$; damit haben wir $\langle e, f\rangle \in B^* \cap W_f$.
Somit haben wir die Zwischenbehauptung bewiesen.

Wenn wir nun annehmen, daß eine rekursive Menge C die Mengen A^* und B^* trennt, kommt man so zu einem Widerspruch: Es gibt $e, f \in \mathbb{N}$ mit $C = W_f = \mathbb{N} \setminus W_e$, da C und $\neg C$ r.a. (sogar rekursiv) sind.
0.Fall: $\langle e, f\rangle \notin W_f \cup W_e = \mathbb{N}$ – Widerspruch!
1.Fall: $\langle e, f\rangle \in A^* \cap W_e$, also $\langle e, f\rangle \in A^* \setminus C$, daher $A^* \not\subseteq C$ – Widerspruch!
2.Fall: $\langle e, f\rangle \in B^* \cap W_f$, also $C \cap B^* \neq \emptyset$ – Widerspruch!
Mindestens einer der Fälle muß nach der Zwischenbehauptung eintreten, also sind wir fertig. $\square$

Folgerung 11 : *Es sei* $Graph(\varphi) := A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$, *wobei wir* A, B *als disjunkte, r.a. und nicht rekursiv trennbare Mengen wählen (etwa* A^* *und* B^* *von oben).* φ *ist dann eine partiell rekursive Funktion, die sich nicht zu einer rekursiven fortsetzen läßt.*

Beweis: Angenommen, es existiert eine rekursive Fortsetzung f von φ, so trennt die rekursive Menge $C := \{x \mid f(x) = 0\}$ die Mengen A und B. Widerspruch! $\square$

Folgerung 12 : *Es gibt eine rekursive Funktion* h *mit* $h(x) > x$ *und* $W_{h(x)} = W_x$ *für alle* $x \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es seien A und B wie oben. Nach dem s-m-n-Theorem gibt es eine rekursive Funktion g mit

$$W_{g(x,y)} = \begin{cases} W_x & \text{, falls } y \in A \\ \{y\} & \text{, falls } y \in B \\ \emptyset & \text{, sonst;} \end{cases}$$

denn es existiert $f \in \mathbb{N}$ mit $(y \in A \wedge z \in W_x) \vee (y \in B \wedge z = y) \leftrightarrow W^3_f(z, x, y) \leftrightarrow W_{s^2_1(f,x,y)}(z)$. Setze $g(x, y) := s^2_1(f, x, y)$, dann ist g wie gewünscht.

Zwischenbehauptung: Für alle x ist $\{g(x, y) \mid y \in A\}$ unendlich.
Beweis (indirekt): Es sei $D := \{g(x, y) \mid y \in A\}$ endlich. $y \mapsto g(x, y)$ ist auf B injektiv; denn, falls $g(x, y) = g(x, y')$, dann $\{y\} = W_{g(x,y)} = W_{g(x,y')} = \{y'\}$, also $y = y'$. Folglich ist auch $E := \{y \in B \mid g(x, y) \in D\}$ endlich. Jetzt trennt $C := \{y \mid y \notin E \wedge g(x, y) \in D\}$ (rekursiv) aber A und B. Widerspruch zur Wahl von A und B !

Aus der Zwischenbehauptung folgt: Für festes x hat $W_{g(x,y)}$ unendlich viele Indizes, also hat W_x unendlich viele Indizes, nämlich die $g(x,y)$ $(y \in A)$.
Nun nehmen wir für h eine Uniformisierende von $R(x,y) :\leftrightarrow \exists z(z \in A \wedge g(x,z) = y > x)$. Warum ist h wie gewünscht? Zunächst ist h total, da, wie wir eben festgestellt haben, für festes x $g(x,\cdot)$ Werte $> x$ annimmt. Die Eigenschaft $h(x) > x$ ist klar nach der Definition von R. Weiter gilt auch $W_{h(x)} = W_x$; denn es sei $x \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt $R(x, h(x))$, da h Uniformisierende von R ist, also $\exists z_x(z_x \in A \wedge g(x,z_x) = h(x) > x)$; aber $z_x \in A$ impliziert $W_{g(x,z_x)} = W_x$ nach den Eigenschaften von g. Andererseits gilt $W_{g(x,z_x)} = W_{h(x)}$, da $g(x,z_x) = h(x)$; also $W_x = W_{h(x)}$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $\square$

§ 6 Rekursiv isomorphe rekursiv aufzaehlbare Mengen

In diesem Kapitel führen wir eine Äquivalenzrelation zwischen r.a. Mengen ein, die so beschaffen sein wird, daß alle wichtigen rekursionstheoretischen Eigenschaften invariant unter ihr sind.

Definition : *A und $B \subseteq I\!N$ heißen* **rekursiv isomorph** *(Notation: $A \equiv B$) gdw. es eine rekursive Permutation $\pi : I\!N \to I\!N$ gibt mit $A = \pi^{-1}[B] := \{x \in I\!N \mid \pi(x) \in B\}$ (also $x \in A \leftrightarrow \pi(x) \in B$). Wir schreiben dann $\pi : A \equiv B$.*

Beachte: Man kann diese Definition auch auf den n-stelligen Fall erweitern. Dies liefert jedoch nichts grundsätzlich Neues, da man den allgemeinen Fall durch Gödelisierung auf den einstelligen Fall zurückführen kann. Deshalb verzichten wir darauf.

Lemma 1 : *$\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: $id I\!N = I_1^1$ ist rekursiv, also ist $\equiv$ reflexiv. Mit π, σ ist auch $\pi \circ \sigma$ rekursiv; daraus folgt die Transitivität von $\equiv$. Schließlich ist mit π auch $\pi^{-1}(x) \simeq \mu y(\pi(y) = x)$ rekursiv, womit $\equiv$ auch symmetrisch ist. ▯

Lemma 2 : *Gilt $A \equiv B$ und ist A rekursiv (bzw. r.a., Π_1^0), dann ist auch B rekursiv (bzw. r.a., Π_1^0).*

Beweis: klar (beachte: $A \equiv B \Rightarrow I\!N \setminus A \equiv I\!N \setminus B$ vermöge desselben π). ▯

Im rekursiven Fall gibt es eine sehr einfache Charakterisierung der Relation $\equiv$:

Lemma 3 : *Es seien A und B rekursiv; dann gilt: $A \equiv B$ gdw. $|A| = |B|$ und $|I\!N \setminus A| = |I\!N \setminus B|$.*

Beweis: "$\Rightarrow$": klar, da π Bijektion von A auf B und von $I\!N \setminus A$ auf $I\!N \setminus B$ ist.
"$\Leftarrow$": Es gelte $|A| = |B|$, $]I\!N \setminus A| = |I\!N \setminus B|$. Setze

$$\pi(x) = \begin{cases} \mu y(y \in B \wedge y \notin \{\pi(0), \ldots, \pi(x-1)\}) , & \text{falls } x \in A \\ \mu y(y \notin B \wedge y \notin \{\pi(0), \ldots, \pi(x-1)\}) , & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

π ist mit Wertverlaufsrekursion und rekursiver Fallunterscheidung definiert, also rekursiv, und erfüllt offensichtlich $\pi : A \equiv B$. ▯

Nun zu einer weiteren Relation zwischen r.a. Mengen:

Definition : *Wir sagen, A ist* **1-reduzierbar** *auf B (Notation: $A \leq_1 B$) gdw. ein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, rekursiv, injektiv existiert mit $A = f^{-1}[B]$ (also: $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$). Für ein f wie angegeben schreiben wir $f : A \leq_1 B$.*

Die anschauliche Vorstellung, die man dabei hat, ist: $A \leq_1 B$ heißt, daß A mindestens genauso leicht (im angegebenen Sinn) berechenbar ist wie B. Man sieht leicht, daß $\leq_1$ transitiv und reflexiv ist.

Satz 4 (J.M. Myhill) : $A \equiv B$ *gdw.* $A \leq_1 B \leq_1 A$.

Beweis: "$\Rightarrow$": klar.
"$\Leftarrow$": Es sei $f : A \leq_1 B$ und $g : B \leq_1 A$. Wir konstruieren eine Funktion $\pi : A \equiv B$ als Vereinigung

$$\pi = \bigcup_{i \in I\!N} p_i$$

einer aufsteigenden Folge $p_0 \subset p_1 \subset p_2 \ldots$ von endlichen Injektionen $p_i : I\!N \hookrightarrow I\!N$. Dabei soll gelten

$(*)$ $\quad p_i(a) \simeq b \rightarrow$ es existiert $n \in I\!N$ mit $f(gf)^n(a) = b$ oder $g(fg)^n(b) = a$.

Diese Eigenschaft vererbt sich dann offensichtlich auf π.

Bemerkung: $(*)$ impliziert:

$(**)$ $$a \in A \longleftrightarrow b \in B$$

(und damit $x \in A \leftrightarrow \pi(x) \in B$).
Beweis: Es sei z.B. $f(gf)^n(a) = b$, dann gilt

$$a \in A \leftrightarrow f(a) \in B \leftrightarrow (gf)(a) \in A \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow (gf)^n \in A \leftrightarrow f(gf)^n \in B.$$

Fangen wir also an, die p_i wie angegeben zu konstruieren. Wir tun dies rekursiv:

Wir beginnen mit $p_0 := \emptyset$.

Es sei p_m definiert, so daß $(*)$ gilt, dann unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: m gerade.
 Es sei $a := \mu x(x \notin \text{dom}(p_m))$ (existiert, da $\text{dom}(p_m)$ endlich ist).
 Zwischenbehauptung: Es gibt ein $n \in I\!N$ mit $f(gf)^n(a) \notin \text{rng}(p_m) := \{y \mid \exists x\, p_m(x) \simeq y\}$.
 Beweis (indirekt): Sonst wäre $B' := \{f(gf)^n(a) \mid n \in I\!N\} \subseteq \text{rng}(p_m)$, also endlich, da p_m endlich ist. Ebenso wäre $A' := \{(gf)^n(a) \mid n \in I\!N\}$ endlich, da $f[A'] \subseteq B'$ und f injektiv ist. Wir erhalten sogar $|A'| = |B'|$, da auch $g[B'] \subseteq A'$ und g injektiv ist. Wir zeigen nun, daß aus $b' \in B'$ die Aussage $p_m^{-1}(b') =: a' \in A'$ folgt: Nach Induktionvoraussetzung existiert entweder ein $n \in I\!N$ mit $g(fg)^n(b') = a'$ – dann gilt aber $a' \in A'$ nach Definition von A' und wir sind fertig – oder es existiert ein $n \in I\!N$ mit $f(gf)^n(a') = b'$; dann existiert andererseits aber auch ein $k \geq n$ mit $f(gf)^k(a) = b' \in B$, woraus $a' = (gf)^{k-n}(a)$ folgt; also gilt auch in diesem Fall $a' \in A'$ (nach Definition von A'). Hieraus folgt nun aber $|A'| \geq |A' \cap \text{dom}(p_m)| \geq |B'| = |A'|$, also $|A'| = |A' \cap \text{dom}(p_m)|$. Wegen der

Endlichkeit von A' haben wir damit $(a \in)A' \subseteq \mathrm{dom}(p_m)$, im Widerspruch zur Wahl von a ! Damit ist unsere Zwischenbehauptung bewiesen.
Wähle nun n minimal mit $b := f(gf)^n(a) \notin \mathrm{rng}(p_m)$ und setze $p_{m+1} := p_m \cup \{(a,b)\}$.

2. Fall: m ungerade
Setze analog $b := \mu x(x \notin \mathrm{rng}(p_m))$, $n := \mu k(g(fg)^k(b) \notin \mathrm{dom}(p_m))$, $a := g(fg)^n(b)$ und $p_{m+1} := p_m \cup \{(a,b)\}$.

Die p_i sind dann offenbar wie gewünscht.

Unsere Funktion $\pi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} p_i$ ist nach Konstruktion auf ganz $\mathbb{N}$ definiert und ist injektiv, weil alle p_i injektiv sind. Außerdem haben wir $(**)$, also $A = \pi^{-1}[B]$. Es bleibt noch zu zeigen, daß π rekursiv ist. Anschaulich ist aus unserer Konstruktion klar, daß π berechenbar und damit (Churchs These) rekursiv ist. Um einen genauen Beweis zu geben, müssen wir jedoch eine Darstellung von π angeben, die zeigt, daß π rekursiv ist. Da dies technisch ist, aber von der Idee her nichts Neues bringt, sei dies dem Leser als <u>Übung 1</u> überlassen. (Hinweis: Definiere rekursive Funktionen α, β und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(i) = \langle \alpha(i), \beta(i) \rangle$, so daß $p_{n+1} = p_n \cup \{\langle \alpha(n), \beta(n) \rangle\}$, und setze $\pi(a) := (f(\mu i(\alpha(i) = a)))_1$.) ▯

Im Zusammenhang mit der 1-Reduzierbarkeit nun ein weiterer Begriff:

Definition : *A heißt* **vollständig** *gdw. A r.a. ist und alle r.a. B 1-reduzierbar auf A sind, d.h. wenn $B \le_1 A$ für alle r.a. B gilt.*

Bemerkung :
a) Wenn A r.a. ist und $B \le_1 A$, so ist auch B r.a.
b) Wenn A vollständig ist, so ist A nicht rekursiv.

BEWEIS:
a) Wenn A r.a. und $x \in B \leftrightarrow f(x) \in A$, dann ist B r.a. nach § 5, Lemma 1b).
b) Wähle ein r.a., aber nicht rekursives B. Falls A vollständig ist, existiert ein $f : B \le_1 A$. Es gilt dann $x \in B \leftrightarrow f(x) \in A$. Wäre A rekursiv, dann auch B. Widerspruch zur Wahl von B ! ▯

BEISPIEL: $U := \{x \mid (x)_0 \in W_{(x)_1}\}$ ist vollständig, denn falls B r.a. ist, existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $B = W_e$; dann gilt $B \le_1 U$ via $\pi : x \mapsto \langle x, e \rangle$.

Folgerung 5 : *Alle vollständigen Mengen sind rekursiv isomorph.*

BEWEIS: Sind A und B vollständig, dann gilt nach a) $A \le_1 B \le_1 A$, also (mit dem Satz von Myhill) $A \equiv B$. ▯

Die vollständigen Mengen liegen also alle in einer Äquivalenzklasse von $\equiv$. Man sieht auch leicht (mit Transitivität von $\leq_1$), daß überhaupt alle Mengen in dieser Äquivalenzklasse, also alle zu einer vollständigen Menge rekursiv isomorphen Mengen, vollständig sind.

Weitere neue Begriffe:

Definition :

a) Eine Menge A heißt **kreativ** *gdw. A r.a. ist und es eine partiell rekursive Funktion φ gibt*

mit

$$A \cap W_e = \emptyset \implies \varphi(e)\downarrow \wedge\, \varphi(e) \notin A \cup W_e.$$

Ein solches φ heißt **produktiv** *für A.*

b) A heißt **m-reduzierbar** *auf B, geschrieben $A \leq_m B$, wenn es ein rekursives $f : I\!N \to I\!N$*

gibt mit $A = f^{-1}[B]$. (f braucht also nicht injektiv zu sein.) Wir schreiben dann auch

$f : A \leq_m B$.

c) Eine Menge A heißt **m-vollständig** *gdw. A r.a. ist und alle r.a. B auf A m-reduzierbar*

sind.

Bemerkungen :

a) Ein kreatives A ist nicht rekursiv.

b) $K := \{x \mid x \in W_x\}$ ist kreativ mit produktiver Funktion $id_{I\!N}$.

c) $A_1 := \{x \mid W_x \neq \emptyset\}$ und $A_2 := \{x \mid 17 \in W_x\}$ sind m-vollständig.

Beweis:

a) Sonst wäre $I\!N \setminus A$ r.a. (sogar rekursiv); offenbar ist für kein $e \in I\!N$ aber $I\!N \setminus A = W_e$ (d.h. kreativ = auf effektive Weise nicht rekursiv).

b) klar nach Definition.

c) Wenn B r.a. ist, wähle h rekursiv mit $W_{h(x)}(y) \leftrightarrow x \in B$ für alle y (mit *s-m-n*-Theorem). Dann gilt $h : B \leq_m \{x \mid W_x \neq \emptyset\}$ und $h : B \leq_m \{x \mid 17 \in W_x\}$ (z.B.: $x \in B \leftrightarrow W_{h(x)} = I\!N \leftrightarrow h(x) \in A_1 \leftrightarrow x \in h^{-1}[A_1]$). ▯

Satz 6 : *Für $A \subseteq I\!N$ sind äquivalent:*

a) A ist kreativ.

b) A ist m-vollständig.

c) A ist vollständig.

BEWEIS:
c) $\Rightarrow$ b) ist klar.
b) $\Rightarrow$ a): Es sei A m-vollständig und B kreativ (z.B. $= K$) mit produktiver Funktion φ. Da B insbesondere r.a. ist, existiert ein $f : B \leq_m A$. Wähle mit dem s-m-n-Theorem ein rekursives h mit $W_{h(e)} = f^{-1}[W_e]$. Dann ist $f \circ \varphi \circ h$ produktive Funktion von A. Denn aus $W_e \cap A = \emptyset$ folgt $f^{-1}[W_e] \cap B = W_{h(e)} \cap B = \emptyset$, also $\varphi(h(e)) \downarrow$ und $\varphi(h(e)) \notin W_{h(e)} \cup B$, daher $f(\varphi(h(e))) \notin W_e \cup A$.
a) $\Rightarrow$ b): Es sei φ produktive Funktion von A, und B sei r.a.

Zwischenbehauptung 1: Es gibt eine rekursive Funktion h mit

$$W_{h(x)} = \begin{cases} \{\varphi(h(x))\} & \text{, falls } x \in B \\ \emptyset & \text{, falls } x \notin B, \end{cases}$$

wobei $\{\varphi(a)\} = \emptyset$, falls $\varphi(a) \uparrow$.
Beweis: Wähle e so, daß $W_e^3(y, z, x) \leftrightarrow \varphi(z) \simeq y \wedge x \in B$. Es gilt nach dem s-m-n-Theorem: $W_e^3(y, z, x) \leftrightarrow W_{s_1^2(e,z,x)}(y)$. Nochmals nach dem s-m-n-Theorem gibt es ein rekursives g mit $s_1^2(e, z, x) \simeq \varphi^1_{g(x)}(z)$. Nun sei s wie im Rekursionssatz für r.a. Mengen, also $W_{s(f)}(y) \leftrightarrow \varphi^1_f(s(f)) \downarrow \ \wedge W_{\varphi_f(s(f))}(y)$. Dann gilt $W_{s(g(x))}(y) \leftrightarrow W_{\varphi^1_{g(x)}(s(g(x)))}(y)$. Setze nun $h(x) := s(g(x))$, dann gilt insgesamt

$$W_{h(x)}(y) \leftrightarrow W_e^3(y, \varphi(h(x)), x) \leftrightarrow \varphi(h(x)) \simeq y \wedge x \in B.$$

Damit ist die Zwischenbehauptung 1 bewiesen.

Jetzt gilt $f : B \leq_m A$ via $f := \varphi \circ h$.
Beweis: Wenn $x \notin B$, dann ist $W_{h(x)} = \emptyset$, also $\varphi(h(x)) \downarrow$ und $\varphi(h(x)) \notin A (\cup W_{h(x)})$, da φ produktive Funktion von A ist. Wenn $x \in B$, dann ist $W_{h(x)} = \{\varphi(h(x))\}$. Wäre $A \cap W_{h(x)} = \emptyset$, so wäre $\varphi(h(x)) \downarrow$ und $\varphi(h(x)) \notin W_{h(x)} (\cup A)$. Widerspruch! Also ist $A \cap \{\varphi(h(x))\} \neq \emptyset$, d.h. $\varphi(h(x)) \downarrow$ und $\varphi(h(x)) \in A$. Damit gilt aber $f^{-1}[A] = (\varphi \circ h)^{-1}(A) = B$. f ist natürlich auch rekursiv, da φ und h es sind.
b) $\Rightarrow$ c): Es sei A m-vollständig. Wir setzen $D_x := \{i \mid \epsilon_i = 1\} = \{x_0, \ldots, x_n\}$, wenn $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\epsilon_i \cdot 2^i)$, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ (also $x_0 < \ldots < x_n$). (Vergleiche § 3, Übung 1.)

Zwischenbehauptung 2: Es gibt eine rekursive Funktion g mit

$$\begin{array}{l} D_x \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow g(x) \in A \setminus D_x \\ D_x \cap A = \emptyset \Longrightarrow g(x) \notin A \cup D_x \end{array}$$

Beweis: Es sei $f : K \leq_m A$, und $i \mapsto a_i$ sei eine rekursive Aufzählung von A, d.h. $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ (beachte: A unendlich, da A kreativ, also nicht rekursiv; vgl. auch

§ 5, Lemma 2). Es sei weiter h rekursiv mit

$$W_{h(x)} = \begin{cases} f^{-1}[D_x] & \text{, falls } D_x \cap A = \emptyset \\ I\!N & \text{, sonst,} \end{cases}$$

also $W_{h(x)} = \{y \mid f(y) \in D_x \vee \exists z \in D_x \cap A(x)\}$ (mit s-m-n-Theorem wie oben). Setze

$$g(x) := \begin{cases} f(h(x)) & \text{, wenn } f(h(x)) \notin D_x \\ a_{i_0}(\in A), \text{ wobei } i_0 = \mu i(a_i \notin D_x) & \text{, wenn } f(h(x)) \in D_x. \end{cases}$$

Dann gilt auf jeden Fall $g(x) \notin D_x$. Außerdem gilt: Wenn $D_x \cap A \neq \emptyset$, dann $W_{h(x)} = I\!N$, also $h(x) \in K$, daher $f(h(x)) \in A$, folglich $g(x) \in A \setminus D_x$. Wenn $D_x \cap A = \emptyset$, dann $W_{h(x)} = f^{-1}(D_x)$. Es gilt außerdem: Aus $h(x) \in K$ folgt $f(h(x)) \in D_x$, was nicht sein kann; also $h(x) \notin K$. Aus $f(h(x)) \notin D_x$ und $f(h(x)) \notin A$ (da $h(x) \notin K$) folgt nun aber $g(x) \notin A \cup D_x$. Damit ist Zwischenbehauptung 2 bewiesen.

Wir definieren jetzt induktiv eine Funktion $\bar{g}(y, x)$ durch

$$\bar{g}(y, x) := g(2^y + \sum_{i<x} 2^{\bar{g}(y,i)}).$$

$\bar{g}$ ist rekursiv (Wertverlaufsrekursion), und es gilt (i): Für alle y ist die Abbildung $x \mapsto g(y, x)$ injektiv; und (ii): $y \in A \leftrightarrow \bar{g}(y, x) \in A$ für alle $x \in I\!N$. Zu (i): Man kann leicht durch Induktion über x zeigen, daß $\bar{g}(y, x) \notin \{y, \bar{g}(y, 0), \ldots, \bar{g}(y, x-1)\}$. Zu (ii): Ebenso kann man leicht durch Induktion über y zeigen, daß $y \in A \leftrightarrow \bar{g}(y, x) \in A$. Daraus folgt jeweils die Behauptung.

Wenn nun $f : B \leq_m A$, so gilt $f' : B \leq_1 A$ für

$$f'(x) := \bar{g}(f(x), \mu z \bar{g}(f(x), z) \notin \{f'(0), \ldots, f'(x-1)\})$$

(wieder Wertverlaufsrekursion). f' ist injektiv nach Konstruktion. Und $\bar{g}$ “respektiert A”, also
$f' : B \leq_1 A$. Damit ist der Satz bewiesen. ▯

Folgerung 7 : *Alle kreativen, alle m-vollständigen und alle vollständigen Mengen sind rekursiv isomorph.*

Beweis: klar mit Folgerung 5 und Satz 6. ▯

Folgerung 8 : *Wenn A kreativ ist, dann gibt es eine rekursive Funktion f mit*

$$f(e) \in (A \cap W_e) \cup (I\!N \setminus (A \cup W_e)).$$

BEWEIS: K hat diese Eigenschaft ($f = id$). Wenn $\pi : K \equiv A$ und h rekursive Funktion mit $W_{h(e)} = \pi^{-1}[W_e]$, dann setze $f(e) := \pi(h(e))$. f ist wie gewünscht, denn es gilt:

$\pi(h(e)) \in A \leftrightarrow h(e) \in \pi^{-1}[A] = K \leftrightarrow h(e) \in W_{h(e)} = \pi^{-1}[W_e] \leftrightarrow \pi(h(e)) \in W_e$. ∎

Übung 2: A heißt **Zylinder**, wenn es eine rekursive Funktion $g(y,x)$ gibt mit den Eigenschaften: (i) $x \mapsto g(y,x)$ ist injektiv für alle y und (ii): $y \in A \leftrightarrow g(y,x) \in A$.
Zeige: a) A ist Zylinder gdw. $\forall B(B \leq_m A \to B \leq_1 A)$

b) Zu jedem A gibt es einen Zylinder A' mit $A \leq_m A' \leq_m A$.

c) A' ist bis auf $\equiv$ eindeutig bestimmt (:= die **Zylindrifizierung** von A).

(Hinweis: $A' = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A\}$) (Vollständige Mengen sind Zylinder.)

Gibt es r.a. Mengen, die weder rekursiv noch kreativ (vollständig) sind? Zur Beantwortung dieser Frage ist der folgende Begriff nützlich:

Definition : *Eine Menge A heißt* **simpel** *(englisch: simple) gdw. A r.a. und $\mathbb{N} \setminus A$ unendlich ist, aber keine unendliche r.a. Teilmenge enthält.*

Bemerkungen:
a) Simple Mengen sind nicht rekursiv.
b) Kreative (oder vollständige) Mengen A sind nicht simpel.

Beweis:
a) klar, da sonst $\mathbb{N} \setminus A$ r.a. wäre.
b) Wenn A kreativ ist, dann ist A vollständig, also existiert insbesondere ein f : $\emptyset \leq_1 A$. $f[\mathbb{N}]$ ist unendliche r.a. Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus A$; also ist A nicht simpel. $\square$

Satz 9 : *Es gibt simple Mengen.*

Beweis: φ uniformisiere die r.a. Menge $\{(x,y) \mid y \in W_x \wedge y > 2x\}$. Dann ist $\mathrm{rng}(\varphi) = \{y \mid \exists x \varphi(x) \simeq y\}$ simpel. Denn es gilt $|\mathrm{rng}(\varphi) \cap \{0,1,\ldots,2x+1\}| \leq x+1$, also ist $\mathbb{N} \setminus \mathrm{rng}(\varphi)$ unendlich. Außerdem gilt: Falls W_e unendlich ist, dann gilt $e \in \mathrm{dom}(\varphi)$ (W_e enthält genügend große y); also $\varphi(e) \in W_e$; und damit kann nicht $W_e \subseteq \mathbb{N} \setminus \mathrm{rng}(\varphi)$ gelten. $\mathbb{N} \setminus \mathrm{rng}(\varphi)$ enthält also keine unendliche r.a. Teilmenge W_e. Offensichtlich ist $\mathrm{rng}(\varphi)$ r.a., also insgesamt simpel. $\square$

Übung 3: Wenn $A \leq_1 B$ und B simpel ist, dann ist A rekursiv oder simpel.

Übung 4: Es sei A simpel. Dann ist die Menge $\{2x \mid x \in A\}$ r.a., nicht rekursiv, nicht simpel und nicht vollständig.

Übung 5: Es sei A r.a. und nicht rekursiv. Wähle f rekursiv und injektiv mit $A = f[\mathbb{N}]$. Dann ist $D := \{x \mid \exists y > x\ [f(y) < f(x)]\}$ simpel. (Hinweis: Hätte $\mathbb{N} \setminus D$ eine unendliche r.a. Teilmenge, dann wäre $\mathbb{N} \setminus A$ r.a.)

§ 7 Die arithmetische Hierarchie

Wir definieren als Verallgemeinerung unserer früheren Definition von Σ_1^0 und Π_1^0 rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

Definition (die arithmetische Hierarchie):

Die kleinste Klasse von Mengen, die die rekursiven Mengen umfaßt und unter Quantifizierung abgeschlossen ist, nennen wir die Klasse der **arithmetischen Mengen**. *Außerdem definieren wir:*

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0^0 &:= \Pi_0^0 := \textit{ Klasse der rekursiven Mengen} \\
\Sigma_{n+1}^0 &:= \{S \subset \mathbb{N}^m \mid S(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)\,, \textit{ mit } P \in \Pi_n^0, m \in \mathbb{N}\} \\
\Pi_{n+1}^0 &:= \{P \subset \mathbb{N}^m \mid P(\vec{x}) \leftrightarrow \forall y S(\vec{x}, y)\,, \textit{ mit } S \in \Sigma_n^0, m \in \mathbb{N}\} \\
\Delta_n^0 &:= \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0 \\
\Delta_\omega^0 &:= \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n^0
\end{aligned}
$$

Es wird sich zeigen, daß die Klasse der arithmetischen Mengen gerade die Klasse Δ_ω^0 ist (mit Satz 1 und Lemma 2). Der Name "arithmetische Mengen" findet seine Rechtfertigung am Ende des Kapitels.

Aus dem bisherigen ist klar:

$\Sigma_1^0 =$ Klasse der r.a. Mengen

$\Pi_1^0 =$ Klasse der Mengen, deren Komplement r.a. ist

$\Delta_1^0 = \Sigma_0^0 = \Pi_0^0$ (da gilt: A rekursiv $\Leftrightarrow$ A r.a. und $\mathbb{N} \setminus A$ r.a.)

Außerdem (mit Induktion) :

Eine Σ_n^0-Menge S hat die Form : $S(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots, Q y_n R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_n)$, R rekursiv.

Eine Π_n^0-Menge P hat die Form : $P(\vec{x}) \leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots Q y_n R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_n)$, R rekursiv

(wobei $Q \in \{\forall, \exists\}$).

Satz 1 (Abgeschlossenheitseigenschaften) :

a) $A \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right) \Longleftrightarrow \neg A \in \Pi_n^0 \left(\Sigma_n^0\right)$

b) $A(\vec{x}, y) \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right)$, *f rekursiv* $\Longrightarrow A(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right)$

c) $A, B \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right) \Longrightarrow A \vee B,\ A \wedge B \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right)$

d) $A(\vec{x}, y) \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right) \Longrightarrow \exists y A(\vec{x}, y) \in \Sigma_n^0 \left(\forall y A(\vec{x}, y) \in \Pi_n^0\right) \quad (n > 0)$

e) $A(\vec{x}, y) \in \Sigma_n^0 \left(\Pi_n^0\right) \Longrightarrow \forall z < y A(\vec{x}, z) \in \Sigma_n^0 \left(\exists z < y A(\vec{x}, z) \in \Pi_n^0\right)$

BEWEIS (wie für r.a. Mengen) :
a) Es sei $A \in \Sigma_n^0$ mit $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y_1 \dots Q y_n R(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)$ (Π_n^0-Fall analog), dann gilt

$$\neg A(\vec{x}) \longleftrightarrow \forall y_1 \dots \overline{Q} y_n \underbrace{\neg R(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)}_{\text{rekursiv}}$$

mit

$$\overline{Q} = \begin{cases} \forall \text{ , falls } Q = \exists \\ \exists \text{ , falls } Q = \forall. \end{cases}$$

b) Es sei $A \in \Sigma_n^0$ mit $A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists y_1 \dots Q y_n R(\vec{x}, y, y_1, \dots, y_n)$ und f rekursiv, dann gilt

$$A(\vec{x}, f(\vec{x})) \longleftrightarrow \exists y_1 \dots Q y_n \underbrace{R(\vec{x}, f(\vec{x}), y_1, \dots, y_n)}_{\text{rekursiv}}.$$

c) Induktion über n, simultan für Σ_n^0 und Π_n^0 :
$n = 0$: bekannt.
$n \to n+1$: Es seien A, B $\in \Sigma_{n+1}^0$ mit $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y A'(\vec{x}, y)$ und $B(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y B'(\vec{x}, y)$, A', $B' \in \Pi_n^0$, dann gilt

$$A \wedge B(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y (\underbrace{A'(\vec{x}, (y)_0) \wedge B'(\vec{x}, (y)_1)}_{\in \Pi_n^0 \text{ (Ind.-Ann. und b))}}) \quad \text{und} \quad A \vee B(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y (\underbrace{A'(\vec{x}, y) \vee B'(\vec{x}, y)}_{\in \Pi_n^0 \text{ (Ind.-Ann.)}}).$$

Der Π_{n+1}^0-Fall folgt daraus mit a).
d) Es sei $A \in \Sigma_n^0$ mit $A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z A'(\vec{x}, y, z), A' \in \Pi_{n-1}^0$ (Π_n^0-Fall analog), dann gilt

$$\exists y A(\vec{x}, y) \longleftrightarrow \exists u (\underbrace{A'(\vec{x}, (u)_0, (u)_1)}_{\in \Pi_{n-1}^0 \text{ (mit b))}}).$$

e) Es sei $A \in \Sigma_{n+1}^0$ mit $A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists w A'(\vec{x}, y, w)$, $A' \in \Pi_n^0$, (Π_{n+1}^0-Fall analog), dann gilt

$$\forall z < y A(\vec{x}, z) \longleftrightarrow \forall z < y \exists w A'(\vec{x}, z, w) \longleftrightarrow \exists u \underbrace{\forall z (z < y \to A'(\vec{x}, z, (u)_z)}_{\substack{\in \Pi_n^0 \text{ (mit b), c) und d)} \\ \text{bzw. Fall } n = 0)}}.$$

$\square$

Es liegt folgende Situation vor, wobei die Pfeile echte Inklusionen bedeuten:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\Sigma_0^0 & & & & \Sigma_1^0 & & & & \Sigma_2^0 & & \dots & & \\
\| & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
\Delta_0^0 & = & \Delta_1^0 & & & & \Delta_2^0 & & & & \Delta_3^0 & & \dots \\
\| & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
\Pi_0^0 & & & & \Pi_1^0 & & & & \Pi_2^0 & & \dots & &
\end{array}
$$

Den Beweis hierfür liefern Schritt für Schritt die folgenden Lemmata und Sätze (bis Folgerung 5).

Lemma 2 : $\Sigma_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$, $\Pi_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0$

Beweis (Einführung blinder Variabler):
Es sei $A \in \Sigma_n^0$ mit $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y_1 \dots Qy_n R(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)$, R rekursiv ($\Pi_n^0$-Fall analog), dann gilt

$$A(\vec{x}) \leftrightarrow \underbrace{\forall y_0 \exists y_1 \dots Qy_n R(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)}_{\in \Pi_{n+1}^0} \quad \text{und} \quad A(\vec{x}) \leftrightarrow \underbrace{\exists y_1 \dots Qy_n \overline{Q} y_{n+1} R(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)}_{\in \Sigma_{n+1}^0}$$

($\overline{Q}$ wie oben), also $A \in \Delta_{n+1}^0$. ▯

Lemma 3 : *Für alle $n > 0$, $m > 0$ gibt es eine* **universelle** Σ_n^0**-Relation** $U_n^m \subset I\!N^{m+1}$, *d.h.* $U_n^m \in \Sigma_n^0$ *und für alle* $S \subseteq I\!N^m$ *aus* Σ_n^0 *gibt es ein* $e \in I\!N$ *mit* $S(\vec{x}) \leftrightarrow U_n^m(e, \vec{x})$. *e heißt ein* Σ_n^0**-Index** *von S. Analog existiert eine* **universelle** Π_n^0**-Relation** V_n^m *für alle* $n > 0$ *und* $m > 0$.

Beweis: Wir benutzen den entsprechenden Satz für r.a. Relationen aus § 5 (Satz 5), der uns für alle $k \in I\!N$ eine universelle r.a. Relation W^k liefert, und setzen

$$U_n^m(e, \vec{x}) :\longleftrightarrow \exists y_1 \dots \overline{Q} y_{n-1} (\neg) W^{m+n-1}(e, \vec{x}, y_1, \dots, y_{n-1}) \qquad (\longleftrightarrow \exists y_1 \dots Qy_n (\neg) T^{m+n-1}(e, \vec{x}, y_1, \dots, y_n))$$

(T^l ist das in §3, Folgerung 10 eingeführte Kleene-Prädikat), wobei das Negationszeichen gesetzt wird, falls n gerade ist, d.h. falls $\overline{Q} = \exists$, sonst nicht. U_n^m ist dann wie gewünscht. ▯

Bemerkung : Für $n = 0$ ist dies falsch, d.h. es gibt keine universelle rekursive Menge.

Beweis: Angenommen, $U(x, z, \vec{y})$ wäre universelle rekursive Relation, dann wäre auch $\neg U(x, x, \vec{y})$ rekursiv in x und $\vec{y}$, also existierte ein $e \in I\!N$ mit $\neg U(x, x, \vec{y}) \leftrightarrow U(e, x, \vec{y})$. Widerspruch für $x = e$! ▯

Folgerung 4 (Hierarchiesatz) :

a) Für alle $n > 0$ gibt es eine Σ^0_n-Menge S, die keine Π^0_n-Menge ist; d.h. es gilt $\Delta^0_n \subsetneqq \Sigma^0_n$.

b) Für alle $n > 0$ gibt es eine Π^0_n-Menge P, die keine Σ^0_n-Menge ist; d.h. es gilt $\Delta^0_n \subsetneqq \Pi^0_n$.

BEWEIS:

a) Es sei $U^1_n \in \Sigma^0_n$ wie in Lemma 3; wir betrachten $S(x) :\leftrightarrow U^1_n(x,x)$. S ist nach Satz 1b) in Σ^0_n; wäre S auch in Π^0_n, dann hätten wir $\neg S \in \Sigma^0_n$ und ein $e \in \mathbb{N}$ mit $\neg S(x) \leftrightarrow U^1_n(e,x)$, was aber einen Widerspruch für $x = e$ ergibt!

b) Mit dem S aus a) erhalten wir dual dazu für $P := \mathbb{N} \setminus S$: $P \in \Pi^0_n \setminus \Sigma^0_n$. $\Box$

<u>Übung 1:</u> Für jedes $S \in \Sigma^0_n \setminus \Pi^0_n$ gilt: $\{2x \mid x \in S\} \cup \{2x+1 \mid x \notin S\} \in \Delta^0_{n+1} \setminus (\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n)$.

Folgerung 5 : $\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n \subsetneqq \Delta^0_{n+1}$.

BEISPIELE :

1) Tot $:= \{e \mid \varphi^1_e \text{ total}\} \in \Pi^0_2$, denn

$$\varphi^1_e \text{ total} \longleftrightarrow \underbrace{\forall x \exists y [\underbrace{\varphi^1_e(x) \simeq y}_{\Sigma^0_1}]}_{\Pi^0_2}.$$

2) $\{(e,f) \mid \varphi^1_e = \varphi^1_f\} \in \Pi^0_2$, denn

$$\begin{aligned} \varphi^1_e = \varphi^1_f &\longleftrightarrow \forall x \forall y (\varphi^1_e(x) \simeq y \leftrightarrow \varphi^1_f(x) \simeq y) \\ &\longleftrightarrow \underbrace{\forall x \forall y [\underbrace{(\varphi^1_e \simeq y \wedge \varphi^1_f \simeq y)}_{\Sigma^0_1} \vee \underbrace{(\neg(\varphi^1_e(x) \simeq y) \wedge \neg(\varphi^1_f(x) \simeq y))}_{\Pi^0_1}]}_{\Pi^0_2}. \end{aligned}$$

3) $\{e \mid W^1_e \text{ rekursiv}\} \in \Sigma^0_3$, denn

$$W^1_e \text{ rekursiv} \longleftrightarrow \exists f (W^1_f = \mathbb{N} \setminus W^1_e) \longleftrightarrow \underbrace{\exists f \forall x [\underbrace{(x \in W^1_e \wedge x \notin W^1_f)}_{\Pi^0_2} \vee \underbrace{(x \notin W^1_e \wedge x \in W^1_f)}_{\Pi^0_2}]}_{\Sigma^0_3}.$$

4) Fin $:= \{e \mid W^1_e \text{ endlich}\} \in \Sigma^0_2$, denn

$$W^1_e \text{ endlich} \longleftrightarrow \underbrace{\exists x \forall y > x \underbrace{\neg W^1_e(y)}_{\Pi^0_1}}_{\Sigma^0_2}.$$

Die Frage liegt nahe, ob die Klassifizierung der Mengen in unseren Beispielen optimal ist. Für ihre Beantwortung führen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der Vollständigkeit ein.

Definition : *$A \subseteq I\!N$ heißt $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$*-**vollständig**, *wenn $A \in \Sigma^0_n(\Pi^0_n)$ und $B \leq_1 A$ für alle $B \in \Sigma^0_n(\Pi^0_n)$. (Wie früher beschränken wir uns auf den einstelligen Fall, d.h. $A, B \subseteq I\!N$.)*
Entsprechend: $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-**m-vollständig** *(ersetze $\leq_1$ durch $\leq_m$).*

Bemerkung :
a) Σ^0_1-vollständig = vollständig
b) A Σ^0_n-vollständig $\Longleftrightarrow \neg A$ Π^0_n-vollständig
c) A $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-vollständig und $n > 0 \Longrightarrow A \notin \Pi^0_n(\Sigma^0_n)$

Beweis:
a) klar.
b) klar mit $f : B \leq_1 A \Longleftrightarrow f : \neg B \leq_1 \neg A$.
c) Es sei $B \in \Sigma^0_n \setminus \Pi^0_n$ (aus dem Hierarchiesatz). Angenommen $A \in \Pi^0_n$, dann hätte man auch $B \in \Pi^0_n$, da $B \leq_1 A$. Widerspruch zur Wahl von B! ▯

Satz 6 : *Bis auf rekursive Isomorphie gibt es genau eine Σ^0_n-vollständige Menge $A \subset I\!N$ für jedes $n \geq 1$. (Dasselbe gilt für Π^0_n.)*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt wie früher aus dem Satz von Myhill. Zur Existenz: U^1_n sei Σ^0_n-universell, dann ist $A(x) :\leftrightarrow U^1_n((x)_0, (x)_1)$ Σ^0_n-vollständig. Denn falls $B \in \Sigma^0_n$ und $B(x) \leftrightarrow U^1_n(e, x)$ für ein $e \in I\!N$, dann gilt $B \leq_1 A$ via $x \mapsto \langle e, x\rangle$. ▯

Beispiele :

1) Tot ist Π^0_2-vollständig.
Beweis: Wir wissen schon: Tot $\in \Pi^0_2$. Es sei nun $B \in \Pi^0_2$ mit $B(x) \leftrightarrow \forall z S(x, z)$, $S \in \Sigma^0_1$. Wir definieren f durch $f(x, z) \simeq y :\leftrightarrow y = 1 \wedge S(x, z)$, dann gilt $f(x, z) \simeq \varphi^1_e(x, z)$ für ein $e \in I\!N$. Nun wählen wir mit dem *s-m-n*-Theorem ein rekursives, injektives g mit $\varphi^1_e(x, z) \simeq \varphi^1_{g(x)}(z)$. Damit erhalten wir $B(x) \leftrightarrow \forall z S(x, z) \leftrightarrow \varphi^1_{g(x)}$ total $\leftrightarrow g(x) \in$ Tot; also $g : B \leq_1$ Tot.

2) Fin ist Σ^0_2-vollständig.
Beweis: Wir wissen schon: Fin $\in \Sigma^0_2$. Es sei $B \in \Sigma^0_2$ mit $B(x) \leftrightarrow \exists y A(x, y)$. Ähnlich wie oben wählen wir nun ein rekursives, injektives g mit $W_{g(x)}(n) \leftrightarrow \forall y \leq n \neg A(x, y)$ (also $W_{g(x)}$ endlich $\leftrightarrow \exists y A(x, y)$). Dann gilt $B(x) \leftrightarrow \exists y A(x, y) \leftrightarrow W_{g(x)}$ endlich $\leftrightarrow g(x) \in$ Fin; also $g : B \leq_1$ Fin.

Bemerkung (ohne Beweis) : Σ_3^0-vollständige Mengen sind: $\{e \mid W_e \text{ rekursiv}\}$, $\{e \mid W_e \text{ kofinit}\}$, $\{e \mid W_e \text{ kreativ}\}$. Die Menge $\{e \mid W_e \text{ simpel}\}$ ist Π_3^0-vollständig.

Nun wollen wir auch die Sätze über Uniformisierung, Reduktion und Separation von den r.a. Mengen auf die ganze arithmetische Hierarchie übertragen:

Definition : *Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^m \hookrightarrow \mathbb{N}$ heißt* **partielle $\Sigma_n^0(\Pi_n^0)$-Funktion** *(Notation: $f \in \Sigma_n^0(\Pi_n^0)$) gdw. der Graph von f, d.h. die durch $f(\vec{x}) \simeq y$ definierte Relation, aus Σ_n^0 ist.*

Bemerkung :
a) f partiell rekursiv $\Longleftrightarrow f \in \Sigma_1^0$
b) $f \in \Sigma_n^0$ und total $\Longrightarrow f \in \Delta_n^0$

BEWEIS:
a) klar.
b) Es sei $f \in \Sigma_n^0$ und total, dann gilt $f(\vec{x}) = y \longleftrightarrow \underbrace{\forall z\{z = y \vee \neg(f(\vec{x}) = z)\}}_{\Pi_n^0}$. ∎

Satz 7 (Uniformisierungssatz für Σ_n^0-Relationen, $n > 0$) :
Jede Σ_n^0-Relation S läßt sich durch eine partielle Σ_n^0-Funktion uniformisieren.

BEWEIS: $S \subseteq \mathbb{N}^{m+1}$ sei Σ_n^0-Relation mit $S(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z P(\vec{x}, y, z), P \in \Pi_{n-1}^0$. Wir definieren
$f(\vec{x}) :\simeq (\mu w P(\vec{x}, (w)_0, (w)_1)_0$, dann gilt

$$f(\vec{x}) \simeq y \longleftrightarrow \underbrace{\exists w[P(\vec{x}, (w)_0, (w)_1) \wedge \forall u < w[\neg P(\vec{x}, (u)_0, (u)_1)] \wedge (w)_0 = y]}_{\Sigma_n^0}.$$

f ist also wie gewünscht. ∎

Wie früher beweist man damit

Folgerung 8 : *Für alle $n > 0$ gilt:*
a) Σ_n^0-Reduktion: Σ_n^0-Mengen lassen sich durch disjunkte Σ_n^0-Mengen reduzieren.

b) Π_n^0-Separation: Disjunkte Π_n^0-Mengen lassen sich durch eine Δ_n^0-Menge trennen.

c) Es gibt Π_n^0-Mengen, die nicht Π_n^0-reduzierbar sind.
d) Es gibt disjunkte Σ_n^0-Mengen, die nicht Δ_n^0-trennbar sind.

BEWEIS: <u>Übung 2.</u> ∎

Anhang: Rechtfertigung des Namens "arithmetische Hierarchie"

Wir betrachten die Sprache $L = \{0, +, \cdot, S, <\}$ und dazu die Struktur $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, 0, +, \cdot, S, <)$, also das Standard-Modell der Arithmetik, und definieren rekursiv:
a) $\exists_0 := \forall_0 :=$ die kleinste Klasse von L-Formeln, die die atomaren Formeln enthält und unter
$\neg, \vee$ und beschränkter Quantifizierung abgeschlossen ist.
b) $\exists_{n+1} := \{\exists x\varphi \mid \varphi \in \forall_n\}$,
$\forall_{n+1} := \{\forall x\varphi \mid \varphi \in \exists_n\}$.
c) $R \subset \mathbb{N}^m$ heißt $\exists_k(\forall_k)$**-definierbar**, wenn ein $\varphi \in \exists_k(\forall_k)$ existiert mit $R(\vec{n}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\vec{n})$.

Man erhält dann folgendes Ergebnis:

Satz 9 : *Für $n > 0$ gilt*
a) S ist $\exists_n$-definierbar $\Longleftrightarrow S \in \Sigma^0_n$
b) P ist $\forall_n$-definierbar $\Longleftrightarrow P \in \Pi^0_n$

(Ohne Beweis)

Daraus ist ersichtlich:

Die arithmetischen Mengen sind genau die L-definierbaren Teilmengen des Standardmodells $\mathcal{N}$ der Arithmetik.

§ 8 Relative Berechenbarkeit

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Berechenbarkeit, indem wir zusätzliche Grundfunktionen (bzw. Befehle), sogenannte "Orakel", zulassen.

Definition :

a) Es sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion (bzw. $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation). Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ heißt **RM-berechenbar in h**, *wenn es eine Registermaschine mit zusätzlichen Befehlen*

$$\boxed{h(\mathcal{R}_r)} \qquad (r < R)$$

gibt, die f berechnet (über dem Alphabet $\{|\}$). $\boxed{h(R_r)}$ wird so ausgeführt: Alle Register außer R_r bleiben unverändert; der Inhalt $|^x$ von R_r ändert sich in $|^{h(x)}$.

f heißt **RM-berechenbar in A**, *wenn f RM-berechenbar in K_A ist.*

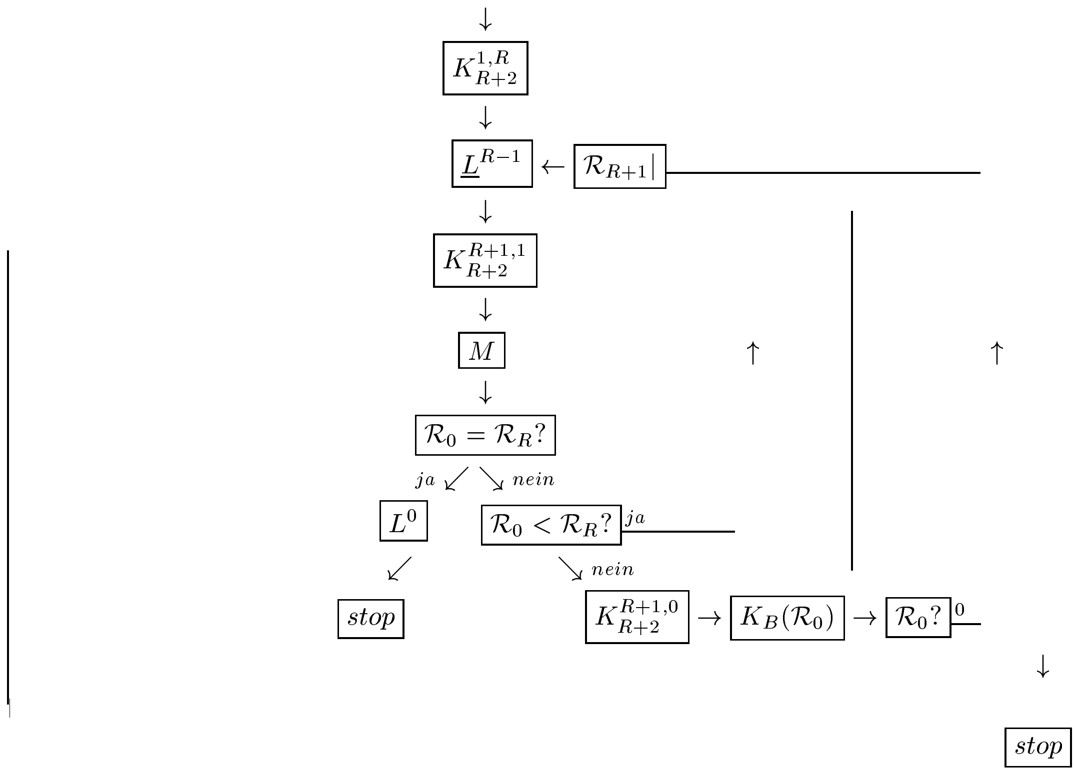
b) Eine Relation B heißt **RM-berechenbar in h** *(bzw.* **in A***), wenn K_B RM-berechenbar in h (bzw. in K_A) ist.*

BEISPIEL : f sei eine rekursive und injektive Funktion. Dann ist $A := \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ RM-berechenbar in $B := \{x \mid \exists y > x[f(y) < f(x)]\}$; und B ist RM-berechenbar in A.

Beweis: Zuerst zu "A RM-berechenbar in B". Wie man sich leicht klarmacht, gilt

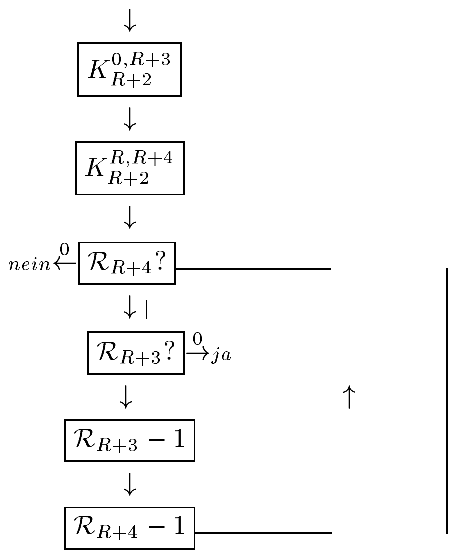
$$y \notin A \longleftrightarrow \exists x(x \notin B \wedge y \notin \{f(0), \ldots , f(x)\} \wedge y \leq f(x))$$

Daraus folgt die Behauptung, wie man ausführlich so sieht: Es werde f von der Maschine M mit R Registern berechnet. Dann wird K_A von der folgenden Maschine berechnet:


$K^{1,R}_{R+2}$
$\underline{L}^{R-1}$
$\mathcal{R}_{R+1}|$
$K^{R+1,1}_{R+2}$
M
$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_R?$
ja
nein
L^0
$\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_R?$
ja
nein
stop
$K^{R+1,0}_{R+2}$
$K_B(\mathcal{R}_0)$
$\mathcal{R}_0?$
0
stop

Dabei ist z.B. $\boxed{\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_R ?}$ die "Maschine":

nein↙ ↘*ja*



Zur zweiten Hälfte: "B RM-berechenbar in A". Dies folgt analog aus

$$x \notin B \longleftrightarrow \{f(0), \ldots, f(x)\} = A \cap \{0, 1, \ldots, f(x)\}.$$

Parallel zum bisherigen relativieren wir jetzt den Begriff der Rekursivität:

Definition :

a) Es sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion (bzw. $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation).

Dann heißt $f : \mathbb{N}^n \hookrightarrow \mathbb{N}$ (oder $B \subseteq \mathbb{N}^n$) **partiell rekursiv in h** *(bzw.* **in A***), wenn sich f*

(oder K_B) aus den Grundfunktionen

$$C^0_0 \; , \; I^k_i \; , \; N \; , \; h \text{ (bzw. } K_A)$$

mit den Regeln R1, R2 und R3 (uneingeschränkt) aufbauen läßt.

b) Analog definieren wir **rekursiv in h** *und* **rekursiv in A** *(R3 eingeschränkt).*

Beispiel : $n \mapsto \overline{h(n)} := \langle h(0), \ldots, h(n-1) \rangle$ ist rekursiv in h.
(Wir bemerken: $lg(\overline{h(n)}) = n$ und $(\overline{h(n)})_x = h(x)$.)

Bemerkungen :

a) Wenn f (partiell) rekursiv in h ist und h rekursiv ist, dann folgt offenbar, daß f (partiell) rekursiv ist.

b) Es seien A, B derart, daß $A \leq_1 B$. Dann gibt es ein rekursives f mit $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$, d.h. $K_A(x) = K_B(f(x))$. Also ist dann A rekursiv in B.

c) Analog: $A \leq_m B \Rightarrow A$ rekursiv in B.

d) Es gilt $\leq_1 \subsetneqq \leq_m$; denn z.B. $\mathbb{N} \leq_m \{0\}$, aber $\mathbb{N} \not\leq_1 \{0\}$.

Neben $\leq_1$ und $\leq_m$ wird oft noch eine weitere Reduzierbarkeitsrelation betrachtet:

Definition : *$A \leq_{tt} B$ gdw. es existieren $G : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ und $H : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_\omega(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}))$, G, H berechenbar [d.h. $G(x) = D_{g(x)}$, $H(x) = \{D_y \mid y \in D_{h(x)}\}$ und g, h sind berechenbar] mit*

$$x \in A \leftrightarrow (G(x) \cap B) \in H(x).$$

A heißt dann **tt-reduzierbar** *(truth-table-reduzierbar) auf B. $(G(x), H(x))$ heißt* **Wahrheitstafel** *von x.*
(Zur Codierung endlicher Teilmengen von $\mathbb{N}$ verwenden wir dabei die Relation D_z;
vgl. § 3, Übung 1.)

Bemerkungen :
a) Man sieht sofort, daß aus "$A \leq_{tt} B$" "A rekursiv in B" folgt. (Betrachte die Gleichung in der Definition und beachte: $G(x)$ und $H(x)$ sind endlich.) Außerdem ist $\leq_{tt}$ transitiv (Beweis: Übung 1).
b) $A \leq_{tt} \neg A$; denn mit $G(x) := \{x\}$ und $H(x) := \{\emptyset\}$ gilt offenbar $A(x) \leftrightarrow (\{x\} \cap \neg A) \in \{\emptyset\}$ und G, H sind berechenbar.
c) Es gilt $\leq_m \subsetneq \leq_{tt}$; denn "$\subseteq$": Es sei $f : A \leq_m B$, also $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$. Setze $G(x) := \{f(x)\}$ und $H(x) := \{\{f(x)\}\}$, dann gilt $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B \leftrightarrow [\{f(x)\} \cap B] \in \{\{f(x)\}\}$. "$\neq$": Es sei A so, daß $\neg A$ r.a., aber nicht rekursiv ist. Nach b) gilt $A \leq_{tt} \neg A$. Gälte auch $A \leq_m \neg A$, so wäre A r.a., was im Widerspruch zur Wahl von A steht.

Wie früher beweist man nun

Satz 1 : *f ist genau dann RM-berechenbar in h, wenn f partiell rekursiv in h ist.*

BEWEIS: Übung 2. (Wir verwenden diesen Satz im folgenden nicht.) ▯

Einige weitere Sätze lassen sich auf relativ rekursive Funktionen übertragen:

Satz 2 (Normalformsatz) :
Es sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir setzen

$$\tilde{T}^n(e, s, x_1, \ldots, x_n, g) :\leftrightarrow T^{n+2}(e, s, (g)_0, x_1, \ldots, x_n, (g)_1).$$

Dann hat jedes in h partiell rekursive f die Form

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq (\mu g \tilde{T}^n(e, \overline{h((g)_2)}, x_1, \dots, x_n, g))_0.$$

Definition : *Wir setzen* $\varphi_e^n[h](x_1, \dots, x_n) := (\mu g \tilde{T}^n(e, \overline{h((g)_1)}, x_1, \dots, x_n, g))_0$ *und nennen* $\varphi_e^n[h]$ **e-te in h partiell rekursive Funktion**.

BEWEIS : Durch Induktion über den Aufbau von f (der nicht eindeutig zu sein braucht) zeigen wir, daß es eine r.a. Menge R gibt mit

$f(x_1, \dots, x_n) \simeq x_0 \leftrightarrow \exists k R(\overline{h(k)}, x_0, \dots, x_n)$ und
$R(\langle y_0, \dots, y_{r-1}\rangle, x_0, \dots, x_n) \rightarrow R(\langle y_0, \dots, y_{s-1}\rangle, x_0, \dots, x_n)$ für $s \geq r$.

Grundfunktionen:

$f = C_0^0 \quad : \qquad R(s,x_0) \leftrightarrow x_0 = 0$
$f = I_i^n \quad : \qquad R(s,x_0,\dots,x_n) \leftrightarrow x_0 = x_i$
$f = N \quad : \qquad R(s,x_0,x_1) \leftrightarrow x_0 = x_1 + 1$
$f = h \quad : \qquad R(s,x_0,x_1) \leftrightarrow lg(s) > x_1 \wedge x_0 = (s)_{x_1}$

R1 (Einsetzung):

Es gelte $f(\vec{x}) \simeq g(f_1(\vec{x}),\dots,f_k(\vec{x}))$, S gehöre zu g, R_i zu f_i $(1 \le i \le k)$.

Setze $R(s,x_0,\vec{x}) \leftrightarrow \exists y_1 \dots y_k(S(s,x_0,y_1,\dots,y_k) \wedge \forall i \le k[R_i(s,y_i,\vec{x})])$.

R2 (Induktion):

Es gelte $f(\vec{x},0) \simeq g(\vec{x}), \quad f(\vec{x},y+1) \simeq d(\vec{x},y,f(\vec{x},y))$, S gehöre zu g, D zu d.

Setze $R(s,x_0,\vec{x},y) \leftrightarrow \exists z(lg(z) > y \wedge S(s,(z)_0,\vec{x}) \wedge \forall i < y D(s,(z)_{i+1},\vec{x},i,(z)_i) \wedge (z)_y = x_0)$.

R3 (μ-Operator):

Es gelte $f(\vec{x}) \simeq \mu y g(\vec{x},y) = 0$, S gehöre zu g.

Setze $R(s,x_0,\vec{x}) \leftrightarrow S(s,0,\vec{x},x_0) \wedge \forall i < x_0 \exists z \neq 0 S(s,z,\vec{x},i)$

In jedem Fall ist R r.a. und wie gewünscht.

Nun wählen wir ein $e \in I\!N$ mit $R(s,x_0,\dots,x_n) \leftrightarrow \exists g T^{n+2}(e,s,x_0,\dots,x_n,g)$.

Dann gilt

$f(\vec{x}) \simeq x_0 \leftrightarrow \exists k R(\overline{h(k)},x_0,\vec{x}) \leftrightarrow \exists k \exists g' T^{n+2}(e,\overline{h(k)},x_0,\vec{x},g')$ für ein $e \in I\!N$

$\leftrightarrow \exists g[T^{n+2}(e,\overline{h((g)_2)},(g)_0,\vec{x},(g)_1) \wedge (g)_0 = x_0] \leftrightarrow (\mu g T^{n+2}(e,\overline{h((g)_2)},(g)_0,\vec{x},(g)_1))_0 \simeq x_0$

$\leftrightarrow (\mu g \tilde{T}^n(e,\overline{h((g)_2)},\vec{x},g))_0 \simeq x_0$. □

Satz 3 (Universelle Funktion und s-m-n-Theorem) :

a) $\varphi_e^n[h](x_1,\dots,x_n)$ *ist – als Funktion von* $e,x_1,\dots,x_n$ *– partiell rekursiv in* h.

b) Es gibt rekursive Funktionen $\bar{s}_n^m$ *mit* $\varphi_e^{n+m}[h](x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \simeq \varphi^n_{\bar{s}_n^m(e,y_1,\dots,y_m)}[h](x_1,\dots,x_n)$. *(*$\bar{s}_n^m$ *ist unabhängig von* h*.)*

BEWEIS :

a) ist klar.

b) Man findet $e \in I\!N$, W_f^{n+m+3} und s_{n+2}^{m+1}, so daß folgendes gilt:

$\varphi_e^{n+m}[h](\vec{x},\vec{y}) \simeq x_0$

$\leftrightarrow \exists g[\tilde{T}^{n+m}(e,\overline{h((g)_1)},\vec{x},\vec{y},g) \wedge (g)_0 = x_0 \wedge \forall z < g(\neg \tilde{T}^{n+m}(e,\overline{h((z)_1)},\vec{x},\vec{y},z))]$

$\leftrightarrow \exists g[T^{n+m+2}(e,\overline{h((g)_1)},(g)_0,\vec{x},\vec{y},g) \wedge (g)_0 = x_0 \wedge \forall z < g \neg T^{n+m+2}(e,\overline{h((z)_1)},(z)_0,\vec{x},\vec{y},z)]$

$\leftrightarrow \exists g W_f^{n+m+3}(\overline{h(g)},x_0,\vec{x},\vec{y},e)$

$\leftrightarrow\ \exists g W^{n+2}_{s^{m+1}_{n+2}(f,\vec{y},e)}(\overline{h(g)}, x_0, \vec{x})$.

Setze $\bar{s}^m_n(e,\vec{y}) := s^{m+1}_{n+2}(f,\vec{y},e)$, dann ist $\bar{s}^m_n$ wie gewünscht, wie man leicht sieht. $\square$

Folgerung 4 (Rekursionssatz) :

a) Es sei g eine rekursive Funktion. Dann gibt es ein $e \in I\!N$ mit $\varphi^1_e[h] = \varphi^1_{g(e)}[h]$.

b) (Effektive Version) Für jedes $n \in I\!N$ gibt es eine rekursive Funktion $\bar{s}$ mit

$\varphi^n_{\bar{s}(x)}[h](y_1, \ldots, y_n) \simeq \varphi^n_{\varphi^1_x(\bar{s}(x))}[h](y_1, \ldots, y_n)$.

Beweis : wie früher. $\square$

Auch der Begriff "rekursiv aufzählbar" läßt sich relativieren:

Definition : *$A \subseteq I\!N^n$ heißt* **r.a. in h**, *wenn es eine in h rekursive Relation $R \in I\!N^{n+1}$ gibt mit $A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$.*

Die folgenden Sätze beweist man wieder genau wie die entsprechenden früher:

Satz 5 (Uniformisierungssatz) :

Es sei $A \subseteq I\!N^n$ r.a. in h, dann läßt sich A durch eine in h partiell rekursive Funktion uniformisieren.

Folgerung 6 :

a) A rekursiv in $h \iff A, \neg A$ r.a. in h

b) f partiell rekursiv in $h \iff Graph(f)$ r.a. in h

c) A r.a. in $h \iff A = \mathrm{dom}(f)$, f partiell rekursiv in h

Definition : *Wir setzen $W^n_e[h] := \mathrm{dom}(\varphi^n_e[h]) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \exists g \tilde{T}^n(e, \overline{h((g)_1)}, \vec{x}, g)\}$ und nennen $W^n_e[h]$* **e-te in h r.a. Menge**. Analog $W^n_e[A] := W^n_e[K_A]$.

Wie früher wird der Name durch folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 7 :

a) $\{(e, x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in W^n_e[h]\}$ ist r.a. in h.

b) Jede in h r.a. Menge hat die Form $W^n_e[h]$ für ein $e \in I\!N$.

Man kann auch andere Normalformen für in h r.a. Mengen betrachten:

Lemma 8 : *Zu jeder in h r.a. Relation A gibt es eine rekursive Relation R mit*

$$A(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y R(\overline{h(y)}, \vec{x}).$$

Zusatz: Definiert man $\langle x_0, \ldots, x_m \rangle \upharpoonright y := \langle x_0, \ldots, x_{y-1} \rangle$ *, dann kann man annehmen:*
$R(x \upharpoonright y, \vec{x}) \to R(x, \vec{x})$.

Beweis: Übung 3.
Hinweis: Wähle ein $e \in I\!N$ mit $A = W_e^n[h]$ und setze $R(s, \vec{x}) :\leftrightarrow \exists g[lg(s) > g \wedge \tilde{T}^n(e, s \upharpoonright (g)_1, \vec{x}, g)]$. ∎

Lemma 9 : *Zu jeder in B r.a. Relation A existiert eine r.a. Relation* $\bar{R}$ *mit*

$$A(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists y \exists z[\bar{R}(\vec{x}, y, z) \wedge D_y \subseteq B \wedge D_z \subseteq I\!N \setminus B]$$

Beweis: Übung 4.
Hinweis: Es sei A r.a. in K_B. Wähle ein $e \in I\!N$ mit $A = W_e^n[K_B]$ und R wie in Lemma 8. Setze nun $\bar{R}(\vec{x}, y, z) \;:\leftrightarrow\; \exists s \forall i < lg(s)[(((s)_i = 0 \to i \in D_y) \wedge ((s)_i = 1 \to i \in D_z))) \wedge R(s, \vec{x})]$. ∎

Weitere Verallgemeinerungen:

Definition : *Wir definieren eine* **relative arithmetische Hierarchie***:*

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^0[h] \;&:=\; \Pi_0^0[h] := \text{Klasse der in } h \text{ rekursiven Mengen}\\
\Sigma_{n+1}^0[h] &:= \{S \subseteq I\!N^m \mid S(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y),\ \text{mit } P \in \Pi_n^0[h], m \in I\!N\}\\
\Pi_{n+1}^0[h] &:= \{P \subseteq I\!N^m \mid P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y S(\vec{x}, y),\ \text{mit } S \in \Sigma_n^0[h], m \in I\!N\}
\end{aligned}$$

Man erhält für diese Hierarchie dasselbe Inklusions-Diagramm wie in § 7.

Definition :
a) A heißt **vollständig in h** *gdw. A in h r.a. ist und für alle in h r.a. B gilt:* $B \leq_1 A$.
b) Analog: **m-vollständig in h** *(ersetze* $\leq_1$ *durch* $\leq_m$*).*

Satz 10 : *Für alle h existiert bis auf rekursive Isomorphie genau ein in h vollständiges* $A \subseteq I\!N$.

Beweis: Eindeutigkeit: Satz von Myhill. Existenz: $A := \{x \mid (x)_0 \in W^1_{(x)_1}[h]\}$ ist wie gewünscht (Nachweis wie früher). ∎

Nun kommen wir zu einem neuen Begriff:

Definition : *Für eine Relation $A \subseteq I\!N$ sei $A' := \{x \mid (x)_0 \in W^1_{(x)_1}[K_A]\} \subseteq I\!N$. A' heißt* **Jump** *von A. Rekursiv definieren wir weiter für alle $n \in I\!N$: $A^{(n+1)} := (A^{(n)})'$.*

Wir haben gerade gezeigt: A' ist (die) in A vollständige Menge. Es gilt weiterhin:

Satz 11 : $\Sigma^0_n[A'] = \Sigma^0_{n+1}[A]$ *und* $\Pi^0_n[A'] = \Pi^0_{n+1}[A]$ *für alle $n > 0$.*

BEWEIS: Es genügt zu zeigen: $\Sigma^0_1[A'] = \Sigma^0_2[A]$ und $\Pi^0_1[A'] = \Pi^0_2[A]$ (der allgemeine Fall folgt daraus durch Induktion).
"$\subseteq$": Es sei $B \in \Sigma^0_1[A']$. Nach Lemma 9 existiert ein r.a. $\bar{R}$ mit

$$\begin{aligned} B(x) &\longleftrightarrow \exists y \exists z[\bar{R}(x,y,z) \land D_y \subseteq A' \land D_z \subseteq I\!N \setminus A'] \\ &\longleftrightarrow \underbrace{\exists y \exists z[\bar{R}(x,y,z) \land \forall i < \max\{y,z\}((i \in D_y \to \underbrace{i \in A'}_{\Sigma^0_1[A]}) \land (i \in D_z \to \underbrace{i \notin A'}_{\Pi^0_1[A]})]}_{\Sigma^0_2[A]}. \end{aligned}$$

"$\supseteq$": Es sei B aus $\Sigma^0_2[A]$, dann gilt

$$\begin{aligned} B(x) &\longleftrightarrow \exists y \neg(W^1_e[A](\langle x,y \rangle)) \text{ (für ein } e \in I\!N) \\ &\longleftrightarrow \underbrace{\exists y \underbrace{\neg(\langle\langle x,y\rangle, e\rangle \in A')}_{\Sigma^0_0[A']}}_{\Sigma^0_1[A']} \text{ (nach Definition von } A'). \end{aligned}$$

Der $\Pi^0_1[A']$-Fall folgt durch Komplementbildung. ▯

Folgerung 12 : $\Sigma^0_{n+1} = \Sigma^0_1[\emptyset^{(n)}] =$ *die in $\emptyset^{(n)}$ r.a. Mengen.*

BEWEIS: klar mit Induktion und Satz 11.
(Beachte: A rekursiv in $\emptyset \Leftrightarrow$ A rekursiv, also $\Sigma^0_n[\emptyset] = \Sigma^0_n$ für alle $n \geq 0$.) ▯

§ 9 Turinggrade

Bis jetzt haben wir die Reduzierbarkeitsrelationen $\leq_1$, $\leq_m$ und $\leq_{tt}$ kennengelernt und gesehen, daß $\leq_1 \subsetneqq \leq_m \subsetneqq \leq_{tt}$ erfüllt ist. Durch die Relation "A rekursiv in B" aus §8 wird nun eine Reduzierbarkeitsrelation $\leq_T$ definiert, die diese Inklusionskette zu $\leq_1 \subsetneqq \leq_m \subsetneqq \leq_{tt} \subsetneqq \leq_T$ fortsetzt ($\leq_{tt} \subsetneqq \leq_T$ ohne Beweis):

Definition : *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*
A heißt **turingreduzierbar** *auf B ($A \leq_T B$) gdw. A rekursiv in B ist.*

Bemerkung : Es seien $A, B, R \subseteq \mathbb{N}$.
a) $\leq_T$ ist reflexiv und transitiv.
b) Für rekursives R rekursiv gelten:
  i) $R \leq_T B$ für alle $B \subseteq \mathbb{N}$ und
  ii) $B \leq_T R \Longrightarrow B$ rekursiv
c) $A \leq_T B \iff$ für alle f gilt: f rekursiv in $A \Rightarrow f$ rekursiv in B

Beweis :
a) Wegen der entsprechenden Eigenschaften von "f rekursiv in h".
b) Klar nach Definition von "f rekursiv in h".
c) "$\Rightarrow$": Wegen der Transitivität von "f rekursiv in h".
  "$\Leftarrow$": Betrachte $f = K_A$. □

Beachte, daß $\leq_T$ *keine Ordnung* ist. $\leq_T$ induziert aber eine Ordnung auf der Menge der Äquiva-lenzklassen der "Symmetrisierung von $\leq_T$":

Definition : *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*
A und B heißen **turingäquivalent** *(Notation: $A \equiv B$) gdw. $A \leq_T B$ und $B \leq_T A$.*

Aus der vorigen Bemerkung folgt für $\equiv_T$ sofort:

Bemerkung : Es seien $A, B, R \subseteq \mathbb{N}$.
a) $\equiv_T$ ist eine Äquivalenzrelation
b) Für rekursives R gilt: $R \equiv_T B \iff B$ rekursiv
c) $A \equiv_T B \iff$ für alle f gilt: f rekursiv in $A \Leftrightarrow f$ rekursiv in B

Die Äquivalenzklassen bzgl. $\equiv_T$ werden Turinggrade genannt:

Definition : *Es sei $A \subseteq I\!N$.*

deg $A := \{B \subseteq I\!N \mid A \equiv_T B\}$ *heißt* **Turinggrad von A** *und wird auch mit a bezeichnet.*

0 $:=$ deg $\emptyset = \{B \subseteq I\!N \mid B$ *rekursiv* $\}$ *($\emptyset$ ist rekursiv!)*

$\mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ *bezeichnet die Menge der Turinggrade.*

$\leq_T$ induziert die folgende Ordnung auf der Menge der Turinggrade:

Definition : deg $A \leq$ deg B *gdw.* $A \leq_T B$
(Verifiziere, daß $\leq$ wohldefiniert ist!)

Bemerkung : $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$.

BEWEIS : $\leq$ ist reflexiv und transitiv, da $\leq_T$ diese Eigenschaften hat. $\leq$ ist antisymmetrisch, denn für $a =$ deg A und $b =$ deg B mit $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $A \leq_T B$ und $B \leq_T A$, also $A \equiv_T B$ und damit $a = b$. ▯

In diesem Kapitel wollen wir die Menge der Turinggrade zusammen mit dieser Ordnung näher studieren. Dazu ist der folgende Begriff nützlich:

Definition : *Ein* **oberer Halbverband** *(M,$\leq$) ist eine Menge M mit einer partiellen Ordnung $\leq$ auf M, so daß gilt: für alle a,b $\in M$ existiert* $\sup(a,b) \in M$ *(d.h. für alle $m \in M$ gilt: $m \geq a$ und $m \geq b \Leftrightarrow m \geq \sup(a,b)$).*

Satz 1 : $(\mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}, \leq)$ *ist ein oberer Halbverband*
a) mit Minimum 0,
b) ohne maximale Elemente,
c) der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, und
d) jedes $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ hat höchstens $\aleph_0$ viele Vorgänger.

BEWEIS : $\leq$ ist eine partielle Ordnung nach der letzten Bemerkung.
Zu $a =$ deg A und $b =$ deg B ist $\deg(2A \cup (2B+1)) = \sup(a,b)$,
denn $x \in A \leftrightarrow 2x \in 2A \cup (2B+1)$ und $x \in B \leftrightarrow 2x+1 \in 2A \cup (2B+1)$,
also $A \leq_T 2A \cup (2B+1)$ und $B \leq_T 2A \cup (2B+1)$.
a) Wegen $\emptyset \leq_T$ A für alle $A \subseteq \mathbb{N}$, da $\emptyset$ rekursiv ist.
b) Folgt direkt aus Lemma 2 unten.
d) und c) Es existieren abzählbar unendlich viele in A rekursive Funktionen. Daher hat jedes $A \subseteq \mathbb{N}$ abzählbar unendlich viele $\leq_T$-Vorgänger, d.h. jedes $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ hat höchstens $\aleph_0$ viele $\leq$-Vorgänger.
Wegen $\mid \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid = 2^{\aleph_0}$ folgt dann auch c). ▯

Bevor wir das im vorstehenden Beweis benutzte Lemma 2 angeben, vereinbaren wir noch eine abkürzende Schreibweise für den Turinggrad des Jumps A' einer Teilmenge A von $\mathbb{N}$:

Definition : *Zu* $a = \deg A$ *ist* $a' := \deg A'$
(a' *ist wohldefiniert, denn:* $B \equiv_T A \;\Rightarrow\; B' \in \Sigma^0_1[A]$ *und* $A' \in \Sigma^0_1[B] \;\Rightarrow\; B' \leq_1 A'$ *und* $A' \leq_1 B'$*, also auch* $B' \leq_T A'$ *und* $A' \leq_T B'$*, d.h.* $B' \equiv_T A'$*.)*

Lemma 2 : *Für alle* $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ *gilt:* $a < a'$

BEWEIS : Es sei $a = \deg A$. Es sei $e \in \mathbb{N}$ mit $A = W_e[A]$. Wegen $x \in A \leftrightarrow \langle x, e\rangle \in A'$ ist dann $A \leq_T A'$ erfüllt, also $a \leq a'$. Es sei $S \in \Sigma^0_1[A] \setminus \Pi^0_1[A]$. Dann gelten: $S \leq_1 A'$ wegen $S \in \Sigma^0_1[A]$ und $S \not\leq_T A$ wegen $S \notin \Pi^0_1[A]$. Daraus folgt $A' \not\leq_T A$ (Transitivität), also $a' \not\leq a$. $\square$

Wir haben gesehen, daß $\leq$ eine partielle Ordnung auf der Menge der Turinggrade ist. Aufgrund des folgenden Theorems von S.C. Kleene und E.L. Post wissen wir, daß $\leq$ *keine lineare* Ordnung ist:

Theorem 3 (Kleene-Post) :
Es gibt $a, b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ *mit* $a \not\leq b$ *und* $b \not\leq a$.
Es wird sogar gezeigt: Es gibt $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *mit* $A \notin \Sigma_1^0[B]$ *und* $B \notin \Sigma_1^0[A]$.

Folgerung 4 : $\leq$ *ist keine lineare Ordnung auf* $\mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$.

Die Aussage des Theorems ist klar, falls $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ gilt, also CH (Kontinuumshypothese) nicht erfüllt ist, denn: Es existiert keine lineare Ordnung $(X,\leq)$ mit $\mid X \mid > \aleph_1$, so daß jedes Element von X weniger als $\aleph_1$ viele Vorgänger hat. (Das gilt übrigens auch für jede andere Kardinalzahl κ anstelle von $\aleph_1$.)

BEWEIS : Wir verwenden die folgende *Normalform* (vgl. §8, Lemma 9):
Zu $C \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir: $x \in \overline{W}_e[C] \ :\leftrightarrow\ \exists\ y, z\ (\ W_e^3(x,y,z)\ \wedge\ D_y \subseteq C\ \wedge\ D_z \subseteq \neg C\ )$

Ziel: Konstruiere $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *mit* $A \neq \overline{W}_e[B]$ *und* $B \neq \overline{W}_e[A]$ *für alle* $e \in \mathbb{N}$.
Damit sind dann $A \notin \Sigma_1^0[B]$ und $B \notin \Sigma_1^0[A]$ gezeigt.

Definiere zur Vereinfachung der *Schreibweise*:
Für $s, t, s', t' \subseteq \mathbb{N}$: $(s,t) \leq (s',t')$ gdw. $s \subseteq s'$ und $t \subseteq t'$.
Alle Paare (s,t) sind im folgenden als disjunkt ($s \cap t = \emptyset$) vorausgesetzt.

Konstruiere nun zwei aufsteigende Ketten von Paaren *endlicher* Teilmengen von $\mathbf{N}$
$(s_0^a, t_0^a) \leq (s_1^a, t_1^a) \leq (s_2^a, t_2^a) \leq \cdots$ und
$(s_0^b, t_0^b) \leq (s_1^b, t_1^b) \leq (s_2^b, t_2^b) \leq \cdots$ mit der Eigenschaft:

Für alle $0 < i < \omega$, für alle $C, D \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$(\star)$$

$$(s_i^a, t_i^a) \leq (C, \neg C)$$
$$(s_i^b, t_i^b) \leq (D, \neg D)$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} C \neq \overline{W}_e[D], & \text{falls } i = 2e+2 \\ D \neq \overline{W}_e[C], & \text{falls } i = 2e+1 \end{cases}$$

Setze dann $A := \bigcup_{i<\omega} s_i^a$ und $B := \bigcup_{i<\omega} s_i^b$.
Damit erfüllen A und B $(s_i^a, t_i^a) \leq (A, \neg A)$ und $(s_i^b, t_i^b) \leq (B, \neg B)$ für alle $i < \omega$, und wegen $(\star)$ folgt sofort $A \neq \overline{W}_e[B]$ und $B \neq \overline{W}_e[A]$ für alle $e \in I\!N$.

Nun zur Konstruktion der beiden Ketten:

$i = 0$: Setze $(s_0^a, t_0^a) := (s_0^b, t_0^b) := (\emptyset, \emptyset)$.

Zu $(\star)$: Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen.

$i > 0$: Es seien für alle $j < i$ (s_j^a, t_j^a) und (s_j^b, t_j^b) schon konstruiert.

1. Fall: $i = 2e + 2$

Es sei $x \in I\!N \setminus (s_{i-1}^a \cup t_{i-1}^a)$ minimal (x existiert, da $s_{i-1}^a \cup t_{i-1}^a$ endlich ist.)

Fall 1.1: $x \notin \overline{W}_e[E]$ *für alle* $E \subseteq I\!N$ *mit* $(s_{i-1}^b, t_{i-1}^b) \leq (E, \neg E)$

Setze dann $s_i^a := s_{i-1}^a \cup \{x\}$, $t_i^a := t_{i-1}^a$, $s_i^b := s_{i-1}^b$ und $t_i^b :=$

t^b_{i-1}.

Zu $(\star)$: Es seien $C, D \subseteq I\!N$ wie in $(\star)$. Dann folgen:

$x \in C$ wegen $(s^a_i, t^a_i) \leq (C, \neg C)$ und $x \in s^a_i$ und
$x \notin \overline{W}_e[D]$ wegen $(s^b_{i-1}, t^b_{i-1}) \leq (D, \neg D)$.
Damit ist $C \neq \overline{W}_e[D]$ gezeigt.

Fall 1.2: *Es gibt* $y, z \in I\!N$, *und es gibt* $E \subseteq I\!N$, *so daß*

$$W^3_e(x, y, z) \qquad \textit{und}$$

$$(s^b_{i-1}, t^b_{i-1}) \leq (E, \neg E)$$
$$(D_y, D_z) \leq (E, \neg E).$$

Wähle y_0, z_0 als diejenigen y, z mit dieser Eigenschaft, so daß $\langle\, y_0, z_0 \,\rangle$ minimal ist.

Dann: Für alle $E \subseteq I\!N$ mit $(D_{y_0}, D_{z_0}) \leq (E, \neg E)$ folgt $x \in \overline{W}_e[E]$.

Setze dann $s^a_i := s^a_{i-1}$, $t^a_i := t^a_{i-1} \cup \{x\}$, $s^b_i := s^b_{i-1} \cup D_{y_0}$ und $t^b_i := t^b_{i-1} \cup D_{z_0}$.

Zu $(\star)$: Es seien $C, D \subseteq I\!N$ wie in $(\star)$. Dann folgen:

$x \notin C$ wegen $(s^a_i, t^a_i) \leq (C, \neg C)$ und $x \in t^a_i$ und
$x \in \overline{W}_e[D]$ wegen $(D_{y_0}, D_{z_0}) \leq (D, \neg D)$.
Damit ist $C \neq \overline{W}_e[D]$ gezeigt.

2. Fall: $i = 2e + 1$

Analog mit a und b vertauscht.

Beachte: Nach Konstruktion gelten auch $\neg A = \bigcup_{i<\omega} t^a_i$ und $\neg B = \bigcup_{i<\omega} t^b_i$, denn für alle $x \in I\!N$ gibt es $i < \omega$ mit $x \in s^a_i$ (*Fall 1.1*) oder $x \in t^a_i$ (*Fall 1.2*) und entsprechend für s^b_i und t^b_i.
Dies wird für Theorem 5 von Bedeutung sein. ▯

Bemerkung : Weitere Eigenschaften von $(\mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}, \leq)$ sind (ohne Beweis):

a) Es existieren $2^{\aleph_0}$-viele Turinggrade $(a_i)_{i<2^{\aleph_0}}$ mit $a_i \not\leq \sup\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$ für $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$.

b) Für alle $a_0 < a_1 < \ldots < a_i < \ldots \quad (i < \omega)$ aus $\mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ existieren $b, c \in \mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ mit

$a_i \leq b$ und $a_i \leq c$ für alle $i < \omega$ und b und c ohne Infimum.

c) Es existieren **minimale Turinggrade** a, d.h. für alle $x \in \mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ gilt: $x < a \Longleftrightarrow x = 0$.

d) Für alle $a \in \mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ gilt: $0' \leq a \Longleftrightarrow$ es existiert ein $b \in \mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ mit $b' = a$

Bei genauerer Betrachtung des Beweises zum Theorem von Kleene-Post stellen wir fest, daß wir die Mengen A und B "in gewisser Weise effektiv" konstruiert haben, d.h. a und b lassen sich bzgl. der partiellen Ordnung $\leq$ genauer "lokalisieren". Wir erhalten die folgende Verschärfung von Theorem 3:

Theorem 5 (Zusatz zu Theorem 3) :

In Theorem 3 lassen sich $a, b \leq 0'$ bzw. A,B rekursiv in $\emptyset'$ wählen.

Beweis : Zur *Codierung* endlicher Teilmengen von $I\!N$ verwenden wir wieder die Relation $D_z(x)$, die *rekursiv* in x und z ist (vgl. §3, Übung 1).

Wir konstruieren A und B wie im Beweis zu Theorem 3. Damit haben wir die folgende Situation: $A = \bigcup_{i<\omega} s_i^a$, $\neg A = \bigcup_{i<\omega} t_i^a$, $B = \bigcup_{i<\omega} s_i^b$ und $\neg B = \bigcup_{i<\omega} t_i^b$.

Ziel: Definiere Funktionen $\alpha_s(i)$, $\alpha_t(i)$, $\beta_s(i)$ und $\beta_t(i)$ rekursiv in $\emptyset'$, die die Indizes z der endlichen Mengen D_z berechnen, um die sich die Mengen s_i^a, s_i^b, t_i^a und t_i^b in Schritt i geändert haben, d.h. $s_i^a \setminus s_{i-1}^a = D_{\alpha_s(i)}$, $t_i^a \setminus t_{i-1}^a = D_{\alpha_t(i)}$, $s_i^b \setminus s_{i-1}^b = D_{\beta_s(i)}$ und $t_i^b \setminus t_{i-1}^b = D_{\beta_t(i)}$.

Dann folgen

$$A(x) \leftrightarrow \exists i\, D_{\alpha_s(i)}(x)$$
$$\neg A(x) \leftrightarrow \exists i\, D_{\alpha_t(i)}(x)$$

und

$$B(x) \leftrightarrow \exists i\, D_{\beta_s(i)}(x)$$
$$\neg B(x) \leftrightarrow \exists i\, D_{\beta_t(i)}(x)$$

, d.h.

$$A, \neg A \in \Sigma_1^0[\emptyset'] \text{ und}$$

$B, \neg B \in \Sigma^0_1[\emptyset']$, also A und B *rekursiv in* $\emptyset'$. (Beachte: $D_z(x)$ ist rekursiv.)

Wir untersuchen nun die im Beweis zu Theorem 3 durchgeführten Schritte auf *Rekursivität in* $\emptyset'$:

Zur 1. Fallunterscheidung:

Die Relationen $\exists\, e < i\,(\, i = 2e + 2\,)$ und $\exists\, e < i\,(\, i = 2e + 1\,)$ sind *rekursiv* in i.

Zur Berechnung von $x \in \mathbb{N} \setminus (s^a_{i-1} \cup t^a_{i-1})$ minimal definieren wir die *rekursive* Funktion

$$\eta(s,t) := \mu x\,(\, x \notin D_s \ \wedge\ x \notin D_t\,)$$

(Hier, wie im folgenden, schreiben wir $\mu x\, R(\vec{z}, x)$ statt $\mu x\,(\, K_R(\vec{z}, x) = 0\,)$ für eine Relation $R(\vec{z}, x)$ und ihre charakteristische Funktion $K_R(\vec{z}, x)$.)

Zur 2. Fallunterscheidung:

$$\text{Beachte die Äquivalenz:}\qquad \exists\, E \subseteq \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned}(D_s, D_t) &\leq (E, \neg E)\\ (D_y, D_z) &\leq (E, \neg E)\end{aligned}$$

$$\iff\quad D_s \cap D_z = \emptyset \text{ und } D_t \cap D_y = \emptyset$$

$D_s \cap D_z = \emptyset$ und $D_t \cap D_y = \emptyset$ läßt sich *rekursiv* ausdrücken:

$$R_{\leq}(s,t,y,z) \;:\longleftrightarrow\; \forall u < z\,(u \notin D_s \vee u \notin D_z) \ \wedge\ \forall w < y\,(w \notin D_t \vee w \notin D_y)$$

Mit Hilfe von $R_{\leq}(s,t,y,z)$ können wir "die Situation in *Fall 1.2*" *r.a.* beschreiben:

$$R(e,x,s,t) \;:\longleftrightarrow\; \underbrace{\exists\, y, z\left(\underbrace{W^3_e(x,y,z)}_{\Sigma^0_1} \ \wedge\ \underbrace{R_{\leq}(s,t,y,z)}_{\Delta^0_1}\right)}_{\Sigma^0_1}$$

Schließlich definieren wir zur Berechnung von y_0 und z_0 in *Fall 1.2* die Funktion

$$\varrho(e,x,s,t) := \mu v\,\underbrace{\Bigg(\underbrace{\Big(\underbrace{W^3_e\big(x,(v)_0,(v)_1\big)}_{\Sigma^0_1} \wedge \underbrace{R_{\leq}\big(s,t,(v)_0,(v)_1\big)}_{\Delta^0_1} \wedge \underbrace{R\big(e,x,s,t\big)}_{\Sigma^0_1}\Big)}_{\Sigma^0_1} \vee \underbrace{\Big(\underbrace{v = 0}_{\Delta^0_1} \wedge \underbrace{\neg R\big(e,x,s,t\big)}_{\Pi^0_1}\Big)}_{\Pi^0_1}\Bigg)}_{\Delta^0_2}$$

$\varrho(e,x,s,t)$ ist *rekursiv in* $\emptyset'$, da die in der Definition auftretende Relation aus $\Delta_2^0 = \Delta_1^0[\emptyset']$ ist.

Hiermit steht alles zur Verfügung, um durch Fallunterscheidung Funktionen σ^a, σ^b, τ^a und τ^b rekursiv in $\emptyset'$ zu definieren, die dazu dienen werden, die Funktionen α_s, α_t, β_s und β_t (im wesentlichen durch Induktion (R2)) rekursiv in $\emptyset'$ zu definieren. Wir führen dies nur für die Funktion σ^a aus; σ^b, τ^a und τ^b lassen sich entsprechend definieren.

Es soll gelten: $s_i^a \setminus s_{i-1}^a = D_{\alpha_s(i)}$, d.h. $\alpha_s(i) = \begin{cases} 2^x\,, & \textit{Fall 1.1} \quad (\{x\} = D_{2^x}) \\ y_0\,, & \textit{Fall 2.2} \\ 0\,, & \text{sonst} \quad (\emptyset = D_0) \end{cases}$

Deshalb definieren wir die Funktion:

$$\sigma^a(i, s^a, t^a, s^b, t^b) := \begin{cases} 2^{\eta(s^a,t^a)}\,, & \exists e < i \ \Big(i = 2e+2 \ \wedge \ \neg R\big(e\,,\eta(s^a,t^a)\,,s^b\,,t^b\big) \Big) \\ \Big(\varrho(\frac{i-1}{2}, s^a, t^a)\Big)_0\,, & \exists e < i \ \Big(i = 2e+1 \ \wedge \ R\big(e\,,\eta(s^b,t^b)\,,s^a\,,t^a\big) \Big) \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da alle in der Fallunterscheidung auftretenden Funktionen und Relationen aus $\Delta_2^0 = \Delta_1^0[\emptyset']$ sind, ist $\sigma^a(i, s^a, t^a, s^b, t^b)$ *rekursiv in* $\emptyset'$. $\alpha_s(i)$ läßt sich nun nicht direkt aus $\sigma^a(i, s^a, t^a, s^b, t^b)$ durch Induktion (R2) definieren, da neben i und s^a auch s^b, t^a und t^b Argumente von σ^a sind. Codiere daher diese vier letzten Variablen über ihre Gödelnummer zu *einer* Variablen. Definiere dazu die *in* $\emptyset'$ *rekursive* Funktion

$$\overline{\sigma}^a(i,z) := \sigma^a(i,(z)_0,(z)_1,(z)_2,(z)_3)\,.$$

Entsprechend verfährt man mit σ^b, τ^a und τ^b und erhält $\overline{\sigma}^b(i,z)$, $\overline{\tau}^a(i,z)$ und $\overline{\tau}^b(i,z)$ *rekursiv in* $\emptyset'$. Jetzt kann die "Gödelnummer-Funktion" von $\alpha_s(i)$, $\alpha_t(i)$, $\beta_s(i)$ und $\beta_t(i)$ durch Induktion (R2) *rekursiv in* $\emptyset'$ definiert werden:

$$f(0) := \langle\ 0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\ \rangle$$

$$f(i) := \langle\ \overline{\sigma}^a(\,i\,,\,f(i-1)\,)\ ,\ \overline{\sigma}^b(\,i\,,\,f(i-1)\,)\ ,\ \overline{\tau}^a(\,i\,,f(\,i-1)\,)\ ,\ \overline{\tau}^b(\,i\,,\,f(i-1)\,)\ \rangle$$

Unsere gewünschten Funktionen erhalten wir dann als Komponentenfunktionen von $f(i)$ *rekursiv in* $\emptyset'$:

$$\alpha_s(i) := (f(i))_0, \quad \alpha_t(i) := (f(i))_1, \quad \beta_s(i) := (f(i))_2 \quad \text{und} \quad \beta_t(i) := (f(i))_3\ . \qquad \square$$

Da 0 der kleinste Turinggrad ist, haben wir:

Folgerung 6 : $\leq$ *ist keine lineare Ordnung auf* $\{a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T} \mid 0 \leq a \leq 0'\}$.

Dies liefert die Existenz von Turinggraden zwischen 0 und $0'$:

Folgerung 7 : *Es gibt* $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ *mit* $0 < a < 0'$.

BEWEIS : $\{0, 0'\}$ ist linear geordnet durch $\leq$. ∎

Im folgenden wollen wir diesen Abschnitt zwischen 0 und $0'$ genauer studieren. Wir haben die folgende Situation vorliegen:

Lemma 8 : *Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$.*

a) A rekursiv $\iff$ $\deg A = 0$
b) A r.a. $\Longrightarrow$ $\deg A \leq 0'$
c) A vollständig $\Longrightarrow$ $\deg A = 0'$

BEWEIS : Es sind nur noch b) und c) zu zeigen. Beachte im folgenden, daß $\emptyset'$ *vollständig* ist!
b) A r.a. impliziert $A \leq_1 \emptyset'$, also auch $A \leq_T \emptyset'$ und damit $\deg A \leq 0'$.
c) A vollständig impliziert $A \equiv_1 \emptyset'$, also auch $A \equiv_T \emptyset'$ und damit $\deg A = 0'$. ∎

Bemerkung : Die Umkehrungen von b) und c) sind falsch.

BEWEIS : $\emptyset' \in \Sigma_1^0 \setminus \Pi_1^0$, da $\emptyset'$ vollständig ist. Aber $\deg \neg\, \emptyset' = 0'$ und $\neg\, \emptyset' \notin \Sigma_1^0$.
□

Die Turinggrade r.a. Teilmengen von $I\!N$ liegen also alle zwischen 0 und $0'$. E.L. Post stellte die Frage, ob 0 und $0'$ die einzigen Turinggrade rekursiv aufzählbarer Teilmengen von $I\!N$ seien (Posts Problem 1944). Zur Beantwortung dieser Frage beschränken wir uns im folgenden auf die Betrachtung der Turinggrade rekursiv aufzählbarer Teilmengen von $I\!N$:

Definition :
$a \in \mathcal{P}(I\!N)_{/\equiv_T}$ heißt **r.a.Turinggrad** *gdw. es ein $A \in a$ mit A r.a. gibt*
$\mathcal{P}(I\!N)_{r.a./\equiv_T}$ bezeichnet die Menge der r.a. Turinggrade.

Bemerkung : Für alle $a \in \mathcal{P}(I\!N)_{r.a./\equiv_T}$ mit $a > 0$ gibt es ein $B \in a$ mit B nicht r.a.

BEWEIS : Es seien a r.a. Turinggrad mit $a > 0$ und $A \in a$ mit A r.a. Für $B := \neg A$ folgen dann $B \in a$ und B nicht r.a. (A ist nicht rekursiv wegen $a > 0$.) □

Das Theorem von Kleene-Post zeigt, daß $\leq$ eingeschränkt auf die Turinggrade zwischen 0 und $0'$ keine lineare Ordnung ist. Es liefert jedoch lediglich die Existenz von $a = \deg A$ mit $0 < a < 0'$ und A nicht r.a. (wegen $A \notin \Sigma_1^0[B]$), aber macht keine Aussage darüber, ob a r.a. ist oder nicht. R.M. Friedberg und A. Mučnik zeigten nun als Verschärfung des Theorems von Kleene-Post, daß auch die r.a. Turinggrade durch $\leq$ nicht linear geordnet sind:

Theorem 9 (Friedberg-Mučnik 1956) :
Es gibt $a, b \in \mathcal{P}(I\!N)_{r.a./\equiv_T}$ mit $a \not\leq b$ und $b \not\leq a$.

Folgerung 10 : *$\leq$ ist keine lineare Ordnung auf $\mathcal{P}(I\!N)_{r.a./\equiv_T}$.*

Damit muß Posts Frage negativ beantwortet werden (Beweis analog zu Folgerung 7):

Folgerung 11 : *Es gibt $a \in \mathcal{P}(I\!N)_{r.a./\equiv_T}$ mit* $0 < a < 0'$.

BEWEIS (zu Theorem 9) : Der Beweis wird mit der sogenannten *Prioritätsmethode* geführt.

Wir verwenden die gleiche *Normalform* wie im Beweis zum Theorem von Kleene-Post:
Dort hatten wir für $C \subseteq I\!N$ definiert: $x \in \overline{W}_e[C] \;:\leftrightarrow\; \exists\, y, z\,(\,W_e^3(x,y,z) \wedge D_y \subseteq C \;\wedge\; D_z \;\subseteq\; \neg C)$

Ziel: *Konstruiere* $A, B \subseteq I\!N$ *r.a. mit* $\neg A \neq \overline{W}_e[B]$ *und* $\neg B \neq \overline{W}_e[A]$ *für alle* $e \in I\!N$.

Damit sind dann $\neg A \notin \Sigma_1^0[B]$ und $\neg B \notin \Sigma_1^0[A]$ gezeigt.

ANMERKUNGEN : Das Theorem von Kleene-Post liefert $A, B \subseteq I\!N$ mit $\neg A \notin \Sigma_1^0[B]$ und $\neg B \notin \Sigma_1^0[A]$ ($\Longleftrightarrow$ $\neg A \notin \Sigma_1^0[\neg B]$ und $\neg B \notin \Sigma_1^0[\neg A]$, denn $\Sigma_1^0[\neg A] = \Sigma_1^0[A]$ wegen $\neg A \equiv_T A$), aber A und B lediglich rekursiv in $\emptyset'$. Die *Prioritätsmethode* ist nun eine Weiterentwicklung der Beweismethode des Theorems von Kleene-Post. Um A und B *r.a.* zu ereichen, ersetzen wir die dort vorkommende r.a. Relation $W_e^3(x,y,z)$ durch die *rekursive* Relation $\exists\, g \leq i\, T_e^3(x,y,z,g)$. Beachte: $W_e^3(x,y,z) \leftrightarrow \exists\, g\; T_e^3(x,y,z,g) \leftrightarrow \exists\, i\, \exists\, g \leq i\; T_e^3(x,y,z,g)$. Da in der Situation $\neg\, \exists\, g \leq i\; T_e^3(x,y,z,g)$ aber noch nicht entschieden ist, ob $W_e^3(x,y,z)$ oder $\neg\, W_e^3(x,y,z)$ gilt (für $j > i$ ist $\exists\, g \leq j\; T_e^3(x,y,z,g)$ möglich), betrachten wir während der Konstruktion von A und B für jedes $e \in I\!N$ die Relation $\exists\, g \leq i\; T_e^3(x,y,z,g)$ für *unendlich* viele $i < \omega$ und damit für *beliebig große* $i < \omega$. Deshalb ersetzen wir im 1. Fall $i = 2e + 2$ durch $i = 2n + 2$ und wählen als Index $e := (n)_0$; im 2. Fall verfahren wir entsprechend.

Wir definieren zu $C \subseteq I\!N$:

für alle $i < \omega$ $\quad x \in \overline{W}_e^i[C] \;:\leftrightarrow\; \exists y, z \le i \; (\; \exists g \le i \; T_e^3(x,y,z,g) \;\wedge\; D_y \subseteq C \;\wedge\; D_z \subseteq \neg C)$.

Dann haben wir für alle $C \subseteq I\!N$: $x \in \overline{W}_e[C] \leftrightarrow x \in \exists i \, \overline{W}_e^i[C]$, und $\overline{W}_e^i[C](x)$ ist eine in C rekursive Relation in e und x.

Konstruiere nun zwei aufsteigende Ketten von *endlichen* Teilmengen von $\mathbf{N}$

$a_0 \subseteq a_1 \subseteq a_2 \subseteq \cdots$ und

$b_0 \subseteq b_1 \subseteq b_2 \subseteq \cdots$ mit den Eigenschaften:

Für alle $e \in I\!N$ existiert ein $x \in I\!N$ mit:

i) Es existiert ein $s < \omega$, so daß:

($\star$) $x \in a_s$ und es gibt ein $z_0 \le s$ mit $\exists y \le s \, (\exists g \le s \; T_e^3(x,y,z_0,g) \wedge D_y \subseteq b_s)$ und

$D_{z_0} \subseteq \neg b_k$ für alle $k \ge s$

oder ii) $x \notin a_k$ und $x \notin \overline{W}_e^k[b_k]$ für unendlich viele $k < \omega$,

($\star\star$) der entsprechenden Eigenschaft mit a und b vertauscht und

($\star\star\star$) es existieren rekursive Funktionen $\alpha(i)$ und $\beta(i)$ mit $a_i \setminus a_{i-1} = D_{\alpha(i)}$ und $b_i \setminus b_{i-1} = D_{\beta(i)}$

für alle $i < \omega$.

Setze dann $A := \bigcup_{i<\omega} a_i$ und $B := \bigcup_{i<\omega} b_i$.

Damit existiert für alle $e \in I\!N$ ein $x \in I\!N$ mit:

$x \in A$ und $x \in \overline{W}_e[B]$, falls i) in ($\star$). Denn dann folgt $D_{z_0} \subseteq \bigcap_{j<\omega} \neg b_j$, also $D_{z_0} \subseteq \neg B$.

Oder $x \notin A$ und $x \notin \overline{W}_e[B]$, falls ii) in ($\star$). Denn die *Annahme* $x \in \overline{W}_e[B]$ impliziert:

Es gibt ein $i < \omega$ mit $x \in \overline{W}_e^i[B]$, also existieren $y, z \le i$ mit $\exists g \le i \; T_e^3(x,y,z,g)$, $D_y \subseteq B$ und $D_z \subseteq \neg B$. Es sei $l < \omega$ mit $D_y \subseteq b_l$ (D_y ist endlich!). Setze $m := max\,\{i, l\}$. Dann folgt wegen

$D_z \subseteq \bigcap_{j<\omega} \neg b_j$ für alle $k \ge m$ $x \in \overline{W}_e^k[b_k]$. Das ist aber ein *Widerspruch* zu ii) in ($\star$).

In beiden Fällen erhalten wir $\neg A \neq \overline{W}_e[B]$.

Mit der Eigenschaft ($\star\star$) folgt analog $\neg B \neq \overline{W}_e[A]$.

Aufgrund von Eigenschaft $(\star\star\star)$ folgen $A(x) \leftrightarrow \exists i\ D_{\alpha(i)}(x)$ und $B(x) \leftrightarrow \exists i\ D_{\beta(i)}(x)$. Wegen $\alpha(i)$ und $\beta(i)$ rekursiv ist damit A und B r.a. gezeigt.

ANMERKUNGEN :

Zur Idee der Konstruktion:

1. Fall: $i = 2n+2$: Setze $e := (n)_0$
(*"Schritt i hat Index e".*)

Es sei $x \in I\!N \setminus a_{i-1}$ minimal. (x existiert, da a_{i-1} endlich ist.)

Fall 1.1: Es gibt $z \leq i$ mit $\exists y \leq i\ (\ \exists g \leq i\ T_e^3(x,y,z,g)\ \wedge\ D_y \subseteq b_{i-1}\ \wedge\ D_z \subseteq \neg b_{i-1})$.
Wähle z_0 als das kleinste z mit dieser Eigenschaft.
Setze dann $a_i := a_{i-1} \cup \{x\}$ und $b_i := b_{i-1}$.

Problem 1: Konstruiere die b_k für $k > i$ so, daß $D_{z_0} \subseteq \neg b_k$ erfüllt ist.
Dann wäre i) in $(\star)$ für $s := i$ erreicht.

Fall 1.2: $x \notin \overline{W}_e^i[b_{i-1}]$:
Setze dann $a_i := a_{i-1}$ und $b_i := b_{i-1}$.

Problem 2: Konstruiere die a_k für $k > i$ so, daß $x \notin a_k$ gilt.
Problem 3: Fall 1.2 muß in unendlich vielen Schritten $k > i$ mit Index e eintreten.
Dann wäre ii) in $(\star)$ erreicht.

2. Fall: $i = 2n+1$: setze $f := (n)_0$.
Analog mit a und b vertauscht und f statt e.

Zur Lösung der Probleme:

Zu Problemen 1 und 3: Tritt im 1. Fall ($i = 2n+2$ und $e := (n)_0$) Fall 1.1 ein, so stelle für das dort auftretende D_{z_0} die Forderung auf, die b_k für $k > i$ so zu konstruieren, daß $D_{z_0} \subseteq \neg b_k$ erfüllt wird. Man nennt D_{z_0} ein *a-e requirement.* Das Problem besteht nun darin, in jedem Schritt $j > i$ b_j so zu konstruieren, daß für alle *a-g* requirements D_z ($g \in I\!N$) die Forderung $D_z \subseteq \neg b_j$ berücksichtigt wird. D.h. x müßte im 2. Fall (sonst $b_j = b_{j-1}$) so gewählt werden, daß $x \notin D_z$ für alle *a-g* requirements D_z erfüllt ist. Dies ist jedoch aus folgendem Grund problematisch: Die Bildung eines *neuen a-g* requirements in einem Schritt j (Fall 1.1) könnte bewirken, daß im 2. Fall in Schritt $j+1$ ein *anderes* x betrachtet werden müßte als in Schritt $j-1$. Um ii) in $(\star)$ zu erreichen, ist aber $x \notin \overline{W}_e^k[b_k]$ für unendlich viele $k < \omega$ und immer das *gleiche* x zu zeigen. Dies wäre dann unmöglich, falls während der Konstruktion das x *beliebig oft* "gewechselt" werden müßte. Diese Situation könnte aber auftreten.

In der unten durchgeführten Konstruktion wird nun durch den folgenden *Trick* (*Prioritätsmethode*) verhindert, daß das x beliebig oft "gewechselt" werden muß.

Trick: In einem Schritt j werden i.a. nicht für *alle b-f* bzw. *a-e* requirements die Forderungen berücksichtigt, sondern im 1. Fall mit Index e nur für *b-g* requirements D_z mit $g < e$ (, d.h. $D_z \subseteq \neg a_j$), dagegen werden die Forderungen im 2. Fall mit Index f nur für *a-g* requirements D_z mit $g \leq f$ (, d.h. $D_z \subseteq \neg b_j$) berücksichtigt. (Beachte den Unterschied: $g < e$ im 1. Fall und $g \leq f$ im 2. Fall! Dies ist für die Behauptung unten wichtig.) Man sagt: *b-g* hat *höhere Priorität* als *a-e* bzw. *a-g* hat *höhere Priorität* als *b-f*.

Es kann nun allerdings vorkommen, daß in einem Schritt i mit Index e die Forderung für ein b-g requirement D_z mit $g \geq e$ verletzt wird (Fall 1.1). Man sagt: D_z wird *in Schritt i inaktiv.* Entsprechend kann in einem Schritt j mit Index f ein a-g requirement für $g > f$ inaktiv werden (Fall 2.1). Ist dies geschehen, so wird im "nächsten" Schritt $k > j$ mit Index e, in dem Fall 1.1 eintritt, ein neues a-e requirement gebildet (wegen Problem 1). Es wird aber nur dann ein neues a-e requirement gebildet, so daß in jedem Schritt *höchstens ein* aktives a-e requirement vorhanden ist.

Konsequenzen : Mit diesem Trick wird erreicht, daß während der gesamten Konstruktion für jedes e und $f \in \mathbb{N}$ nur *endlich* viele a-e und b-f requirements gebildet werden (siehe Behauptung unten).

Das hat zur Folge, daß für alle $e \in \mathbb{N}$ eine Schranke $s < \omega$ existiert, so daß in *keinem* Schritt $k \geq s$ ein *neues* a-e requirement gebildet wird. Entsprechendes gilt für b-f requirements.

Zu Problem 2: Wähle eine *disjunkte* Zerlegung von $\mathbb{N}$ in *unendliche, rekursive* Teilmengen N_e für $e \in \mathbb{N}$, z.B. $N_e := \{z \in \mathbb{N} \mid (z)_0 = e\}$. Betrachte dann in einem Schritt i mit Index e z.B. im 1. Fall nur solche x mit $x \in N_e$ statt allgemein $x \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a_i = a_{i-1} \cup (N_e \cap a_i)$. Für $x \in N_e$ ist $x \in a_j \setminus a_{j-1}$ also *nur* in einem Schritt j mit Index e möglich.

Bevor wir die Konstruktion durchführen, stellen wir die im folgenden benötigten Definitionen zusammen:

Schritt i hat Index e gdw. $i = 2n+2$ und $(n)_0 = e$ oder $i = 2n+1$ und $(n)_0 = e$.

a-e requirements sind endliche Teilmengen D_z von $\mathbb{N}$, für die in einem Schritt i mit Index e die Forderung aufgestellt wird, die b_k für $k > i$ so zu konstruieren, daß $D_z \subseteq \neg b_k$ erfüllt ist.

Ein a-e requirement D_z heißt *aktiv in Schritt i* gdw. $D_z \subseteq \neg b_{i-1}$; sonst heißt es *inaktiv in Schritt i.*

Ein a-e requirement heißt *permanent* gdw. es in keinem Schritt inaktiv wird.

Entsprechendes wird für a und b vertauscht und f statt e definiert.

Für $e \in \mathbb{N}$ definieren wir: $N_e := \{z \in \mathbb{N} \mid (z)_0 = e\}$.
Damit ist $\bigcup_{e \in \mathbb{N}} N_e$ eine *disjunkte* Zerlegung von $\mathbb{N}$.

Nun zur Konstruktion der beiden Ketten:

$i = 0$: Setze $a_0 := b_0 := \emptyset$.

$i > 0$: Es seien für alle $j < i$ a_j und b_j schon konstruiert.

1. Fall: $i = 2n + 2$ *Setze* $e := (n)_0$.

Es sei $x \in N_e \setminus a_{i-1}$ minimal mit: $x \notin D_z$ für alle *b-g* requirements D_z mit $g < e$.

(x existiert, da N_e unendlich, a_{i-1} aber endlich ist und nur endlich viele (höchstens $\frac{i}{2}$) *b-f* requirements existieren.)

Fall 1.1: *Es gibt kein (in Schritt i) aktives a-e requirement,* *und*

es gibt $z \leq i$ *mit* $\exists y \leq i$ $(\exists g \leq i\ T_e^3(x, y, z, g) \ \wedge\ D_y \subset b_{i-1} \ \wedge\ D_z \subseteq \neg b_{i-1})$.

Wähle z_0 als das kleinste z mit dieser Eigenschaft.

Setze dann $a_i := a_{i-1} \cup \{x\}$ und $b_i := b_{i-1}$ und bilde das *a-e* requirement D_{z_0}.

Fall 1.2: *Es gibt ein (in Schritt i) aktives a-e requirement* *oder*

$x \notin \overline{W}_e^i[b_{i-1}]$

Setze dann $a_i := a_{i-1}$ und $b_i := b_{i-1}$.

2. Fall: $i = 2n + 1$ *Setze* $f := (n)_0$.

Es sei $x \in N_f \setminus b_{i-1}$ minimal mit: $x \notin D_z$ für alle *a-g* requirements D_z mit $g \leq f$.

Weiter analog mit a und b vertauscht und f statt e.

Zum Nachweis von $(\star)$ und $(\star\star)$ beweisen wir:

Behauptung : Für alle $e, f \in \mathbb{N}$ gilt:
Es werden nur endlich viele *a-e* und *b-f* requirements gebildet.
($\Longleftrightarrow$ Es werden nur endlich viele *a-e* und *b-f* requirements inaktiv.)

Beweis : Durch Induktion über $e, f \in \mathbb{N}$ (in der Reihenfolge *a*-0, *b*-0, *a*-1, *b*-1, usw.):

a-0 : ein *a*-0 requirement kann *nie* inaktiv werden ($0 \leq f$ im 2. Fall!), d.h. es kann *höchstens ein* a-0 requirement gebildet werden.

b-f : Es sei die Behauptung schon für a-0, b-0, a-1, ..., b-$(f-1)$, a-e gezeigt. In einem Schritt i kann ein b-f requirement nur dann inaktiv werden, wenn $a_i \neq a_{i-1}$ gilt, also ein *neues* a-g requirement für $g \leq f$ gebildet wird (Fall 1.1 mit Index g). Da nach Induktionsvoraussetzung für alle $g \leq f$ aber nur endlich viele a-g requirements gebildet werden, können auch nur endlich viele b-f requirements inaktiv werden. Daraus folgt die Behauptung für b-f, denn ein b-f requirement kann nur in einem Schritt gebildet werden, in dem kein aktives b-f requirement vorhanden ist.

a-$(e+1)$: Analog mit a und b vertauscht, $e+1$ statt f und $<$ statt $\leq$.

Zu $(\star)$: Es sei $e \in \mathbb{N}$.

Fall a): Es gibt ein permanentes a-e requirement D_z. Es sei D_z in Schritt $s \geq z$ gebildet worden (Fall 1.2). Für das dort betrachtete x gelten dann $x \in a_s$, $\exists y \leq s\ (T_e^3(x,y,z,g)\ \wedge\ D_y \subseteq b_s)$ und $D_z \subseteq \neg b_k$ für alle $k \geq s$.
Damit ist i) in $(\star)$ gezeigt.

Fall b): Es gibt kein permanentes a-e requirement. Sei $s < w$ so groß, daß beim Schritt s kein aktives a-e requirement existiert und in keinem Schritt $k \geq s$ ein neues a-e requirement oder b-g requirement (für $g < e$) gebildet wird. Für alle $k \geq s$ mit Index e tritt also im 1. Fall der Fall 1.2 ein (sonst würde ein neues a-e requirement gebildet). Es ist also $N_e \setminus a_k = N_e \setminus a_s$ für alle $k \geq s$. Weil keine neuen b-g requirements $(g < f)$ mehr gebildet werden, wird für alle $k \geq s$ mit Index e im 1. Fall das gleiche $x = x_0$ betrachtet. Weil es kein aktives a-e requirement gibt und Fall 1.2 eintritt, ist also für alle diese k ($k \geq s$ mit Index e, 1. Fall; das sind unendlich viele): $x_0 \notin \overline{W}_e^k(b_k)$. Damit ist ii) in $(\star)$ gezeigt.

Zu $(\star\star)$: Analog mit a und b vertauscht und f statt e.

Zu $(\star\star\star)$: Der Beweis wird ähnlich zu demjenigen von Theorem 5 geführt (Übung 1).
$\square$

Für die r.a. Turinggrade haben wir das folgende Analogon zu Satz 1:

Satz 12 : $(\mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}, \leq)$ *ist ein oberer Halbverband*

a) mit Minimum 0,

b) mit Maximum $0'$ *und*

c) der Mächtigkeit $\aleph_0$.

BEWEIS : Vergleiche mit dem Beweis zu Satz 1. Das dort angegebene $\sup(a,b)$ ist für a und b r.a. ebenfalls r.a., denn sind $A, B \subseteq \mathbb{N}$ r.a., so auch $2A$ und $2B+1$ und damit auch $2A \cup (2B+1)$.
a) und b) sind schon gezeigt.
c) Es gibt nur $\aleph_0$ viele r.a. Teilmengen von $\mathbb{N}$. Daß $\mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ unendlich ist, folgt aus Theorem 15 unten. $\square$

Zum Abschluß dieses Kapitels geben wir noch einige Ergebnisse ohne Beweise an. Mit einer Erweiterung der Prioritätsmethode (auf englisch: infinite injury; Prioritätsmethode auf englisch: finite injury oder priority) kann das folgende Theorem bewiesen werden:

Theorem 13 (Splitting Theorem von Sacks) : *Es seien $A, D \subseteq \mathbb{N}$ r.a., nicht rekursiv.*
Dann existieren $B, C \subseteq \mathbb{N}$ r.a. mit $A = B \mathbin{\dot\cup} C$, $D \not\leq_T B$ und $D \not\leq_T C$.

Folgerung 14 : *Es seien $a, d \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a, d \neq 0$.*
Dann existieren $b, c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a = b \cup c$, $d \not\leq b$ und $d \not\leq c$.

Bemerkung : Wählt man in der Folgerung $a = d$, so erhält man b und c mit $a = b \cup c$ und b und c unvergleichbar, d.h. $b \not\leq c$ und $c \not\leq b$.

Theorem 15 (Density Theorem von Sacks) : *Die r.a. Turinggrade sind dicht geordnet,*
d.h. für alle $a, b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a < b$ existiert ein $c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a < c < b$.

Definition : *Es sei $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$. a heißt* **low** *gdw. $a' = 0'$*
und a heißt **high** *gdw. $a' = 0''$.*

Bemerkung :
a) $0' \leq a'$ für alle $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$.
b) $a' \leq 0''$ für alle $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$.
c) 0 ist low, und $0'$ ist high.

BEWEIS : Für alle $a, b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ mit $a \leq b$ folgt $a' \leq b'$, denn seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ mit $a = \deg A$ und $b = \deg B$; dann folgt wegen $A' \in \Sigma_1^0[A]$ und $A \leq_T B$ $A' \in \Sigma_1^0[B]$, also $A' \leq_T B'$ und damit $a' \leq b'$. Daraus erhalten wir a) und b) wegen $0 \leq a$ für alle $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{/\equiv_T}$ bzw. $a \leq 0'$ für alle $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$. c) ist klar. $\square$

Satz 16 :

Es existiert $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a \neq 0$ und a low.
Es existiert $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})_{r.a./\equiv_T}$ mit $a \neq 0'$ und a high.

Die high Turinggrade sind genau diejenigen, die eine Menge mit den folgenden Eigenschaften enthalten (siehe Satz 18):

Definition : *$A \subseteq \mathbb{N}$ r.a. heißt* **maximal** *gdw. $\mathbb{N} \setminus A$ unendlich ist und für alle r.a. $B \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \subseteq B \implies B \setminus A$ ist endlich oder $\mathbb{N} \setminus B$ ist endlich.*

Bemerkung : A maximal $\implies A$ simpel.

Beweis: Es sei A maximal. Nehmen wir an, A sei nicht simpel. Dann existiert eine unendliche r.a. Menge C mit $C \cap A = \emptyset$. Nach § 5, Lemma 2 a) gibt es eine injektive rekursive Funktion f mit $C = f[\mathbb{N}]$. Betrachte $D := \{f(2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und setze $B := A \cup D$. Dann ist B r.a. mit $A \subseteq B$, aber $B \setminus A$ und $\mathbb{N} \setminus B$ sind unendlich. Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß A maximal ist.
□

Theorem 17 (Friedberg) : *Es gibt maximale Mengen.*

Bemerkung : Für alle r.a. Turinggrade a gilt:
$a \neq 0 \implies$ es existiert eine simple Menge D mit $D \in a$.

Beweis : Es seien $a \neq 0$ r.a. Turinggrad und A r.a. mit $a = \deg A$. Dann existiert eine injektive, rekursive Funktion f mit $A = f[\mathbb{N}]$ (§ 5, Lemma 2 a)). Nach § 6, Übung 5 ist $D = \{x \mid \exists y > x\, f(y) < f(x)\}$ simpel. Aufgrund des Beispiels aus § 8 folgt $A \equiv_T D$ (§ 8, Satz 1). □

Satz 18 (Martin) : *Für alle r.a. Turinggrade a gilt:*
a high $\iff$ es existiert eine maximale Menge M mit $M \in a$.

§ 10 Die analytische Hierarchie

In § 8 hatten wir uns mit relativer Berechenbarkeit beschäftigt. Zu vorgegebenem $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ haben wir den Begriff "rekursiv in h" definiert. In diesem Kapitel wollen wir die Theorie in dem Sinne erweitern, daß wir h nicht fest vorgeben, sondern als variabel ansehen.

Wir betrachten im folgenden partielle Abbildungen, deren Definitionsbereich auch Funktionen
$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enthält:

Definition : *Es seien $n, r < \omega$. Wir setzen $\mathcal{R} := {}^{I}N\mathbb{N}$*

(Elemente von $\mathcal{R}$ werden im folgenden mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnet.)

$F : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \hookrightarrow \mathbb{N}$ heißt **partielles Funktional**.

Analog zum Begriff der partiell rekursiven Funktion definieren wir:

Definition : *Ein partielles Funktional $F : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \hookrightarrow N$heißt* **partiell rekursiv** *gdw. F sich aus den Grundfunktionen R0 durch die Operationen R1, R2 und R3 ergibt. Dabei sind R0, R1, R2 und R3 analog wie früher definiert:*

R0 :

$$\begin{aligned} N^{1,0}(x) &:= x + 1 \\ I_i^{n,r}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) &:= x_i \quad (i \le n) \\ C_0^{0,0} &:= 0 \\ Eins^{1,1}(x, \alpha) &:= \alpha(x) \end{aligned}$$

R1 (Einsetzung) :

Wenn H (k,r-stellig) und $F_1, \ldots, F_k$ (n,r-stellig) partiell rekursive Funktionale sind, dann ist auch F - definiert durch

$$F(\vec{x}, \vec{\alpha}) :\simeq H(F_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), \ldots, F_k(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha})$$

- ein partiell rekursives Funktional.

R2 (Induktion) :

Wenn H (n+2,r-stellig) und G (n,r-stellig) partiell rekursive Funktionale sind, dann ist auch F - definiert durch

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, 0, \vec{\alpha}) \quad &:\simeq G(\vec{x}, \vec{\alpha}) \\ F(\vec{x}, y + 1, \vec{\alpha}) &:\simeq H(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y, \vec{\alpha}), \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

- ein partiell rekursives Funktional.

R3 (μ-Operator) :

Wenn G (n+1,r-stellig) ein partiell rekursives Funktional ist, dann ist auch F - definiert durch

$$F(\vec{x}, \vec{\alpha}) :\simeq \mu y \, (G(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \simeq 0)$$

- ein partiell rekursives Funktional.

Die folgenden Beispiele sind nach § 8 klar:

BEISPIELE :

1) $F : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{N}$ ist partiell rekursives Funktional
$\Longleftrightarrow$ es existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $F(\vec{x}, \alpha) \simeq \varphi_e^1[\alpha](\vec{x})$ für alle $\alpha \in \mathcal{R}$.

2) $f : I\!N^n \hookrightarrow I\!N$ ist partiell rekursiv in $\alpha \in \mathcal{R}$
$\Longleftrightarrow$ es existiert ein partiell rekursives Funktional $F : I\!N^n \times \mathcal{R}$ mit $f(\vec{x}) \simeq F(\vec{x}, \alpha)$.

Analog zu früher definieren wir:

Definition :
1) Ein **rekursives Funktional** *ist ein partiell rekursives Funktional, das total ist.*
2) $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ *heißt* **rekursiv** *gdw. das charakteristische Funktional* K_A *von* A *rekursiv ist.*
3) $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ *heißt* **rekursiv aufzählbar (r.a.)** *gdw. eine rekursive Relation* $R \subseteq I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r$
existiert mit $A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists y\, R(\vec{x}, y, \vec{\alpha})$.

Da wir auch Funktionsvariablen zulassen, hat es Sinn, auch Abbildungen nach $\mathcal{R}$ zu betrachten:

Definition : *Eine Abbildung* $\mathcal{F} : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \longrightarrow \mathcal{R}$ *heißt* **rekursiver Operator** *gdw.* $F_{\mathcal{F}} : I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r \longrightarrow I\!N$ *mit* $(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \mapsto \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha})\,(y)$ *ein rekursives Funktional ist.*

Es lassen sich Resultate für r.a. Relationen im früheren Sinne (vgl. § 5) auf die neue Situation erweitern. Dazu die folgende Definition:

Definition : *Es seien* $A \subseteq I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r$ *und* $F : I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ *ein partielles Funktional.*
a) $\mathrm{dom}(A) := \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r \mid \exists y\, A(\vec{x}, y, \vec{\alpha})\}$ *heißt* **Domain von A**.
b) $\mathit{Graph}(F) := \{(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r \mid F(\vec{x}, \vec{\alpha}) \simeq y\}$ *heißt* **Graph von F**.
$\mathrm{dom}(F) := \mathrm{dom}(\,\mathit{Graph}(F)\,)$ *heißt* **Domain von F**.
c) F **uniformisiert** A *gdw.* $\mathit{Graph}(F) \subseteq A$ *und* $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(A)$ *erfüllt sind.*

Satz 1 : *Es sei* $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$.
a) (Uniformisierungssatz) : Jedes r.a. $B \subseteq I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r$ *ist durch ein partiell rekursives Funktional*
$F : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \hookrightarrow I\!N$ *uniformisierbar.*
b) A *ist rekursiv gdw.* A *und* $\neg A$ *r.a. sind.*
c) $F : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \hookrightarrow I\!N$ *ist partiell rekursiv gdw.* $\mathit{Graph}(F)$ *r.a. ist.*

d) A ist r.a. gdw. $A = \mathrm{dom}(F)$ für ein partiell rekursives Funktional F.
e) A ist r.a. gdw. ein r.a. $R \subseteq \mathbb{N}^{n+r}$ existiert mit $A(\vec{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \longleftrightarrow \exists k\, R(\vec{x}, \overline{\alpha_1(k)}, \ldots, \overline{\alpha_r(k)})$.

Dabei kann R so gewählt werden, daß für alle $l < \omega$ und für alle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in \mathbb{N}^{n+l+r}$
$R(\vec{x}, z_1, \ldots, \langle y_0, \ldots, y_{l-1}\rangle, \ldots, z_r) \longrightarrow R(\vec{x}, z_1, \ldots, \langle y_0, \ldots, y_{l-1}, y_l\rangle, \ldots, z_r)$
erfüllt ist.

BEWEIS : Analog zu früher. Siehe § 5, Satz 3 und Folgerung 4 und § 8, Lemma 8. ▯

Wegen e) haben wir die folgende Normalform:

Definition : *Es seien $n, r < \omega$.*
$\overline{W}^{n,r}(e, \vec{x}, \vec{\alpha}) :\longleftrightarrow \exists k\, W^{n+r}(e, \vec{x}, \overline{\alpha_1(k)}, \ldots, \overline{\alpha_r(k)})$.
$\overline{W}_e^{n,r} := \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \mid \overline{W}^{n,r}(e, \vec{x}, \vec{\alpha})\}$ *heißt* **e-te** *(n,r-stellige)* **r.a. Relation**.

Satz 2 :
a) (Universelle Relation:) Jede r.a. Menge $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$ hat die Form $\overline{W}_e^{n,r}$ für ein $e \in \mathbb{N}$.
b) ($\bar{s}$-m-n-Theorem:) Für alle $n, m, r < \omega$ existiert eine rekursive Funktion $\bar{s}^m_{n,r}$ mit
$\overline{W}_e^{n+m,r}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \longleftrightarrow \overline{W}^{n,r}_{\bar{s}^m_{n,r}(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$
.

BEWEIS : Mit Satz 1 e) und Satz 5 aus § 5. ▯

Die Abgeschlossenheitseigenschaften r.a. Relationen von früher (§ 5, Lemma 1) gelten in der erweiterten Situation analog:

Lemma 3 :

a) Jede rekursive Relation ist r.a.

b) $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathcal{R}^r$ *r.a. und* $F : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \to \mathbb{N}$ *rekursives Funktional*
$\Longrightarrow A(\vec{x}, F(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha})$ *r.a.*

c) A, B *r.a.* $\Longrightarrow A \vee B$ *und* $A \wedge B$ *r.a.*

d) $A(\vec{x}, y, \vec{\alpha})$ *r.a.* $\Longrightarrow \exists y\, A(\vec{x}, y, \vec{\alpha})$ *r.a.*

e) $A(\vec{x}, y, \vec{\alpha})$ *r.a.* $\Longrightarrow \forall z < y\, A(\vec{x}, z, \vec{\alpha})$ *r.a.*

Beweis : Analog zu früher. $\square$

Neu ist die Abgeschlossenheit unter Einsetzung rekursiver Operatoren:

Lemma 4 : *Es seien* $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}$ *r.a. und* $\mathcal{F} : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ *rekursiver Operator.*
Dann ist $A(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}))$ *r.a.*

Beweis : Es sei R r.a. wie in e) von Satz 1, also mit $A(\vec{x}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \longleftrightarrow \exists k\, R(\vec{x}, \overline{\alpha(k)}, \overline{\beta(k)})$.
Dann ist $A(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha})) \longleftrightarrow \exists k, s\ (\ lg(s) = k\ \wedge\ R(\vec{x}, \overline{\alpha_1(k)}, \ldots, \overline{\alpha_r(k)}, s)\ \wedge\ \forall i < k\ \underbrace{\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha})(i) = (s)_i}_{\text{r.a. nach 1c), 2b)}}\ )$. $\square$

Wir erweitern nun Σ^0_m und Π^0_m auf die neue Situation:

Definition : *Es sei* $m < \omega$. $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$ *heißt*
Σ^0_m*-Relation gdw.* $A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \exists y_1\, \forall y_2\, \exists y_3 \ldots Q y_m\, R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m, \vec{\alpha})$ *für ein rekursives* R,
Π^0_m*-Relation gdw.* $A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \forall y_1\, \exists y_2\, \forall y_3 \ldots Q y_m\, R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m, \vec{\alpha})$ *für ein rekursives* R.
Hierbei ist $Q \in \{\forall, \exists\}$.
Σ^0_m *und* Π^0_m *bezeichnen die Klassen aller* Σ^0_m*- bzw.* Π^0_m*-Relationen.*
$\Delta^0_m := \Sigma^0_m \cap \Pi^0_m$
$\bigcup_{m<\omega} \Sigma^0_m = \bigcup_{m<\omega} \Pi^0_m$ *nennen wir die Klasse der* **arithmetischen Mengen**.

Die Abgeschlossenheitseigenschaften von früher gelten in der erweiterten Situation analog; dazu kommt noch die Abgeschlossenheit unter Einsetzung rekursiver Operatoren:

Satz 5 (Abgeschlossenheitseigenschaften) : *Es sei $m < \omega$.*

a) $\Sigma^0_m \cup \Pi^0_m \subseteq \Delta^0_{m+1}$

b) $A \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longleftrightarrow \neg A \in \Pi^0_m\ (\Sigma^0_m)$

c) Es seien $A \subseteq I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r$ und $F : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \to I\!N$ rekursives Funktional.
$A(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longrightarrow A(\vec{x}, F(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m)$

d) Es seien $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}$ und $\mathcal{F} : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ rekursiver Operator.
$A(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longrightarrow A(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha})) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m)$

e) $A, B \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longrightarrow A \vee B, A \wedge B \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m)$

f) $A(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longrightarrow \exists y\, A(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\forall y\, A(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \Pi^0_m)$

g) $A(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\Pi^0_m) \Longrightarrow \forall z < y\, A(\vec{x}, z, \vec{\alpha}) \in \Sigma^0_m\ (\exists z < y\, A(\vec{x}, z, \vec{\alpha}) \in \Pi^0_m)$

BEWEIS : a) durch Einführung blinder Variablen analog zu § 7, Lemma 2. d) ist klar wegen Lemma 4 und sonst analog zu § 7, Satz 1. ▯

Auch die Existenz einer universellen Σ^0_m-Relation (§ 7, Lemma 3) bleibt erhalten:

Lemma 6 : *Es seien $n, r < \omega$.*
Für alle $m > 0$ existiert eine **universelle** *Σ^0_m-Relation $U^{n,r}_m \subset I\!N \times I\!N^n \times \mathcal{R}^r$.*

BEWEIS : Wir verwenden die oben definierte Normalform $\overline{W}^{n,r}_e$.

Setze $$U^{n,r}_m(e, \vec{x}, \vec{\alpha}) :\longleftrightarrow \exists y_1\, \forall y_2 \ldots Q y_{m-1} \begin{cases} \overline{W}^{n+m-1,r}_e(\vec{x}, y_1, \ldots, y_{m-1}, \vec{\alpha})\,, & Q = \forall \\ \neg \overline{W}^{n+m-1,r}_e(\vec{x}, y_1, \ldots, y_{m-1}, \vec{\alpha})\,, & Q = \exists\,. \end{cases}$$ ▯

Folgerung 7 : *Für alle $n, r < \omega$, nicht beide $= 0$, und alle $m > 0$ ist* $\Sigma^0_m \not\subseteq \Pi^0_m$.

BEWEIS : Die folgende Relation B ist Σ^0_m aber nicht Π^0_m (Diagonalargument):
Ist $n > 0$, so setze $B(\vec{x}, \vec{\alpha}) :\longleftrightarrow U^{n,r}(x_1, \vec{x}, \vec{\alpha})$.
Ist $n = 0$, so setze $B(\vec{\alpha}) :\longleftrightarrow U^{0,r}(\alpha_1(0), \vec{\alpha})$. ▯

Aus § 8 ist klar:

Bemerkung : $A \in \Sigma^0_m[\alpha] \Longleftrightarrow$ es existiert ein $B \in \Sigma^0_m$ mit $A(\vec{x}) \leftrightarrow B(\vec{x}, \alpha)$.

Wir erweitern die Theorie jetzt, indem wir auch Quantifizierung über Funktionsvariablen zulassen:

Definition : *Es sei $m < \omega$. $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ heißt*
Σ^1_m-Relation gdw. $A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \exists \beta_1\, \forall \beta_2\, \exists \beta_3 \ldots Q \beta_m\, R(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ *für*

ein arithmetisches R,
Π^1_m*-Relation gdw.* $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow \forall\beta_1\,\exists\beta_2\,\forall\beta_3\ldots Q\beta_m\,R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta_1,\ldots,\beta_m)$ *für ein arithmetisches R.*
Hierbei ist $Q \in \{\forall,\exists\}$.
Σ^1_m *und* Π^1_m *bezeichnen die Klasse aller* Σ^1_m*- bzw.* Π^1_m*-Relationen.*
$\Delta^1_m := \Sigma^1_m \cap \Pi^1_m$
$\bigcup_{m<\omega}\Sigma^1_m = \bigcup_{m<\omega}\Pi^1_m$ *nennen wir die Klasse der* **analytischen Mengen** *oder auch der* **projektiven Mengen**.

Neben den Abgeschlossenheitseigenschaften, analog zu denjenigen aus Satz 5, haben wir die Abgeschlossenheit unter $\forall y$ und $\exists y$:

Satz 8 (Abgeschlossenheitseigenschaften) : *Es sei $m<\omega$.*
a) $\Sigma^1_m \cup \Pi^1_m \subseteq \Delta^1_{m+1}$
b) $A \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \iff \neg A \in \Pi^1_m\,(\Sigma^1_m)$
c) Es seien $A \subseteq I\!N^n \times I\!N \times \mathcal{R}^r$ *und* $F : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \to I\!N$ *rekursives Funktional.*
$A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \Longrightarrow A(\vec{x},F(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m)$
d) Es seien $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}$ *und* $\mathcal{F} : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ *rekursiver Operator.*
$A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \Longrightarrow A(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{F}(\vec{x},\vec{\alpha})) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m)$
e) $A,B \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \Longrightarrow A \vee B, A\wedge B \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m)$
f) $A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \Longrightarrow \exists y\,A(\vec{x},y,\vec{\alpha})\,,\,\forall y\,A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m)$
g) Für $m>0$: $A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \in \Sigma^1_m\,(\Pi^1_m) \Longrightarrow \exists\beta\,A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \in \Sigma^1_m\,(\forall\beta\,A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \in \Pi^1_m)$

Im Beweis verwenden wir die folgenden beiden rekursiven Operatoren:

Lemma 9 :
a) $\mathcal{F} : I\!N \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *mit* $\mathcal{F}(i,\alpha)(x) := (\,\alpha(x)\,)_i$ *ist ein rekursiver Operator.*
Für $\mathcal{F}(i,\alpha)$ *schreiben wir auch* $(\alpha)_i$.
b) $\mathcal{F} : I\!N \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mit $\mathcal{F}(z,\alpha)(x) := \alpha(\,\langle x,z\rangle\,)$ ist ein rekursiver Operator.
Für $\mathcal{F}(z,\alpha)$ schreiben wir auch $[\alpha]_z$.

Beweis :
a) $F_\mathcal{F} : I\!N \times I\!N \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mit $F_\mathcal{F}(i,x,\alpha) = (\,Eins^{1,1}(x,\alpha)\,)_i$ ist ein rekursives Funktional (R1).
b) $F_\mathcal{F} : I\!N \times I\!N \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mit $F_\mathcal{F}(z,x,\alpha) = Eins^{1,1}(\,\langle x,z\rangle,\alpha\,)$ ist ein rekursives Funktional (R1). ∎

Beweis (von Satz 8) :
a) Durch Einführung blinder Variabler: Es sei $A \in \Sigma^1_m$ mit $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta_1\,\forall\beta_2\ldots Q\beta_m\,R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta_1,\ldots,\beta_m)$

für R rekursiv. Dann ist wegen

$$A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \underbrace{\forall\beta_0\,\exists\beta_1\,\forall\beta_2\ldots Q\beta_m R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta_1,\ldots,\beta_m)}_{\in\Pi^1_{m+1}} \text{ und } A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \underbrace{\exists\beta_1\,\forall\beta_2\ldots Q\beta_m\,\overline{Q}\beta_{m+1} R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta_1,\ldots,\beta_m)}_{\in\Sigma^1_{m+1}}$$

(wobei $\overline{Q} = \forall$, falls $Q = \exists$ und $\overline{Q} = \exists$, falls $Q = \forall$) $A \in \Delta^1_{m+1}$ erfüllt.
Für $A \in \Pi^1_m$ geht man analog vor.
b) Klar (vgl. § 7 Satz 1 a)).
c) und d) Klar nach Satz 5 c) bzw. d).
e) Durch Induktion über n, simultan für Σ^1_m und Π^1_m:
$m = 0$: Klar nach Satz 5 e)
$m \to m+1$: Es seien $A, B \in \Sigma^1_{m+1}$ mit $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\, A'(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)$ und $B(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\, B'(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)$ für $A', B' \in \Pi^1_m$. Dann gilt

$$A\vee B\,(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\,\underbrace{(\,A'(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \vee B'(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)\,)}_{\in\Pi^1_m \text{ (Ind.-Ann.)}} \text{ und } A\wedge B\,(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\,\underbrace{(\,A'(\vec{x},\vec{\alpha},(\beta)_0) \wedge B'(\vec{x},\vec{\alpha},(\beta)_1\,)}_{\in\Pi^1_m \text{ (Ind.-Ann. und d))}}.$$

Der Π^1_{m+1}-Fall folgt daraus mit b).
f) $m = 0$: Klar nach Definition der arithmetischen Relationen.
$m > 0$: Es sei $A \in \Sigma^1_{m+1}$ mit $A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\, B(\vec{x},y,\vec{\alpha},\beta)$ für $B \in \Pi^1_m$. Dann gelten:

1) $$\exists y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\,\underbrace{B(\vec{x},(\beta)_1(0),\vec{\alpha},(\beta)_0)}_{\in\Pi^1_m \text{ nach c) und d)}},$$

also $\exists y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_{m+1}$.
Der Fall $A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Pi^1_{m+1} \Longrightarrow \forall y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Pi^1_{m+1}$ folgt daraus mit b). $(\star)$

2) $$\forall y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \leftrightarrow \exists\beta\,\underbrace{\forall y\, B(\vec{x},y,\vec{\alpha},[\beta]_y)}_{\in\Pi^1_m \text{ nach } (\star) \text{ und d)}},$$

also $\forall y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Sigma^1_{m+1}$.
Der Fall $A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Pi^1_{m+1} \Longrightarrow \exists y\, A(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \in \Pi^1_{m+1}$ folgt daraus mit b).
g) Nach Voraussetzung ist $m > 0$. Es sei $A \in \Sigma^1_{m+1}$ mit $A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \leftrightarrow \exists\gamma\, B(\vec{x},\vec{\alpha},\beta,\gamma)$ für $B \in \Pi^1_m$. Dann ist

$$\exists\beta\,\underbrace{A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \leftrightarrow \exists\gamma\, B(\vec{x},\vec{\alpha},(\gamma)_0,(\gamma)_1)}_{\in\Pi^1_m \text{ nach d)}},$$

also $\exists\beta\, A(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \in \Sigma^1_{m+1}$. $\square$

Aufgrund des folgenden Lemmas haben wir eine Normalform für analytische Relationen:

Lemma 10 : *Es seien $m > 0$ und $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$.*
$A \in \Sigma^1_m \implies$ es existiert ein $e < \omega$ mit

$$A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \exists\beta_1 \forall\beta_2 \ldots Q\beta_m \begin{cases} \overline{W}_e^{n,r+m}(\vec{x}, , \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m)\,, & Q = \forall \\ \neg\overline{W}_e^{n,r+m}(\vec{x}, , \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m)\,, & Q = \exists\,. \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für $A \in \Pi^1_m$.

BEWEIS : Es sei $A \in \Sigma^1_m$. Dann ist

$$A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \exists\beta_1\forall\beta_2 \ldots \left\{ {\forall\beta_m \exists y \atop \exists\beta_m \forall y} \right\} B(\vec{x}, y, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m) \text{ mit } B \in \left\{ {\Pi^0_n \atop \Sigma^0_n} \right\} \text{ für ein } n < \omega.$$

(Dies gilt o.B.d.A. wegen Satz 5 a).)
Wir betrachten zunächst die Relation $\left\{ {\forall\beta_m \exists y \atop \exists\beta_m \forall y} \right\} B(\vec{x}, y, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m)$.
Durch Induktion über k zeigen wir unten:
Für alle $C \in \Sigma^0_k$ (Π^0_k) existiert ein rekursives R mit

$$\exists\gamma\,\forall z\, C(\vec{x}, z, \vec{\alpha}, \gamma) \longleftrightarrow \exists\delta\,\forall u\, R(\vec{x}, u, \vec{\alpha}, \delta)\,.$$

Dann folgt: Es existiert ein rekursives R mit

$$\left\{ {\forall\beta_m \exists y \atop \exists\beta_m \forall y} \right\} B(\vec{x}, y, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_m) \longleftrightarrow \left\{ {\forall\delta\, \exists u\, \neg \atop \exists\delta\, \forall u} \right\} R(\vec{x}, u, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \delta).$$

Für $e < \omega$ mit $\exists u\, \neg R(\vec{x}, u, \vec{\gamma}) \longleftrightarrow \overline{W}_e^{n,r+m}(\vec{x}, \vec{\gamma})$ erhalten wir dann

$$A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \exists\beta_1\,\forall\beta_2 \ldots \left\{ {\exists\beta_{m-1}\, \forall\delta \atop \forall\beta_{m-1}\, \exists\delta\, \neg} \right\} \overline{W}_e^{n,r+m}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \delta)\,,$$

also die Behauptung.
Der Induktionsbeweis wird simultan für Σ^0_n und Π^0_n geführt:
$n = 0$: Klar.
$n \to n+1$:
Es sei $C \in \Sigma^0_{n+1}$ mit $C(\vec{x}, z, \vec{\alpha}, \gamma) \longleftrightarrow \exists v D(\vec{x}, z, v, \vec{\alpha}, \gamma)$ für $D \in \Pi^0_n$.
Dann ist

$$\exists\gamma\,\forall z\, C(\vec{x}, z, \vec{\alpha}, \gamma) \longleftrightarrow \exists\delta\,\forall z\, \underbrace{D(\vec{x}, z, (\delta)_0(z), \vec{\alpha}, (\delta)_1)}_{\in\Pi^0_n \text{ nach Satz 5c) und d)}} \longleftrightarrow \exists\delta\,\forall u\, R(\vec{x}, u, \vec{\alpha}, \delta)$$

für ein rekursives R (nach Ind.-Ann.).
Es sei $C \in \Pi^0_{n+1}$ mit $C(\vec{x}, z, \vec{\alpha}, \gamma) \longleftrightarrow \forall v\, D(\vec{x}, z, v, \vec{\alpha}, \gamma)$ für $D \in \Sigma^0_n$.
Dann ist

$$\exists\gamma\,\forall z\, C(\vec{x}, z, \vec{\alpha}, \gamma) \longleftrightarrow \exists\gamma\,\forall u\, \underbrace{D(\vec{x}, (u)_0, (u)_1, \vec{\alpha}, \gamma)}_{\in\Sigma^0_n \text{ nach Satz 5c)}} \longleftrightarrow \exists\delta\,\forall u\, R(\vec{x}, u, \vec{\alpha}, \delta)$$

für ein rekursives R (nach Ind.-Ann.).

Die Aussage für $A \in \Pi^1_m$ folgt mit Satz 8 b). $\square$

Es folgt die Existenz universeller Σ^1_m-Relationen:

Satz 11 : *Es seien $n, r < \omega$.*
Für alle $m > 0$ existiert eine **universelle** Σ^1_m*-Relation* $\overline{U}^{n,r}_m \subseteq I\!N \times I\!N^n \times \mathcal{R}^r$.

BEWEIS :

Setze $$\overline{U}^{n,r}_m(e, \vec{x}, \vec{\alpha}) :\longleftrightarrow \exists\beta_1 \, \forall\beta_2 \dots Q\beta_m \begin{cases} \overline{W}^{n,r+m}_e(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta_1, \dots, \beta_m)\,, & Q = \forall \\ \neg\overline{W}^{n,r+m}_e(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta_1, \dots, \beta_m)\,, & Q = \exists\,. \end{cases}$$ ▯

Folgerung 12 : *Für alle $n, r < \omega$, nicht beide $= 0$, und alle $m > 0$ ist* $\Sigma^1_m \not\subseteq \Pi^1_m$.

BEWEIS : Analog zu dem Beweis von Folgerung 7. ▯

§ 11 Π^1_1- Mengen

Wir wollen uns nun die Π^1_1-Mengen genauer ansehen und werden dabei eine weitere Charakterisierung dieser Mengen erhalten. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einem "Baum" verstehen:

Definition :

a) $T \subseteq \bigcup_{n \in I\!N} {}^n I\!N$ heißt **Baum** gdw. für alle $s \in T$ und alle $s' : n \to I\!N$ mit $s' \subseteq s$ auch $s' \in T$ gilt.

b) $T_s := \{t \mid s^\frown t \in T\}$ heißt **Teilbaum** von T.

c) Eine Funktion $\alpha : I\!N \to I\!N$ heißt **Baum** gdw. ihre Nullstellenmenge $T^\alpha := \{s \mid \alpha(\langle s \rangle) = 0\}$ ein Baum ist.

Erläuterung :

Wir haben hier (wie in der Mengenlehre üblich) n mit der Menge $\{0, \ldots, n-1\}$ identifiziert. $s : n \to I\!N$ ist also die Folge $\big(s(0), \ldots, s(n-1)\big)$ und "$\subseteq$" bedeutet "Anfangsstück von".

$\langle s \rangle$ ist die Gödelnummer $\langle s(0), \ldots, s(n-1) \rangle$ von s. – Häufig schreiben wir einfach s für $\langle s \rangle$.

Der Ausdruck $s^\frown t$ bezeichnet das Aneinanderhängen von Folgen oder Gödelnummern von Folgen: Für $s = \big(s(0), s(1), \ldots, s(n)\big)$ und $t = \big(t(0), t(1), \ldots, t(m)\big)$ ist $s^\frown t = \big(s(0), s(1), \ldots, s(n), t(0), t(1), \ldots, t(m)\big)$. (Entsprechend für Gödelnummern.) – Dieses Aneinanderhängen ist rekursiv, denn: $\langle s^\frown t \rangle = \mu z\big(lg(z) = lg(s) + lg(t) \wedge \forall i < lg(s)\, (s)_i = (z)_i \wedge \forall j < lg(t)\, (t)_j = (z)_{lg(s)+j}\big)$.

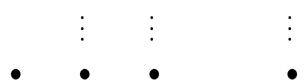
Bemerkungen :

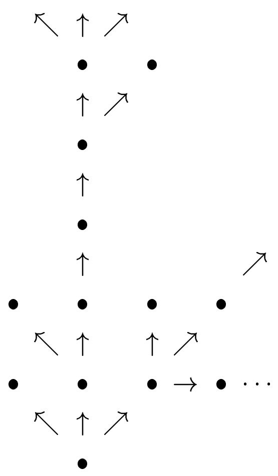
a) $T_s = \emptyset$ für $s \notin T$.

b) $\emptyset$ ist Element eines jeden nichtleeren Baumes.

c) Wir fassen Elemente von Bäumen wahlweise als Folgen oder als Gödelnummern von Folgen auf; wir schreiben daher auch mitunter $T \subseteq I\!N$.

Anschaulich sieht ein typischer Baum etwa so aus:





Jeder Knotenpunkt ist dabei ein Element von T.

Eine Klasse von besonders "schönen" Bäumen sind die fundierten Bäume:

Definition :

a) Ein Baum T heißt **fundiert** gdw. es keine unendliche aufsteigende Folge der Form

$s_0 \subsetneqq s_1 \subsetneqq s_2 \subsetneqq s_3 \subsetneqq \ldots \quad , s_i \in T$, gibt.

b) $\mathcal{T} := \{\alpha \mid T^\alpha \text{ fundierter Baum}\}$

Beachte: $\mathcal{T} \neq \emptyset$, da zum Beispiel $\alpha := K_{\{0\}} \in \mathcal{T}$. (Erinnerung: $0 = \langle\emptyset\rangle$)

Lemma 1 : $\mathcal{T} \in \Pi^1_1$

Beweis: $\alpha \in \mathcal{T} \iff \forall x \forall n\, (\alpha(x) = 0 \to \alpha(x \restriction n) = 0)$ (d.h.: Baum)
$\wedge \forall \beta \exists n\, \alpha(\overline{\beta(n)}) \neq 0$ (d.h.: fundiert)

Die obere Eigenschaft ist Π^0_1, die untere Π^1_1. $\square$

Zusatz : "α ist nichtleerer fundierter Baum" ist ebenfalls Π^1_1, da die zusätzliche Bedingung äquivalent ist zu $\alpha(0) = 0$; diese Eigenschaft ist sogar Π^0_0.

Satz 2 : $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$ ist Π^1_1 gdw. ein rekursiver Operator $\mathcal{F} : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ existiert mit $A = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{T}\}$.

(Vergleiche den Begriff der m-Vollständigkeit (§6)! Analog zum dortigen Ergebnis ist $\mathcal{T}$ die "komplizierteste" Π^1_1-Menge.)

BEWEIS:
"$\Leftarrow$" ist klar wegen Lemma 1 und der Abgeschlossenheit von Π^1_1 unter rekursiver Einsetzung.
"$\Rightarrow$": Nach §10, Lemma 10 gilt $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \forall\beta R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)$ für eine r.a. Relation R. Also existiert eine r.a. Relation R' mit $R(\vec{x},\vec{\alpha},\beta) \leftrightarrow \exists k R'(\vec{x},\overrightarrow{\overline{\alpha(k)}},\overline{\beta(k)})$. (Hier steht $\overrightarrow{\overline{\alpha(k)}}$ für das Tupel $(\overline{\alpha_1(k)},\overline{\alpha_2(k)},\ldots,\overline{\alpha_n(k)})$, wobei die $\overline{\alpha_i(k)}$ die Gödelisierungen $\langle\alpha_i(0),\alpha_i(1),\ldots,\alpha_i(k)\rangle$ sind.) Weiterhin gibt es eine rekursive Relation R'' mit $R'(\vec{x},\vec{s},t) \leftrightarrow \exists l R''(\vec{x},\vec{s},t,l)$, also $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \forall\beta\exists k,l\, R''(\vec{x},\overrightarrow{\overline{\alpha(k)}},\overline{\beta(k)},l)$. Setze nun $T(\vec{x},\vec{\alpha}) := \{t \mid \underbrace{\forall k,l < lg(t)\ \neg R''(\vec{x},\overrightarrow{\overline{\alpha(k)}},t\restriction k,l)}_{\text{rekursiv in } \vec{x},\vec{\alpha}}\}$.
— Daß T ein Baum ist, ist klar nach Definition; weiter gilt $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \forall\beta\exists n\,\overline{\beta(n)} \notin T(\vec{x},\vec{\alpha})$, d.h.: T ist fundiert. Mit $\mathcal{F} := K_T$ haben wir also wie gewünscht $A(\vec{x},\vec{\alpha}) \leftrightarrow \mathcal{F}(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \mathcal{T}$. ∎

Folgerung : $\mathcal{T}$ ist nicht Δ^1_1.

BEWEIS:
Sonst ließe sich jede Menge $A \in \Pi^1_1$, insbesondere also auch jede Menge $A \in \Pi^1_1 \setminus \Sigma^1_1$, vermöge einer solchen Funktion schon Δ^1_1 entscheiden. ∎

Wir wollen nun die Π^1_1-Mengen einer *Ordinalzahl-Analyse* unterziehen und führen dazu ein Maß für die "Höhe" von Bäumen ein: Es sei T ein fundierter Baum. Dann läßt sich eine *Rang*-Funktion rg_T definieren, die jedem $s \in T$ eine Ordinalzahl wie folgt zuordnet:

$\mathrm{rg}_T(s)$ ist 0, wenn s ein "Blatt" des Baumes T ist, und sonst die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als die Ränge aller Nachfolger von s.

Diese Definition ist nur für fundierte Bäume sinnvoll, da sonst ein unendlicher Regreß eintritt. Der *Rang* eines Baumes ist dann gleich dem höchsten Rang eines seiner Elemente, nämlich $\mathrm{rg}_T(0)$.

Formal:

Definition : a) Für fundierte Bäume T ist der **T-Rang** eine Funktion

$$\mathrm{rg}_T : T \to On$$
$$s \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \forall i\, s^\frown\langle i\rangle \notin T \\ \min\{y \mid \forall i \in \mathbb{N}\ y > \mathrm{rg}_T(s^\frown\langle i\rangle)\} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

b) Für alle Bäume T wird der **Rang** von T definiert als

$$|T| := \begin{cases} \mathrm{rg}_T(0) & \text{, wenn } T \text{ fundiert und nichtleer} \\ -1 & \text{, wenn } T \text{ leer} \\ \omega_1 & \text{, wenn } T \text{ nicht fundiert und nichtleer.} \end{cases}$$

c) Für Funktionen α definieren wir entsprechend $|\alpha| := |T^\alpha|$.

Beispiele:

a) $|\{\emptyset\}| = 0$

b) T_ω mit der Struktur

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & \bullet \\
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & \bullet & & & & \bullet & & \\
 & & \uparrow & & & \nearrow & & & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & & \cdots & \\
 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & & & & & \\
 & & \bullet & & & & & &
\end{array}$$

hat den Rang ω. (T_ω ist der “kleinste unendliche fundierte Baum”.)

c) Der Baum

$$\begin{array}{c}
T_\omega \\
\uparrow \\
\bullet
\end{array}$$

hat den Rang $\omega + 1$.

d) Der Baum

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & T_\omega \\
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & T_\omega & & & & \bullet & & \\
 & & \uparrow & & & \nearrow & & & \\
T_\omega & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \\
 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & & & & & \\
 & & \bullet & & & & & &
\end{array}$$

hat den Rang 2ω.

Bemerkungen :

a) Wegen der Regularität von ω_1 haben alle fundierten Bäume einen Rang echt kleiner als ω_1.

b) Für jede abzählbare Ordinalzahl η gibt es einen fundierten Baum T mit $\eta = |T|$, denn (Induktion über η):

$\eta = 0 \,:\; T = \{\emptyset\}$

sonst: Sei $\{\xi_i \mid i \in M\}$, $M \subseteq \mathbb{N}$, eine Aufzählung der Ordinalzahlen unterhalb von η; hierfür existieren nach Induktionsannahme Bäume T^i mit $\left|T^i\right| = \xi_i$; setze $T := \{\emptyset\} \cup \{\langle i\rangle^\frown s \mid s \in T^i,\, i \in M\}$. T ist wie gewünscht. ∎

<u>Übung 1:</u> Es sei T fundierter Baum. Dann ist für alle $s \in T$ $\quad \mathrm{rg}_T(s) = \mid T_s \mid$.
Hinweis: Zeige durch transfinite Induktion über $\gamma < \omega_1$: Für alle $s \in T$ gilt : $\mathrm{rg}_T(s) \leq \gamma \Longleftrightarrow \mid T_s \mid \leq \gamma$. Beachte dazu, daß für alle $s \in T$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $\langle i\rangle \in T_s$ gilt: $(T_s)_{\langle i\rangle} = T_{s^\frown\langle i\rangle}$

Notation : Dies rechtfertigt es, im folgenden für Ordinalzahlen η mit T^η einen Baum zu bezeichnen, für den $|T^\eta| = \eta$ gilt.

Wir definieren nun eine Ordnungsrelation auf $\omega_1 + 1$:

Definition : $\quad \eta \leq^* \xi \quad$ gdw. $\quad \eta < \omega_1$ und $\eta \leq \xi$ (für $\eta, \xi \leq \omega_1$)

Lemma 3 :

a) $|\alpha| < |\beta|$ ist eine Π^1_1-Relation (in α, β).

b) $|\alpha| \leq^* |\beta|$ ist eine Π^1_1-Relation (in α, β).

Beweis:

a) (Skizze) Zu zeigen ist: $|\beta| \leq |\alpha|$ (d.h.: $\left|T^\beta\right| \leq |T^\alpha|$) ist eine Σ^1_1- Relation. – Wir betrachten nur den Fall, daß T^β fundiert ist; wir definieren dann eine Abbildung $f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^n\mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^n\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll}
f(s) \in & T^\alpha & (s \in T^\beta)\\
f(s) = & \emptyset & (s \notin T^\beta)\\
f(\emptyset) = & \emptyset & \\
lg(s) = & lg(f(s)) & (s \in T^\beta)\\
f(s) \subseteq & f(t) & (s \subseteq t \in T^\beta)
\end{array}$$

T^β_s $\quad T^\alpha_{f(s)}$ $\quad f$ $\quad T^\beta$ $\quad T^\alpha$

Diese Konstruktion ist möglich, wenn $|\beta| \leq |\alpha|$ (induktiv über $lg(s)$). (Übung!)
Dann gilt:

$$\left|T^\beta\right| \leq |T^\alpha| \quad \leftrightarrow \quad \exists f \big(\forall s\, \forall i\, \exists j (s^\frown\langle i\rangle \in T^\beta \to f(s^\frown\langle i\rangle) = f(s)^\frown\langle j\rangle \in T^\alpha) \wedge f(\emptyset) = \emptyset\big)$$

Die Aussage auf der rechten Seite ist offensichtlich Σ^1_1.

$$\text{b) } |T^\alpha| \leq^* \left|T^\beta\right| \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\alpha \in \mathcal{T}}_{\Pi^1_1} \wedge \forall i (\underbrace{\langle i \rangle \in T^\alpha}_{\text{rekursiv}} \rightarrow \underbrace{\left|T^\alpha_{\langle i \rangle}\right| < \left|T^\beta\right|}_{\Pi^1_1})}_{\Pi^1_1}$$

$\square$

Definition : Ein Baum T heißt **rekursiv** gdw. seine charakteristische Funktion K_T rekursiv ist.

$\eta < \omega_1$ heißt **rekursiv** gdw. ein rekursiver Baum T mit $|T| = \eta$ existiert.

Bemerkungen :

a) Es existieren nur abzählbar viele rekursive Ordinalzahlen, da nur abzählbar viele rekursive

Mengen existieren.

b) Mit η ist auch $\eta + 1$ rekursiv. (Klar!)

c) Wenn η rekursiv ist und $\xi < \eta$, dann ist auch ξ rekursiv.

Beweis: (Induktion über η) Sei $\xi < \eta = |T|$, T rekursiv. Nach Definition existiert ein j mit $|T_j| \geq \xi$, $|T_j| < \eta$. Falls $\xi = |T_j|$, dann sind wir fertig; falls aber $\xi < |T_j|$, dann benutze die Induktionsannahme.

Definition : $\omega_1^c := \sup \{\eta \mid \eta \text{ rekursiv}\}$

(Das "c" kommt von dem englischen Namen **"constructive ordinal"**.)

Es gilt:

– $\omega_1^c < \omega_1$ (wegen Bemerkung a));

– η rekursiv gdw. $\eta < \omega_1^c$ (wegen Bemerkungen b), c)).

Nun wollen wir Bäume vermittels ihres Ranges klassifizieren:

Lemma 4 : Mit $\mathcal{T}_\xi := \{\alpha \in \mathcal{R} \mid |\alpha| < \xi\}$ gilt: $\xi < \omega_1^c$ gdw. $\mathcal{T}_\xi \in \Delta^1_1$.

BEWEIS:

"$\Rightarrow$": Es sei β rekursiv, $\xi = |\beta|$ (β existiert wegen $\xi < \omega_1^c$). Dann gilt:

$\alpha \in \mathcal{T}_\xi \leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$ (Diese Relation ist Π^1_1 in α.)

$\leftrightarrow \neg\, |\beta| \leq^* |\alpha|$ (Wegen $|\beta| < \omega_1^c < \omega_1$; diese Relation ist Σ^1_1 nach dem vorigen Lemma.)

"$\Leftarrow$": Es sei $\xi \geq \omega_1^c$. Wähle $A \subseteq I\!N$ aus $\Pi^1_1 \setminus \Sigma^1_1$. Nach §10, Satz 1d) existiert ein rekursiver Operator $\mathcal{F} : I\!N \rightarrow \mathcal{R}$ mit $A = \{n \mid \mathcal{F}(n) \in \mathcal{T}\} = \{n \mid \mathcal{F}(n) \in \mathcal{T}_\xi\}$, denn $|\mathcal{F}(n)| < \omega_1^c \leq \xi$, da $\mathcal{F}(n)$ rekursiv ist. Wäre nun $\mathcal{T}_\xi \in \Sigma_1^1$, dann auch $A \in \Sigma_1^1$; Widerspruch! $\square$

(Das war also wieder einmal unser Standard-Trick: Rückführung auf die Aussage des Hierarchie-Satzes.)

Korollar 5 :
a) Wenn T fundiert ist, $T \in \Delta^1_1$, dann gilt $|T| < \omega_1^c$.
b) Wenn $A \subseteq \mathcal{T}$, $A \in \Sigma^1_1$, dann existiert ein $\xi < \omega_1^c$ mit $A \subseteq \mathcal{T}_\xi$.
(*"Beschränktheitseigenschaft"*)

BEWEIS:
a) klar (betrachte $\mathcal{T}_{|T|}$).
b) Es sei $\xi \leq \omega_1$ minimal mit $A \subseteq \mathcal{T}_\xi$. Dann gilt $\mathcal{T}_\xi = \{\alpha \mid \exists\beta[\underbrace{\underbrace{\beta \in A}_{\Sigma^1_1 \text{ nach Voraussetzung}} \wedge \underbrace{|\alpha| \leq^* |\beta|}_{\Sigma^1_1}]}_{\Sigma^1_1}\}$

— also $\xi < \omega_1^c$ nach Lemma 4 (siehe den zweiten Teil des Beweises). $\square$

Satz 6 : Je zwei disjunkte Σ^1_1-Mengen A und B lassen sich durch eine Δ^1_1-Menge trennen.

Beachte: Früher hatten wir einen solchen Satz für Π^0_1-Mengen gezeigt! (§5, Satz 9)

BEWEIS:
Gesucht ist $C \in \Delta^1_1$ mit $A \subseteq C \subseteq B^c$, wobei $B^c \in \Pi^1_1$.

Es sei $\mathcal{F} : I\!N^n \times \mathcal{R}^r \to \mathcal{R}$ ein rekursiver Operator mit $B^c = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{T}\}$.
Die Idee ist nun, die Situation auf Mengen von Bäumen hinüberzutransportieren:
Das Bild von A unter $\mathcal{F}$ ist beschränkt; betrachte dann das Urbild einer beschränkenden Menge $\mathcal{T}_\xi$:

Genauer: $\mathcal{F}(A)$ ist Σ^1_1, denn $\beta \in \mathcal{F}(A) \leftrightarrow \exists\vec{\alpha} \in A \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \beta \leftrightarrow \exists\vec{\alpha} \in A \forall t \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha})(t) = \beta(t)$.

Wegen $A \subseteq B^c$ ist also $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{T}_\xi$ für ein $\xi < \omega_1^c$ (wegen Beschränktheit!); setze nun $C := \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{T}_\xi\}$. C ist wie gewünscht. $\square$

$\mathcal{R}$

$R \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^{r+1}$

Wir können nun die Entsprechung zu einem wichtigen früheren Satz zeigen, den wir dort für Σ^1_0-Mengen gezeigt hatten (§5, Satz 3):

S

Satz 7 (Π^1_1-Uniformisierung) : Jede Π^1_1-Relation läßt sich Π^1_1-uniformisieren.

Zur Erläuterung: Wir haben die folgende Situation:

$I\!N^n \times$

$\mathcal{R}^r$

Wir betrachten hier nur die Uniformisierung "in der Richtung von $\mathcal{R}$"; der Satz gilt aber auch "in der Richtung von $I\!N$". Dies folgt aus dem von uns bewiesenen Fall, läßt sich aber noch einfacher direkt zeigen. (Übung 2)

Beweis: Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall $n = 0$, $r = 1$. Sei also $R \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ eine Π^1_1-Relation und $\mathcal{F} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ wie üblich ein rekursiver Operator mit $R = \{(\alpha, \beta) \mid \mathcal{F}(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}\}$; für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ sei $T^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)} := \{x \mid \mathcal{F}(\alpha, \beta)(x) = 0\}$ der zugehörige Baum. – Die Idee ist, vermittels dieses Operators und seines Nullstellenbaumes eine Ordnung zu definieren, über die dann eindeutig ein uniformisierendes Paar zu (α, β) gewählt wird.

Sei $\Omega := \{\xi \mid \xi \leq \omega_1\}$; wir betrachten ${}^{I\!N}\Omega \times {}^{I\!N}I\!N$ in der lexikographischen Ordnung vermöge der Ordnungen auf Ω und $I\!N$, in der Reihenfolge $\Omega \times I\!N \times \Omega \times I\!N \times \cdots$; also gilt $(x_i)_{i \in I\!N} < (y_i)_{i \in I\!N} \leftrightarrow \exists s (\forall i < s\ x_i \leq y_i) \wedge x_s < y_s$.

Allgemein kann man in einer solchen Situation den folgenden Hilfssatz zeigen:

a) Jede Teilmenge $A \subseteq {}^{I\!N}\Omega \times {}^{I\!N}I\!N$, $A \neq \emptyset$, hat ein Infimum $(\tilde{x}_i)_{i \in I\!N}$.

b) Es existiert eine *abzählbare* Folge $(y^n)_{n \in I\!N}$, $y^n \in A$, mit $\forall i \lim_{n\to\infty} y^n_i = \tilde{x}_i$ (komponentenweise Konvergenz in der diskreten Topologie).

Beweis: Übung 3! (Tip: Setze $\tilde{x}_0 := \min\{y_0 \mid (y_i)_{i \in I\!N} \in A\}$; $\tilde{x}_{n+1} := \min\{y_{n+1} \mid (y_i)_{i \in I\!N} \in A \wedge y_0 = \tilde{x}_0 \wedge y_1 = \tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge y_n = \tilde{x}_n\}$.)

Definiere zunächst eine Abbildung $G : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to {}^{I\!N}\Omega \times {}^{I\!N}I\!N$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \left(\left(\left| T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)} \right| \right)_{s \in I\!N}, \beta \right).$$

Setze dann $S(\alpha, \beta) :\leftrightarrow R(\alpha, \beta) \wedge \Big[\exists (\eta_s)_{s \in I\!N}\ \big((\eta_s)_{s \in I\!N}, \beta \big) = \inf\{G(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in \mathcal{R}\} \Big]$.

Daß dieses S wie gewünscht ist, zeigen wir in fünf Schritten:

(i) <u>$S \subseteq \mathcal{R}$</u>: klar wegen des ersten Teils der Definition.
(ii) <u>Wenn $S(\alpha,\beta_1)$ und $S(\alpha,\beta_2)$, dann $\beta_1 = \beta_2$</u>: klar, da das Infimum eindeutig ist.
(iii) <u>Für $\alpha \in$ dom R gilt $((\eta_s)_{s\in\mathbb{N}},\beta) = G(\alpha,\beta)$</u>:
D.h.: Für $((\eta_s)_{s\in\mathbb{N}},\beta) = \inf\{G(\alpha,\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{R}\}$ gilt: $\eta_s = \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$ für alle $s \in \mathbb{N}$.
(Hier wird noch nicht behauptet, daß $(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}$; dazu siehe (iv) !)
Beweis: Nach Definition ist klar, daß $\eta_s \leq \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$; zu zeigen bleibt "$\geq$". Wir zeigen das durch Induktion über $\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$.

Induktionsanfang: Wenn $\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| = -1$, d.h. $T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)} = \emptyset$, dann ist alles klar.
Induktionsschritt: $T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}$ sei ein nichtleerer Baum, $\chi := \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| > \xi$. Die Behauptung sei bewiesen für alle t mit $\left|T_t^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| < \chi$; zu zeigen ist dann, daß auch $\eta_s > \xi$.
Es existiert ein $\langle i\rangle \in T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}$ mit $\left|T_{s^\frown\langle i\rangle}^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| \geq \xi$, $\left|T_{s^\frown\langle i\rangle}^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| < \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$ (nach Definition des Rangs). Wegen der Induktionsvoraussetzung ist dann $\eta_{s^\frown\langle i\rangle} \geq \left|T_{s^\frown\langle i\rangle}^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$.
Wähle nun eine Folge $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}, \beta^n \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, mit $((\eta_s)_{s\in\mathbb{N}},\beta) = \lim_{n\to\infty} G(\alpha,\beta^n)$.
(Eine solche Folge existiert nach dem oben erwähnten Hilfssatz.)

N sei so groß, daß für alle $n \geq N$ gilt: $\langle i\rangle \in T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)} \wedge \eta_{s^\frown\langle i\rangle} = \left|T_{s^\frown\langle i\rangle}^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)}\right| \wedge \eta_s = \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)}\right|$. (Ein solches N existiert wegen der punktweisen diskreten Konvergenz; β^n konvergiert gegen β und $\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)}\right|$ konvergiert gegen $\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right|$.) Also $\eta_s = \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)}\right| > \left|T_{s^\frown\langle i\rangle}^{\mathcal{F}(\alpha,\beta^n)}\right| = \eta_{s^\frown\langle i\rangle} \geq \xi$: Das wollten wir gerade zeigen.
(iv) <u>dom R = dom S</u>: "$\supseteq$" ist klar wegen (i); wenn nun $\alpha \in \operatorname{dom} R$, dann existiert ein γ mit $R(\alpha,\gamma)$. Also ist $\mathcal{F}(\alpha,\gamma) \in \mathcal{T}$, mithin $\left|T_0^{\mathcal{F}(\alpha,\gamma)}\right| < \omega_1$. Für das Element $((\eta_s))_{s\in\mathbb{N}},\beta)$ aus Schritt (iii) gilt: $\eta_0 \leq \left|T_0^{\mathcal{F}(\alpha,\gamma)}\right| < \omega_1$; also $\left|T_0^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| \leq \eta_0 < \omega_1$; das heißt aber $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}$ oder, mit anderen Worten, $R(\alpha,\beta)$.
(v) <u>$S \in \Pi^1_1$</u> :

$$R(\alpha,\beta) \wedge G(\alpha,\beta) = \inf\{G(\alpha,\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{R}\} \leftrightarrow \underbrace{R(\alpha,\beta)}_{\Pi^1_1} \wedge \underbrace{\forall\gamma \neq \beta\exists s}_{\text{Diese Quantoren ändern nichts}}\Bigg(\forall i < s\Bigg[\underbrace{\left|T_i^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| \leq \left|T_i^{\mathcal{F}(\alpha,\gamma)}\right|}_{\Pi^1_1\text{, da linke Seite } < \omega_1} \wedge$$

$$\underbrace{\wedge\, \beta(i) \leq \gamma(i)\Bigg]}_{\Pi^1_1} \wedge \Bigg[\underbrace{\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| < \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\gamma)}\right|}_{\Pi^1_1} \vee \underbrace{\left(\left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\beta)}\right| \leq \left|T_s^{\mathcal{F}(\alpha,\gamma)}\right| \wedge \beta(s) < \gamma(s)\right)\Bigg]}_{\Pi^1_1}\Bigg)$$

ist Π^1_1. ∎

Korollar 8 : Jede Σ^1_2-Relation läßt sich Σ^1_2-uniformisieren.

BEWEIS:
Es sei zum Beispiel $\bar{R} \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ eine Σ^1_2-Relation, also $\bar{R}(\alpha, \beta) \leftrightarrow \exists\gamma\tilde{R}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\tilde{R} \in \Pi^1_1$. Definiere $R(\alpha, \delta) :\leftrightarrow \tilde{R}(\alpha, (\delta)_0, (\delta)_1)$, $\mathcal{R} \in \Pi^1_1$. $S(\alpha, \delta)$ uniformisiere R; definiere dann $\bar{S}(\alpha, \beta) :\leftrightarrow \exists\delta[S(\alpha, \delta) \wedge \beta = (\delta)_0]$. Diese Relation uniformisiert $\bar{R}$ und ist offenbar Σ^1_2. ∎

§ 12 Induktive Mengen

Ziel dieses Kapitels ist eine andere Charakterisierung der Π^1_1-Mengen. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der induktiven Definition ein.

Definition : *Es sei X eine Menge*
Eine Abbildung $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ heißt **induktive Definition** *auf X*
gdw. Γ **isoton** *ist, d.h. $A \subseteq B$ impliziert $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$*

Definition : *Es sei Γ eine induktive Definition auf X*
$A \subseteq X$ heißt **Fixpunkt** *von Γ gdw. $\Gamma(A) = A$*

Von besonderer Bedeutung ist der kleinste Fixpunkt, der sich sowohl von oben als auch von unten konstruieren läßt:

Lemma 1 (Konstruktion von oben) : *Es sei Γ eine induktive Definition auf X*
$I^\Gamma := \bigcap \{B \subseteq X \mid \Gamma(B) \subseteq B\}$ ist der kleinste Fixpunkt von Γ

Beweis :
Aufgrund der Definition von I^Γ genügt es, zu zeigen, daß I^Γ ein Fixpunkt von Γ ist, also $\Gamma(I^\Gamma) = I^\Gamma$.
"$\subseteq$" : Es sei $B \subseteq X$ mit $\Gamma(B) \subseteq B$. Dann haben wir $I^\Gamma \subseteq B$, und wegen der Isotonie von Γ folgt $\Gamma(I^\Gamma) \subseteq \Gamma(B) \subseteq B$. Da B beliebig gewählt war, erhalten wir $\Gamma(I^\Gamma) \subseteq I^\Gamma$.
"$\supseteq$" : $\Gamma(I^\Gamma) \subseteq I^\Gamma$ liefert wiederum wegen der Isotonie von Γ $\Gamma(\Gamma(I^\Gamma)) \subseteq \Gamma(I^\Gamma)$. Damit ist $\Gamma(I^\Gamma) \in \{B \subseteq X \mid \Gamma(B) \subseteq B\}$, also $I^\Gamma \subseteq \Gamma(I^\Gamma)$.

Bemerkung (Konstruktion von unten) : Es sei Γ eine induktive Definition auf X.
Definiere für $\alpha \in On$ I^α rekursiv durch:
$I^0 := \emptyset$,
$I^{\alpha+1} := \Gamma(I^\alpha)$ und
$I^\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} I^\alpha$ für Limeszahlen λ.
Dann gelten:
1) $I^0 \subseteq I^1 \subseteq I^2 \subseteq \ldots \subseteq I^\alpha \subseteq \ldots \qquad (\alpha \in On)$.
2) Es gibt eine Ordinalzahl $\delta <\mid X \mid^+$ mit $I^\delta = I^\beta$ für alle $\beta > \delta$. Das kleinste solche δ heißt

die **Abschlußordinalzahl** von Γ und wird mit κ_Γ bezeichnet.
3) $I^\Gamma = \bigcup_{\alpha \in On} I^\alpha$.
Insgesamt folgt also $I^\Gamma = I^{\kappa_\Gamma}$.

BEWEIS : Übung 1
Hinweis: Zu 1): Durch transfinite Induktion über $\alpha \in On$.
Zu 3): Zeige $\bigcup_{\alpha \in On} I^\alpha$ ist ein Fixpunkt von Γ und eine Teilmenge von I^Γ (zeige dazu für alle $B \subseteq X$ mit $\Gamma(B) \subseteq B$: für alle $\alpha \in On$ ist $I^\alpha \subseteq B$).

Induktive Definitionen treten in der Mathematik häufig auf. Wir wollen an dieser Stelle nur ein Beispiel geben. In § 13 werden wir eine weitere Anwendung einer induktiven Definition kennenlernen (§ 13, Lemma 1).

BEISPIEL : Es seien $(G, \bullet)$ eine Halbgruppe und $B \subseteq G$.
Betrachte die induktive Definition $\Gamma(Y) := Y \bullet Y \;\cup\; B$ mit $Y \bullet Y := \{y \bullet z \mid y, z \in Y\}$.
Dann ist $I^\Gamma = \bigcap \{ H \subseteq G \mid (H, \bullet)$ ist Halbgruppe mit $B \subseteq H \}$, also die von B erzeugte Halbgruppe (bzgl. $\bullet$) und läßt sich von unten konstruieren durch $H = B \;\cup\; B \bullet B \;\cup\; B \bullet B \bullet B \;\cup \ldots$ Die Abschlußordinalzahl ist in diesem Fall $\kappa_\Gamma \leq \omega$.

Wir wollen nun den Zusammenhang zu Π^1_1-Mengen herstellen. Dazu betrachten wir Operatoren von $\mathcal{R}^r$ in die Menge der induktiven Definitionen auf $I\!N^n$:

Definition : *Es seien $n, r < \omega$.*
Ein Operator $\hat{\Gamma} : \mathcal{R}^r \longrightarrow \{ \Gamma : \mathcal{P}(I\!N^n) \to \mathcal{P}(I\!N^n) \mid \Gamma$ *induktive Definition auf* $I\!N^n \}$

heißt **arithmetisch** *(Π^0_1 bzw. Π^1_1) gdw. $\vec{y} \in \hat{\Gamma}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)(T^\beta_{(n)})$ arithmetisch (Π^0_1 bzw. Π^1_1) in $\vec{y}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und β ist.*
Dabei ist für $\beta \in \mathcal{R}$ $T^\beta_{(1)} := \{x \mid \beta(x) = 0\}$ ($= T^\beta$!) und $T^\beta_{(n)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in I\!N^n \mid \beta(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = 0\}$ für $n > 1$.
$R \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ heißt **Fixpunkt** *gdw. $(\vec{y}, \vec{\alpha}) \in R \leftrightarrow \vec{y} \in I^{\hat{\Gamma}(\vec{\alpha})}$ für einen arithmetischen Operator $\hat{\Gamma}$.*
$R \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ heißt **induktiv** *gdw. $R(\vec{y}, \vec{\alpha}) \leftrightarrow S(m, \vec{y}, \vec{\alpha})$ für einen Fixpunkt $S \subset I\!N \times I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ und ein $m \in I\!N$.*

Als Beispiel einer induktiven Menge betrachten wir die Π^1_1-Menge $\mathcal{T}$ der fundierten Bäume aus § 11:

BEISPIEL : $\mathcal{T}$ $(= \{\alpha \in \mathcal{R} \mid T^\alpha$ fundierter Baum $\})$ ist induktiv.

BEWEIS : Es sei $\hat{\Gamma} : \mathcal{R} \longrightarrow \{\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \Gamma$ induktive Definition auf $\mathbb{N}\}$ mit $\hat{\Gamma}(\alpha)(X) := \{x \in \mathbb{N} \mid$ "T^α Baum" $\wedge$ $([x = 0 \wedge T^\alpha = \emptyset] \vee [x \in T^\alpha \wedge \forall i\,(x^\frown\langle i\rangle \in T^\alpha \to x^\frown\langle i\rangle \in X\,)])\}$. (Verifiziere, daß $\hat{\Gamma}(\alpha)$ isoton ist.)

"T^α Baum" ist Π^0_1 in α (vgl.§ 11 Beweis von Lemma 1), $T^\alpha = \emptyset$ ($\Leftrightarrow \alpha(0) \neq 0$) ist rekursiv in α, und $x^\frown\langle i\rangle \in T^\alpha$ ($\Leftrightarrow \alpha(x^\frown\langle i\rangle) = 0$) ist rekursiv in x, i und α, da $x^\frown\langle i\rangle$ rekursiv in x und i ist (vgl. § 11).
Daher ist $y \in \hat{\Gamma}(\alpha)(T^\beta)$ Π^0_1 in y, α und β, also $\hat{\Gamma}$ ein Π^0_1-Operator.

Für einen nicht-leeren, fundierten Baum T^α ist $\hat{\Gamma}(\alpha)(\emptyset)$ anschaulich die Menge der "Baumspitzen" von T^α und weiter für alle $\beta < \omega_1$ I^β die Menge aller $s \in T^\alpha$ mit $\mathrm{rg}_{T^\alpha}(s) \leq \beta$.

Zeige nun $\alpha \in \mathcal{T} \iff 0 \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$.
Dann ist für den Fixpunkt $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{R}$ mit $(y, \alpha) \in S \leftrightarrow y \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$ $\alpha \in \mathcal{T} \leftrightarrow S(0, \alpha)$ erfüllt, also $\mathcal{T}$ induktiv.
"$\Rightarrow$" : Es sei $\alpha \in \mathcal{T}$.
Ist $T^\alpha = \emptyset$, so folgt $0 \in \hat{\Gamma}(\alpha)(\emptyset) \subseteq I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$ nach Definition von $\hat{\Gamma}(\alpha)(X)$.
Ist $T^\alpha \neq \emptyset$, so zeigen wir durch Induktion über $\mathrm{rg}_{T^\alpha}(x)$: $T^\alpha \subseteq I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$. Dann folgt $0 \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$.
Zum Induktionsbeweis:
Es sei $x \in T^\alpha$ mit $\mathrm{rg}_{T^\alpha}(x) = \gamma$, und für alle $y \in T^\alpha$ mit $\mathrm{rg}_{T^\alpha}(y) < \gamma$ gelte $y \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $x^\frown\langle i\rangle \in T^\alpha$ folgt dann $\mathrm{rg}_{T^\alpha}(x^\frown\langle i\rangle) < \gamma$, also nach Induktionsvoraussetzung $x^\frown\langle i\rangle \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$. Nach Definition von $\hat{\Gamma}(\alpha)(X)$ folgt $x \in \hat{\Gamma}(\alpha)(I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}) = I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$.
"$\Leftarrow$" : durch Kontraposition: Es sei $\alpha \notin \mathcal{T}$.
1. Fall: T^α ist kein Baum. Dann ist $\hat{\Gamma}(\alpha)(\emptyset) = \emptyset$, also $I^{\hat{\Gamma}(\alpha)} = \emptyset$ und damit $0 \notin I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$.
2. Fall: T^α ist ein Baum, der nicht fundiert ist. Dann existiert ein unendlicher Pfad $\beta \in \mathcal{R}$ durch T^α, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{\beta(n)} \in T^\alpha$. Betrachte $Y := \mathbb{N} \setminus \{\overline{\beta(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für $y \in \hat{\Gamma}(\alpha)(Y)$ folgt $\forall i\,(y^\frown\langle i\rangle \in \{\overline{\beta(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \to y^\frown\langle i\rangle \notin T^\alpha)$ (Kontraposition), also $y \notin \{\overline{\beta(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir erhalten $\hat{\Gamma}(\alpha)(Y) \subseteq Y$ und $0 \notin Y$ (wegen $\overline{\beta(0)} = 0$). Damit ist $0 \notin I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$ (nach Konstruktion von oben). ▯

Wir haben gesehen, daß die Π^1_1-Menge $\mathcal{T}$ induktiv ist. Durch eine Verallgemeinerung des vorigen Beweises zeigen wir nun, daß jede Π^1_1-Menge induktiv ist. Darüberhinaus erhalten wir die folgende Charakterisierung der Π^1_1-Mengen:

Satz 1 : *Für alle $n, r < \omega$ und $A \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$ gilt:*
$A \in \Pi^1_1 \iff A$ *ist induktiv.*

Zusatz *(ohne Beweis) :*

a) $A \in \Pi^1_1 \Longrightarrow A$ ist induktiv mit Π^0_1-Operator $\hat{\Gamma}$.

b) A ist induktiv mit Π^1_1-Operator $\hat{\Gamma} \Longrightarrow A \in \Pi^1_1$.

Beweis : Es sei $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$.

"$\Rightarrow$" : Es sei $A \in \Pi^1_1$. Dann existiert nach § 10, Lemma 10 und Satz 1 e) eine r.a. Relation $R \subseteq I\!N^{n+r+1}$ mit

1) $$\neg R(\vec{x}, z_1, \dots, z_{r+1}) \to \neg R(\vec{x}, z_1 \restriction m, \dots, z_{r+1} \restriction m) \text{ für alle } m < \omega \quad \text{und}$$

2) $$\begin{aligned} A(\vec{x}, \vec{\alpha}) &\longleftrightarrow \forall \beta \, \exists k \, R(\vec{x}, \overline{\alpha_1(k)}, \dots, \overline{\alpha_r(k)}, \overline{\beta(k)}) \\ &\longleftrightarrow \forall \beta \, \exists k \, R(\vec{x}, \overline{\alpha_1(lg(\overline{\beta(k)}))}, \dots, \overline{\alpha_r(lg(\overline{\beta(k)}))}, \overline{\beta(k)}) \,. \end{aligned}$$

Betrachte nun die Π^0_1-Relation $T \subseteq I\!N \times I\!N^n \times \mathcal{R}^r$, definiert durch

$$T(s, \vec{x}, \vec{\alpha}) :\longleftrightarrow \neg R(\vec{x}, \overline{\alpha_1(lg(s))}, \dots, \overline{\alpha_r(lg(s))}, s) \,.$$

Dann ist für alle $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ die Relation $T_{(\vec{x},\vec{\alpha})} \subseteq I\!N$, definiert durch

$$T_{(\vec{x},\vec{\alpha})}(s) :\longleftrightarrow T(s, \vec{x}, \vec{\alpha}) \,,$$

ein Baum, da wegen 1) gilt: $T(s, \vec{x}, \vec{\alpha}) \to T(s \restriction m, \vec{x}, \vec{\alpha})$ für alle $m < \omega$.

Mit 2) folgt $A(\vec{x}, \vec{\alpha}) \longleftrightarrow \forall \beta \, \exists k \, \neg T_{(\vec{x},\vec{\alpha})}(\overline{\beta(k)})$, also haben wir für alle $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r$:

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in A \Longleftrightarrow T_{(\vec{x},\vec{\alpha})} \text{ ist ein fundierter Baum.}$$

In Verallgemeinerung zum vorigen Beweis betrachten wir den Operator

$$\hat{\Gamma} : \mathcal{R}^r \longrightarrow \{\Gamma : \mathcal{P}(I\!N^{n+1}) \to \mathcal{P}(I\!N^{n+1}) \mid \Gamma \text{ induktive Definition auf } I\!N^{n+1}\} \quad \text{mit}$$

$$\hat{\Gamma}(\vec{\alpha})(X) := \{(s, \vec{x}) \in I\!N^{n+1} \mid [\, s = 0 \wedge T_{(\vec{x},\vec{\alpha})} = \emptyset \,] \vee [\, s \in T_{(\vec{x},\vec{\alpha})} \wedge \forall i \, (s^\frown\langle i \rangle \in T_{(\vec{x},\vec{\alpha})} \to (s^\frown\langle i \rangle, \vec{x}) \in X \,) \,]\}.$$

$\hat{\Gamma}$ ist damit arithmetisch (, sogar Π^0_2). Nach dem gleichen Prinzip wie im vorigen Beweis läßt sich nun zeigen: $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in A \Longleftrightarrow (0, \vec{x}) \in I^{\hat{\Gamma}(\alpha)}$ (Übung).

Damit ist A induktiv.

"$\Leftarrow$" : Es sei A induktiv. Nach Definition existiert dann ein arithmetischer Operator

$\hat{\Gamma}$ und ein $m \in I\!N$, so daß für alle $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in A &\longleftrightarrow (m, \vec{x}) \in I^{\hat{\Gamma}(\vec{\alpha})} \\
&\longleftrightarrow (m, \vec{x}) \in \bigcap \{B \subseteq I\!N^{n+1} \mid \hat{\Gamma}(\vec{\alpha})(B) \subseteq B\} \\
&\longleftrightarrow (m, \vec{x}) \in \bigcap \{T^{\beta}_{n+1} \mid \beta \in \mathcal{R} \text{ mit } \hat{\Gamma}(\vec{\alpha})(T^{\beta}_{n+1}) \subseteq T^{\beta}_{n+1}\} \\
&\longleftrightarrow \forall \beta \Big(\underbrace{\underbrace{\forall \vec{y} \, \big(\underbrace{(m, \vec{y}) \in \hat{\Gamma}(\vec{\alpha})(T^{\beta}_{n+1})}_{\text{arithmetisch}} \rightarrow \underbrace{(m, \vec{y}) \in T^{\beta}_{n+1}}_{\text{rekursiv}} \big)}_{\text{arithmetisch}} \longrightarrow \underbrace{(m, \vec{x}) \in T^{\beta}_{n+1}}_{\text{rekursiv}}}_{\text{arithmetisch}} \Big)
\end{aligned}$$

Damit ist $A \in \Pi^1_1$ gezeigt. ∎

Aufgrund dieses Satzes ist klar:

Bemerkung : Die induktiven Mengen haben genau die gleichen Abgeschlossenheitseigenschaften wie die Π^1_1-Mengen.

§ 13 Hyperarithmetische Mengen

Im letzten Kapitel haben wir die Π^1_1-Mengen auf eine zweite Art charakterisiert. Hier wollen wir nun dasselbe für die Δ^1_1-Mengen durchführen. Ein wichtiges Beispiel einer Δ^1_1-Menge ist:

Beispiel: Es gibt eine Δ^1_1-Relation $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit:
Jede arithmetische Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ hat die Form $A(x) \leftrightarrow U(e,x)$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.
Beachte, daß U *nicht* arithmetisch ist (mit Diagonalargument).
U heißt **universelle arithmetische Relation**.

Beweis: *Idee:* $U(\langle e,n\rangle, x) \longleftrightarrow U^1_n(e,x)$ *mit* U^1_n *der universellen* Σ^0_n*-Menge (vgl. § 7 Lemma 3), also*

$$U^1_n(e,x) \longleftrightarrow \exists y_1\, \forall y_2 \ldots \left\{ {\forall y_{n-1} \atop \exists y_{n-1}\, \neg} \right\}\ W^n_e(x, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Dieser Ansatz führt zu Schwierigkeiten, denn für jedes $n < \omega$ wird eine andere r.a. Relation $W^n(e,x,y_1,\ldots,y_{n-1})$ benötigt. Ein weiteres Problem ist die Abhängigkeit der Länge des Präfixes von n.

<u>Übung 1:</u> Zeige für alle $n < \omega$:
1) Es existiert eine rekursive Funktion $h^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$W^n_e(x, y_1, \ldots, y_{n-1}) \longleftrightarrow W^1_{h^n(e)}\big(\langle x, y_1, \ldots, y_{n-1}\rangle\big).$$

2) Für alle $A \subseteq \mathbb{N}^n$ gilt
$\forall v_1\, \exists v_2\, \forall v_3 \ldots \left\{ {\forall v_{n-1} \atop \exists v_{n-1}} \right\} A(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow$

$$\exists \alpha_2\, \exists \alpha_4 \ldots \left\{ {\exists \alpha_{n-2} \atop \exists \alpha_{n-1}} \right\} \forall v_1\, \forall v_3 \ldots \left\{ {\forall v_{n-1} \atop \forall v_{n-2}} \right\} A\Big(x, v_1, \alpha_2(\langle v_1\rangle), v_3, \alpha_4(\langle v_1, v_3\rangle) \ldots \left\{ {v_{n-1} \atop \alpha_{n-1}(\langle v_1, v_3, \ldots, v_{n-2}\rangle)} \right\}\Big).$$

$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots$ werden **Skolemfunktionen** genannt.

Zurück zum Beweis:
Wir definieren U so, daß für alle $n < \omega$ $U\big(\langle h^n(e), n\rangle, x\big) \longleftrightarrow U^1_n(e,x)$ erfüllt ist, durch:

$$U(z,x) :\longleftrightarrow \exists y_1\, \forall y_2\, \exists y_3 \ldots \left\{ {\forall y_{n-1} \atop \exists y_{n-1}\, \neg} \right\}\ W^1_{(z)_0}\big(\langle x, y_1, \ldots, y_{(z)_1 - 1}\rangle\big).$$

Mit dem rekursiven Operator $\mathcal{F}(i,\alpha) = (\alpha)_i$ aus § 10, Lemma 9 a) haben wir dann wegen 2)

$$U(z,x) \longleftrightarrow \exists y_1\, \exists \beta\, \forall u \, \left\{ {}_{\neg} \right\} \, W^1_{(z)_0}\big(\, G((z)_1, x, y_1, u, \beta)\,\big) \qquad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} G(n,x,y_1,u,\beta) :=& \Big\langle\, x, y_1, (u)_2,\ (\beta)_3(\langle (u)_2\rangle)\ , (u)_4,\ (\beta)_5(\langle (u)_2, (u)_4\rangle)\ ,\ \ldots\ , \Big\{ {(u)_{n-1} \atop (\beta)_{n-1}\big(\langle (u)_2, (u)_4, \ldots, (u)_{n-2}\rangle\big)} \Big\}\Big\rangle \\ =& \mu\, w \Bigg(\ lg(w) = n\ \wedge\ \forall i < n \Big(\ \big(\, i = 0\ \wedge\ (w)_0 = x\,\big)\ \vee\ \big(\, i = 1\ \wedge\ (w)_1 = y_1\,\big)\ \vee \\ & \exists j < i \Big(\ j \neq 0\ \wedge\ \big(\ \ \big(\, 2j = i\ \wedge\ (w)_i = (u)_i\,\big)\ \vee\ \big(\, 2j+1 = i\ \wedge \\ & \exists y\, (\, lg(y) = j\ \wedge\ \forall l < j\, (\, (y)_l = (u)_{2l+2}\,)\ \wedge\ (w)_i = F_{\mathcal{F}}(i,y,\beta)\,)\,)\ )\ \Big)\Big)\Bigg), \end{aligned}$$

wobei $F_{\mathcal{F}}(i,y,\beta) = (\beta)_i(y)$ ist (vgl. § 10, Lemma 9 a)) (G ist damit rekursives Funktional),
also $U \in \Sigma^1_1$ nach § 10, Satz 8 c) und f), und

$$\neg\, U(z,x) \longleftrightarrow \exists\beta\, \forall u\ \{\neg\}\ W^1_{(z)_0}\big(H((z)_1, x, u, \beta)\big) \qquad \text{mit}$$

$H(n,x,u,\beta) := \big\langle\, x, (u)_1,\ (\beta)_2\big(\langle (u)_1\rangle\big)\ , (u)_3,\ (\beta)_4\big(\langle (u)_1, (u)_3\rangle\big)\ , \ldots\ , \Big\{ \begin{smallmatrix} (\beta)_{n-1}\left(\langle (u)_1, (u)_3, \ldots, (u)_{n-2}\rangle\right) \\ (u)_{n-1} \end{smallmatrix} \Big\}$
$\big\rangle$,
also $\neg\, U \in \Sigma^1_1$ nach § 10, Satz 8 c).
Damit ist $U \in \Delta^1_1$ gezeigt. ∎

Zur Charakterisierung der Δ^1_1-Mengen benötigen wir den Begriff der hyperarithmetischen Menge. Dazu definieren wir erst einmal hyperarithmetische Indizes:

Definition: *Wir bezeichnen mit H die kleinste Menge $M \subseteq \mathbb{N}$, die*
$\langle 0, e\rangle \in M$ *für alle* $e \in \mathbb{N}$,
$e \in M \longrightarrow \langle 1, e\rangle \in M$ *und*
$W^1_e \subseteq M \longrightarrow \langle 2, e\rangle \in M$ *erfüllt.*
H heißt **Menge der hyperarithmetischen Indizes**.

Diese Definition ist ein weiteres Beispiel für die Anwendung einer induktiven Definition. H ist der kleinste Fixpunkt von Γ mit Γ aus dem Beweis des folgenden Lemmas. Aufgrund des letzten Kapitels erhalten wir:

Lemma 1: *H ist eine Π^1_1-Menge.*

BEWEIS: Betrachte die induktive Definition $\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ auf $\mathbb{N}$, definiert durch $\Gamma(X) := \{x \in \mathbb{N} \mid lg(x) = 2\ \wedge\ (\ [\,(x)_0 = 0\,]\ \vee\ [\,(x)_0 = 1 \wedge (x)_1 \in X\,]\ \vee\ [\,(x)_0 = 2 \wedge W^1_{(x)_0} \subseteq X\,]\ )\}$.
$x \in \Gamma(T^\beta)$ ist Π^0_1 in x und β, da $W^1_{(x)_0} \subseteq T^\beta$ Π^0_1 in x und β ist. Wegen $x \in H \leftrightarrow x \in I^\Gamma$ ist
H induktiv und damit nach § 12, Satz 1 auch Π^1_1. ∎

In der folgenden Definition verwenden wir die in § 10 definierte Normalform $\overline{W}^{n,r}_e$ für r.a. Relationen.

Definition: *Es seien $n, r < \omega$. $H^{n,r}_e \subseteq \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^r$ ist induktiv über $e \in H$ definiert durch:*
$H^{n,r}_{\langle 0,e\rangle} = \overline{W}^{n,r}_e$
$H^{n,r}_{\langle 1,e\rangle} = \neg H^{n,r}_e$ *und*
$H^{n,r}_{\langle 2,e\rangle} = \bigcup_{f \in W^1_e} H^{n,r}_f$
$H^{n,r}_e$ *heißt e-te (n,r-stellige)* **hyperarithmetische Menge**.

Folgerung 2: *Es seien $n, r < \omega$.*
$e \in H \wedge H_e^{n,r}(\vec{x}, \vec{\alpha})$ *ist* Π_1^1 *in* $e, \vec{x}$ *und* $\vec{\alpha}$.

Beweis: Übung 2.
(Hinweis: Definiere $\{(e, i, x) \mid e \in H \wedge K_{H_e^{n,r}}(\vec{x}, \vec{\alpha}) = i\}$ als $I^{\hat{\Gamma}(\vec{\alpha})}$ für einen geeigneten arithmetischen Operator $\hat{\Gamma}$. Dabei bezeichnet $K_{H_e^{n,r}}$ die charakteristische Funktion von $H_e^{n,r}$.) ▯

Folgerung 3: *Für alle $n, r < \omega$ und $R \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ gilt:*
R ist hyperarithmetisch $\Longrightarrow$ R ist Δ_1^1.

Beweis: Es sei $R = H_e^{n,r}$ für ein $e \in H$. Dann ist $\neg R = H_{\langle 1,e\rangle}^{n,r}$. Mit Folgerung 3 erhalten wir R und $\neg R$ als Π_1^1 und damit R als Δ_1^1. ▯

Die Menge der hyperarithmetischen Relationen hat die gleichen Abgeschlossenheitseigenschaften wie die Menge der arithmetischen Relationen:

Lemma 4: *Die Menge der hyperarithmetischen Relationen ist effektiv abgeschlossen unter $\neg$, $\cup$, $\cap$, Einsetzung von rekursiven Funktionalen und Operatoren und unter $\exists x$ und $\forall x$.*

(Unter "effektiv" verstehen wir dabei z.B. für den Fall $\cup$: Für alle $n, r < \omega$ existiert eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!N^2 \to I\!N$, so daß für alle $e, f \in H$ $\mathcal{J}(e, f) \in H$ und $H_e^{n,r} \cup H_f^{n,r} = H_{\mathcal{J}(e,f)}^{n,r}$ erfüllt sind. Für die anderen Fälle siehe Beweis.)

Beweis: Es seien $n, r < \omega$.
$\neg$: Wähle die rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!N \to I\!N$ mit $\mathcal{J}(x) = \langle 1, x\rangle$. Damit gelten für alle $e \in H$

$$\mathcal{J}(e) \in H \text{ und } \neg H_e^{n,r} = H_{\mathcal{J}(e)}^{n,r}.$$

$\cup$: Nach dem s-m-n-Theorem existiert eine rekursive Funktion $G : I\!N^2 \to I\!N$, so daß $W_{G(y,z)}^1 = \{y, z\}$ für alle $y, z \in I\!N$. Definiere $\mathcal{J} : I\!N^2 \to I\!N$ durch $\mathcal{J}(x, y) := \langle 2, G(x, y)\rangle$. $\mathcal{J}$ ist somit rekursiv, und es folgen

$$\mathcal{J}(e, f) \in H \text{ und } H_e^{n,r} \cup H_f^{n,r} = H_{\mathcal{J}(e,f)}^{n,r}$$

für alle $e, f \in H$ nach Definition der hyperarithmetischen Indizes bzw. Mengen.

$\cap$: Folgt wegen $A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B)$ für beliebige Relationen A und B.

Einsetzung eines rekursiven Funktionals: Es sei $F : \mathbb{N}^{n+1} \times \mathcal{R}^r \to \mathbb{N}$ ein rekursives Funktional. Dann ist zu zeigen, daß eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathcal{J}(e) \in H \text{ und } (\vec{x}, F(\vec{x}, y, \vec{\alpha}), \vec{\alpha}) \in H_e^{n+1,r} \longleftrightarrow (\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in H_{\mathcal{J}(e)}^{n+1,r}$$

für alle $e \in \mathbb{N}$ und $(\vec{x}, y, \vec{\alpha}) \in \mathbb{N}^{n+1} \times \mathcal{R}^r$. Dies kann analog zum nächsten Fall durchgeführt werden (Übung).

Einsetzung eines rekursiven Operators: Es sei $\mathcal{F} : \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^{r+1} \to \mathcal{R}$ ein rekursiver Operator. Dann ist eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gesucht mit

$$\mathcal{J}(e) \in H \text{ und } (\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(e)}^{n,r+1}$$

für alle $e \in \mathbb{N}$ und $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathcal{R}^{r+1}$.
Wegen $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in \overline{W}_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, e, \vec{\alpha}, \beta) \in \overline{W}_f^{n+1,r+1}$, für ein geeignetes $f \in \mathbb{N}$ (§ 10, Satz 2 a)), existiert nach dem $\bar{s}$-m-n-Theorem (§ 10, Satz 2 b)) eine rekursive Funktion $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in \overline{W}_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \overline{W}_{G(e)}^{n,r+1}$ ($G(z) := \bar{s}_{n,r}^1(f, z)$).

Es genügt nun, eine rekursive Funktion $\mathcal{J}$ zu finden, die die folgenden drei Eigenschaften hat:
1) $\mathcal{J}(\langle 0, e\rangle) = \langle 0, G(e)\rangle$ für alle $e \in \mathbb{N}$,
2) $\mathcal{J}(\langle 1, e\rangle) = \langle 1, \mathcal{J}(e)\rangle$ für alle $e \in H$ und
3) $\mathcal{J}(\langle 2, e\rangle) = \langle 2, \varepsilon_{\mathcal{J}}(e)\rangle$ für alle $e \in \mathbb{N}$ mit $W_e^1 \subseteq H$. Es ist $\varepsilon_{\mathcal{J}}(e) \in \mathbb{N}$ mit $W_{\varepsilon_{\mathcal{J}}(e)}^1 = \{\mathcal{J}(f) \mid f \in W_e^1\}$.

Denn betrachte zu einer solchen Funktion $\mathcal{J}$ die Menge H' aller hyperarithmetischen Indizes, für die $\mathcal{J}$ die angestrebte Eigenschaft hat, also

$$H' := \{e \in H \mid \mathcal{J}(e) \in H \text{ und } (\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(e)}^{n,r+1}\}\,.$$

Es gelten dann:
a) $\langle 0, e\rangle \in H'$ für alle $e \in \mathbb{N}$, denn $\langle 0, G(e)\rangle \in H$ für alle $e \in \mathbb{N}$, und wegen
$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in \overline{W}_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \overline{W}_{G(e)}^{n,r+1} = H_{\langle 0, G(e)\rangle}^{n,r+1}$

folgt nach 1) $$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_{\langle 0,e\rangle}^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(\langle 0,e\rangle)}^{n,r+1}\,.$$

b) $e \in H' \longrightarrow \langle 1, e\rangle \in H'$, denn für $e \in H'$ ist $\mathcal{J}(e) \in H$, also $\langle 1, \mathcal{J}(e)\rangle \in H$, und es gilt

$$\text{nicht}\left\{ (\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_e^{n,r+1} \right\} \longleftrightarrow \text{nicht}\left\{ (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(e)}^{n,r+1} \right\}$$

und daher
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in \neg H_e^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \neg H_{\mathcal{J}(e)}^{n,r+1} = H_{\langle 1, \mathcal{J}(e)\rangle}^{n,r+1} ,$$

also nach 2)
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_{\langle 1,e\rangle}^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(\langle 1,e\rangle)}^{n,r+1} .$$

c) $W_e^1 \subseteq H' \longrightarrow \langle 2, e\rangle \in H'$, denn für $W_e^1 \subseteq H'$ ist $\mathcal{J}(f) \in H$ für alle $f \in W_e^1$, also $W_{\varepsilon_{\mathcal{J}}(e)}^1 \subseteq H$ und damit $\langle 2, \varepsilon_{\mathcal{J}}(e)\rangle \in H$, und es gilt

$$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in \bigcup_{f \in W_e^1} H_f^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in \bigcup_{f \in W_e^1} H_{\mathcal{J}(f)}^{n,r+1}$$

und daher
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_{\langle 2,e\rangle}^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\langle 2, \varepsilon_{\mathcal{J}}(e)\rangle}^{n,r+1} ,$$

also nach 3)
$$(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)) \in H_{\langle 2,e\rangle}^{n,r+1} \longleftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta) \in H_{\mathcal{J}(\langle 2,e\rangle)}^{n,r+1} .$$

H ist nach Definition die *kleinste* Menge mit den Eigenschaften a), b) und c). Wegen $H' \subseteq H$ erhalten wir also $H' = H$. Damit ist gezeigt, daß es genügt, eine rekursive Funktion $\mathcal{J}$ mit den Eigenschaften 1),2) und 3) zu finden. Um die Existenz einer solchen rekursiven Funktion $\mathcal{J}$ zu zeigen, gehen wir genauso vor wie beim Nachweis, daß die Ackermann-Funktion rekursiv ist (vgl. die Anwendung, die unmittelbar auf §4, Satz 5 folgt):
Betrachte $\varphi_z^1(x)$ für variables $z \in I\!N$. Definiere mit partiell rekursiver Fallunterscheidung

$$F(x,z) :\simeq \begin{cases} 0\,, & lg(x) \neq 2 \vee (x)_0 \notin \{0,1,2\} \\ \langle 0, G(y)\rangle\,, & x = \langle 0, y\rangle \\ \langle 1, \varphi_z^1(y)\rangle\,, & x = \langle 1, y\rangle \\ \langle 2, H(y,z)\rangle\,, & x = \langle 2, y\rangle \end{cases}$$

mit $H : I\!N^2 \to I\!N$ rekursiv, so daß $W_{H(y,z)}^1 = \{\varphi_z^1(x) \mid x \in W_y^1\} = \{u \in I\!N \mid \exists x\,(x \in W_y^1 \wedge u \simeq \varphi_z^1(x))\}$ (s-m-n-Theorem). F ist also eine partiell rekursive Funktion und damit ist $F = \varphi_g^2$ für ein geeignetes $g \in I\!N$. Nach dem s-m-n-Theorem existiert eine rekursive Funktion $h : I\!N \to I\!N$ mit $F(x,z) \simeq \varphi_{h(z)}^1(x)$ $(h(z) := s_2^1(g,z))$. Der Rekursionssatz liefert dann ein $f \in I\!N$ mit $\varphi_{h(f)}^1 = \varphi_f^1$; wir erhalten

$F(x,f) \simeq \varphi^1_f(x)$, also

$$\varphi^1_f(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, wenn } lg(x) \neq 2 \ \vee \ (x)_0 \notin \{0,1,2\} \\ \langle 0, G(y)\rangle & \text{, wenn } x = \langle 0,y\rangle \\ \langle 1, \varphi^1_f(y)\rangle & \text{, wenn } x = \langle 1,y\rangle \\ \langle 2, H(y,f)\rangle & \text{, wenn } x = \langle 2,y\rangle. \end{cases}$$

Durch Induktion über x folgt $\varphi^1_f(x)\downarrow$ für alle $x \in I\!N$ (beachte: $x = \langle 1,y\rangle$ impliziert $y < x$). φ^1_f ist also total und daher rekursiv. $\mathcal{J} := \varphi^1_f$ ist somit eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

$\exists x$: Es ist zu zeigen, daß eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!N \to I\!N$ existiert, so daß

$$\exists x H^{n+1,r}_e(x,\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow H^{n,r}_{\mathcal{J}(e)}(\vec{y},\vec{\alpha})$$

für alle $e \in H$ und $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ erfüllt ist. Wir gehen nach dem gleichen Prinzip wie im vorigen Fall vor, um die Existenz einer rekursiven Funktion $\overline{\mathcal{J}} : I\!N^2 \to I\!N$ mit

$$H^{n+1,r}_e(x,\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow H^{n,r}_{\overline{\mathcal{J}}(e,x)}(\vec{y},\vec{\alpha})$$

für alle $e \in I\!N$ und $(\vec{y},\vec{\alpha}) \in I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ zu zeigen.
Dann erhalten wir $\exists x H^{n+1,r}_e(x,\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow \bigvee_{x\in I\!N} H^{n,r}_{\overline{\mathcal{J}}(e,x)}(\vec{y},\vec{\alpha})$. Nach dem *s-m-n*-Theorem gibt es nun eine rekursive Funktion $F : I\!N \to I\!N$ mit $W^1_{F(e)} = \{\overline{\mathcal{J}}(e,x) \mid x \in I\!N\} = \{z \in I\!N \mid \exists x\, \overline{\mathcal{J}}(e,x) = z\}$. Wir erhalten also

$$\exists x H^{n+1,r}_e(x,\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow \bigvee_{f\in W^1_{F(e)}} H^{n,r}_f(\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow H^{n,r}_{\langle 2,F(e)\rangle}(\vec{y},\vec{\alpha})\,.$$

Die rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!N \to I\!N$ mit $\mathcal{J}(x) := \langle 2, F(x)\rangle$ erfüllt dann die gewünschte Äquivalenz.

Die Existenz von $\overline{\mathcal{J}}$ kann mit der Methode aus dem vorigen Fall nachgewiesen werden (Übung). Dabei ist zu beachten, daß neben e auch x Argument ist, $\overline{\mathcal{J}}$ also die folgenden Eigenschaften haben muß:
1) $\overline{\mathcal{J}}(\langle 0,e\rangle,x) = \langle 0, G(e,x)\rangle$ für ein $G : I\!N^2 \to I\!N$ rekursiv mit $W^{n+1,r}_e(x,\vec{y},\vec{\alpha}) \longleftrightarrow W^{n,r}_{G(e,x)}(\vec{y},\vec{\alpha})$,
2) $\overline{\mathcal{J}}(\langle 1,e\rangle,x) = \langle 1, \overline{\mathcal{J}}(e,x)\rangle$ und
3) $\overline{\mathcal{J}}(\langle 2,e\rangle,x) = \langle 2, \varepsilon_{\overline{\mathcal{J}}}(e,x)\rangle$ mit $W^1_{\varepsilon_{\overline{\mathcal{J}}}(e,x)} = \{\overline{\mathcal{J}}(f,x) \mid f \in W^1_e\}$.

$\forall x$: Folgt wegen $\forall x A = \neg\, \exists x \neg\, A$ für eine beliebige Relation A. ∎

Folgerung 5: *Alle arithmetischen Relationen sind hyperarithmetisch.*

BEWEIS: Die Menge der arithmetischen Relationen ist die *kleinste* Menge, die alle Σ_1^0- und alle Π_1^0-Relationen enthält und abgeschlossen ist unter $\exists x$ und $\forall x$. Die Menge der hyperarithmetischen Relationen enthält aber nach Definition alle Σ_1^0- und Π_1^0-Relationen und ist nach dem letzten Lemma auch unter $\exists x$ und $\forall x$ abgeschlossen. ▯

Wichtig für den Übergang zu anderen Stelligkeiten ist:

Lemma 6: *Es seien $n, r < \omega$.*

a) Es existiert eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$\mathcal{J}(e) \in H$ *und* $H^{n+1,r}_{\mathcal{J}(e)} = \mathbb{N} \times H^{n,r}_e$ *für alle* $e \in H$.

b) Es existiert eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$\mathcal{J}(e) \in H$ *und* $H^{n,r+1}_{\mathcal{J}(e)} = H^{n,r}_e \times \mathcal{R}$ *für alle* $e \in H$.

BEWEIS: Nach dem gleichen Prinzip wie der Beweis von Lemma 4 (Einsetzung eines rekursiven Operators) (Übung). ▯

Beispiele hyperarithmetischer Relationen müssen wegen Folgerung 3 aus Δ_1^1 sein. Am Anfang dieses Kapitels haben wir eine Δ_1^1-Relation kennengelernt. Für sie kann gezeigt werden:

<u>Übung 3:</u> Die universelle arithmetische Relation U ist hyperarithmetisch.

In § 11, Lemma 4 haben wir gesehen, daß $\mathcal{T}_\xi$ für alle $\xi < \omega_1^c$ aus Δ_1^1 ist. Diese $\mathcal{T}_\xi$'s sind weitere Beispiele hyperarithmetischer Mengen. Das folgende Lemma zeigt dies nur für Nachfolgerordinalzahlen. Es ist auch wesentlicher Beweisschritt für die Charakterisierung der Δ_1^1-Mengen unten (Folgerung 9).

Lemma 7: *Für alle $\xi < \omega_1^c$ ist $\mathcal{T}_{\xi+1}$ hyperarithmetisch.*
(Nach Folgerung 9 unten ist auch $\mathcal{T}_\xi$ hyperarithmetisch.)

BEWEIS: Es sei $\xi < \omega_1^c$.
Fall $\xi = -1$: Dann ist $\mathcal{T}_{\xi+1} = \mathcal{T}_0$ arithmetisch wegen $\alpha \in \mathcal{T}_0 \longleftrightarrow \forall x\, \alpha(x) \neq 0$, also hyperarithmetisch nach Folgerung 5.
Fall $\xi \geq 0$: Dann existiert ein rekursiver, fundierter Baum T mit $\mid T \mid = \xi$ (vgl. § 11), also $0 \in T$.
Wir betrachten die in § 11 definierte Abbildung $\mathrm{rg}_T : T \to On$. Wegen $0 \in T$ und

nach §11, Übung 1 haben wir $\mathrm{rg}_T(0) = | T_0 | = | T | = \xi$.
Wir zeigen, daß eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!\!N \to I\!\!N$ existiert, so daß für alle $s \in T$ $\mathcal{J}(s) \in H$ und $H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} = \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(s)+1}$ erfüllt sind.
Dann folgt $\mathcal{T}_{\xi+1} = \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(0)+1} = H^{0,1}_{\mathcal{J}(0)}$, also $\mathcal{T}_{\xi+1}$ hyperarithmetisch.
Zum Nachweis der Existenz von $\mathcal{J}$ betrachten wir die folgenden Äquivalenzen für $s \in T$ $(\star)$:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(s)+1} &\longleftrightarrow \text{“}T^\alpha \text{ Baum”} \ \wedge \ | T^\alpha | \leq \mathrm{rg}_T(s) \\
&\longleftrightarrow \text{“}T^\alpha \text{ Baum”} \ \wedge \ \forall i \, (\langle i \rangle \in T^\alpha \to | T^\alpha_{\langle i \rangle} | < \mathrm{rg}_T(s)) \\
&\longleftrightarrow \text{“}T^\alpha \text{ Baum”} \ \wedge \ \forall i \, (\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j \, (s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge \ | T^\alpha_{\langle i \rangle} | \leq \mathrm{rg}_T(s^\frown\langle j \rangle))) \\
&\longleftrightarrow \text{“}T^\alpha \text{ Baum”} \ \wedge \ \forall i \, (\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j \, (s^\frown\langle j \rangle \in T \ \wedge \ K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in \mathcal{T}_{rg_T(s^\frown\langle j \rangle)+1}))
\end{aligned}$$

Es genügt nun, eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!\!N \to I\!\!N$ zu finden, so daß gilt $(\star\star)$:

$$\mathcal{J}(s) \in H \ \text{ und } \ \alpha \in H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} \longleftrightarrow \text{“}T^\alpha \text{ Baum”} \ \wedge \forall i \, (\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j \, (s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in H^{0,1}_{\mathcal{J}(s^\frown\langle j \rangle)}))$$

für alle $s \in T$.
Denn für eine solche Funktion $\mathcal{J}$ folgt durch Induktion über $\mathrm{rg}_T(s)$:
$H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} = \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(s)+1}$ für alle $s \in T$.
Dazu sei $s \in T$ mit $\mathrm{rg}_T(s) = 0$. Dann folgt nach Definition von rg_T $s^\frown\langle i \rangle \notin T$ für alle $i \in I\!\!N$. In der Äquivalenz aus $(\star\star)$ ist somit $\exists j \, (s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in H^{0,1}_{\mathcal{J}(s^\frown\langle j \rangle)})$ nie erfüllt, also gilt $\langle i \rangle \notin T^\alpha$ für alle $i \in I\!\!N$. D.h. $H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} = \Big\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid T^\alpha \in \{ \emptyset, \{0\} \} \Big\} = \mathcal{T}_1$.
Es sei nun $s \in T^\alpha$ mit $\mathrm{rg}_T(s) = \gamma$, und für alle $t \in T^\alpha$ mit $\mathrm{rg}_T(t) < \gamma$ gelte $H^{0,1}_{\mathcal{J}(t)} = \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(t)+1}$.
Aus $(\star\star)$ erhalten wir dann nach Induktionsvoraussetzung
$\alpha \in H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} \longleftrightarrow$ “T^α Baum” $\wedge \forall i \, (\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j \, (s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(s^\frown\langle j \rangle)+1}))$,
und mit $(\star)$ folgt $\alpha \in H^{0,1}_{\mathcal{J}(s)} \longleftrightarrow \alpha \in \mathcal{T}_{\mathrm{rg}_T(s)+1}$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß eine rekursive Funktion $\mathcal{J} : I\!\!N \to I\!\!N$ mit $(\star\star)$ existiert.
Wir nutzen dazu den Rekursionssatz aus und betrachten $\varphi^1_z(x)$ für variables $z \in I\!\!N$. Beachte, daß $\mathcal{F}(i, \alpha) := K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}}$ ein rekursiver Operator ist, denn $\mathcal{F}(i,\alpha)(t) = \mu\, u \, ([u = 0 \ \wedge \ Eins^{1,1}(\langle i \rangle^\frown t, \alpha) = 0] \vee u = 1)$ ist rekursiv in i, t und α, da $\langle i \rangle^\frown t$ rekursiv in i und t ist (vgl. § 11).

Nach Lemmata 6 und 4 existieren rekursive Funktionen $\mathcal{J}_1$ bzw. $\mathcal{J}_2$, die für alle $e \in H$
$\mathcal{J}_1(e), \mathcal{J}_2(e) \in H$ und die folgenden Äquivalenzen erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(i,\alpha) \in H^{0,1}_e &\longleftrightarrow (\,i, \mathcal{F}(i,\alpha)\,) \in \mathbb{N} \times H^{0,1}_e \\ &\longleftrightarrow (\,i, \mathcal{F}(i,\alpha)\,) \in H^{1,1}_{\mathcal{J}_1(e)} \\ &\longleftrightarrow (i,\alpha) \in H^{1,1}_{\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1(e))} \end{aligned}$$

Für die rekursive Funktion $\overline{\mathcal{J}}(f) := \mathcal{J}_2(\,\mathcal{J}_1(f)\,)$ sind somit $\overline{\mathcal{J}}(e) \in H$ und $K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in H^{0,1}_e \longleftrightarrow (i,\alpha) \in H^{1,1}_{\overline{\mathcal{J}}(e)}$ für alle $e \in H$ erfüllt.
Weiter existiert nach dem s-m-n-Theorem eine rekursive Funktion $\mathcal{J}' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$W^1_{\mathcal{J}'(s,z)} = \{\overline{\mathcal{J}}(\,(\varphi^1_z(s^\frown\langle j \rangle))\,) \mid j \in \mathbb{N} \text{ mit } s^\frown\langle j \rangle \in T\} = \{u \in \mathbb{N} \mid \exists j\,(\,s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge u \simeq \overline{\mathcal{J}}(\,\varphi^1_z(s^\frown\langle j \rangle)\,)\,)\}$.
Es seien $f, g \in H$ mit $H^{0,1}_f = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid T^\alpha \text{ Baum }\}$ („T^α Baum" ist Π^0_1 (vgl. Beweis von § 11, Lemma 1)) und $H^{1,1}_g = \{(i,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathcal{R} \mid \alpha(\langle i \rangle) \neq 0\}$.
Wir erhalten dann, ausgehend von $(\star\star)$ mit $\mathcal{J}$ ersetzt durch φ^1_z, die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} &\text{„}T^\alpha \text{ Baum"} \;\wedge \forall i\,(\,\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j\,(\,s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in H^{0,1}_{\varphi^1_z(s^\frown\langle j \rangle)}\,)\,) \\ \longleftrightarrow\; &\alpha \in H^{0,1}_f \wedge \forall i\,(\,\alpha(\langle i \rangle) \neq 0 \vee \exists j\,(\,s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge (i,\alpha) \in H^{1,1}_{\overline{\mathcal{J}}(\,\varphi^1_z(s^\frown\langle j \rangle)\,)}\,)\,) \\ \longleftrightarrow\; &\alpha \in H^{0,1}_f \wedge \forall i\,(\,(i,\alpha) \in H^{1,1}_g \vee (i,\alpha) \in \bigcup_{u \in W^1_{\mathcal{J}'(s,z)}} H^{1,1}_u\,) \\ \longleftrightarrow\; &\alpha \in H^{0,1}_f \wedge \forall i\,(\,(i,\alpha) \in H^{1,1}_g \cup H^{1,1}_{\langle 2, \mathcal{J}'(s,z) \rangle}\,) \end{aligned}$$

Mit Lemma 4 sieht man, daß eine rekursive Funktion $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$G(s,z) \in H \quad \text{und} \quad \alpha \in H^{0,1}_f \wedge \forall i\,(\,(i,\alpha) \in H^{1,1}_g \cup H^{1,1}_{\langle 2, \mathcal{J}'(s,z) \rangle}\,) \longleftrightarrow \alpha \in H^{0,1}_{G(s,z)}$$

für alle $(s,z) \in \mathbb{N}^2$ mit $\langle 2, \mathcal{J}'(s,z) \rangle \in H$ erfüllt sind (Übung).
Nach dem s-m-n-Theorem existiert eine rekursive Funktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi^1_{r(z)}(s) = G(s,z)$, und der Rekursionssatz liefert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^1_k = \varphi^1_{r(k)}$, also $\varphi^1_k(s) = G(s,k)$.
Damit ist φ^1_k total, und für alle $s \in \mathbb{N}$ mit $\langle 2, \mathcal{J}'(s,k) \rangle \in H$ haben wir:

$$\varphi^1_k(s) \in H \text{ und } \text{„}T^\alpha \text{ Baum"} \wedge \forall i\,(\,\langle i \rangle \in T^\alpha \to \exists j\,(\,s^\frown\langle j \rangle \in T \wedge K_{T^\alpha_{\langle i \rangle}} \in H^{0,1}_{\varphi^1_k(s^\frown\langle j \rangle)}\,)\,) \longleftrightarrow \alpha \in H^{0,1}_{\varphi^1_k(s)}\,.$$

Durch Induktion über $\mathrm{rg}_T(s)$ zeigen wir noch: $\langle 2, \mathcal{J}'(s,k)\rangle \in H$ für alle $s \in T$.
Es sei $s \in T$ mit $\mathrm{rg}_T(s) = 0$. Dann ist für alle $i \in I\!N$ $s^\frown\langle i\rangle \notin T$ und damit $W^1_{\mathcal{J}'(s,k)} = \emptyset \subset H$. Es folgt $\langle 2, \mathcal{J}'(s,k)\rangle \in H$ nach Definition der hyperarithmetischen Indizes.
Es sei $s \in T$ mit $\mathrm{rg}_T(s) = \gamma$, und für alle $t \in T$ mit $rg_t(t) < \gamma$ gelte $\langle 2, \mathcal{J}'(t,k)\rangle \in H$.
Dann folgt für alle $j \in I\!N$ mit $s^\frown\langle j\rangle \in T$ nach Induktionsvoraussetzung und Eigenschaft von φ^1_k $\varphi^1_k(s^\frown\langle j\rangle) \in H$, also auch $\overline{\mathcal{J}}(\varphi^1_k(s^\frown\langle j\rangle)) \in H$ und somit $\langle 2, \mathcal{J}'(s,k)\rangle \in H$.
Damit ist $\mathcal{J} := \varphi^1_k$ eine rekursive Funktion mit $(\star\star)$. ▯

Mit Hilfe von Lemma 7 läßt sich der folgende Trennungssatz für Σ^1_1-Relationen beweisen. Als Folgerung daraus erhalten wir dann die Charakterisierung der Δ^1_1-Mengen.

Satz 8: *Disjunkte Σ^1_1-Relationen lassen sich hyperarithmetisch trennen.*

Beweis: Es seien $A, B \in \Sigma^1_1$. Im Beweis von Satz 6 in § 11 hatten wir gesehen, daß es einen rekursiven Operator $\mathcal{F}$ und ein $\eta < \omega^c_1$ gibt, so daß $C := \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{T}_\eta\}$ die Mengen A und B trennt. Dabei kann η als Nachfolgerordinalzahl, also $\eta = \xi + 1$ mit $\xi < \omega^c_1$, gewählt werden (siehe Beweis von § 11, Satz 6). Dann ist C nach Lemma 7 hyperarithmetisch. ▯

Folgerung 9: *Für alle $n, r < \omega$ und $A \subseteq I\!N^n \times \mathcal{R}^r$ gilt:*
A ist hyperarithmetisch $\Longleftrightarrow A \in \Delta^1_1$.

Beweis: Wegen Folgerung 3 ist nur noch eine Richtung zu zeigen.
Es sei A eine Δ^1_1-Relation. Dann sind A und $\neg A$ disjunkte Σ^1_1-Relationen. Nach Satz 7 existiert also eine hyperarithmetische Relation H mit $A \subseteq H$ und $\neg A \subseteq \neg H$, also $A \subseteq H \subseteq A$. ▯

Literatur

J. Barwise, *Admissible Sets and Structures.*
Berlin/Heidelberg/New York 1975

N. Cutland, *Computability.*
Cambridge 1980

M. Davis und E.J. Weyuker, *Computability, Complexity, and Languages.*
New York/San Francisco/London 1983

H.B. Enderton, *Elements of Recursion Theory,*
in: J. Barwise (Ed.), Handbook of Mathematical Logic.
Berlin/Heidelberg/New York 1977

K. Heidler, H. Hermes, F.-K. Mahn, *Rekursive Funktionen.*
Mannheim 1977

H. Hermes, *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.*
Berlin/Heidelberg/New York ^{3}1978

P.G. Hinman, *Recursion Theoretic Hierarchies.*
Berlin/Heidelberg/New York 1978

S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics.*
Amsterdam ^{4}1964

M. Machtey und P.R. Young, *An Introduction to the General Theory of Algorithms.*

New York/Oxford/Shannon 1978

A.I. Malcev, *Algorithmen und rekursive Funktionen.*
Braunschweig 1974

H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.*
New York 1967

J.R. Shoenfield, *Degrees of Unsolvability.*
Amsterdam/New York 1971

J.R. Shoenfield, *Mathematical Logic.*
Reading/Mass. 1967

S.G. Simpson, *Degrees of Unsolvability: A Survey of Results*,
in: J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic.*
Berlin/Heidelberg/New York 1977

A. Yasuhara, *Recursive Function Theory and Logic.*
New York 1971

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Register

Errata in der 1. Auflage

Niemand ist ohne Fehler – nicht einmal das Rekursionstheorie-Skript.
Die zweite Auflage (1987) ist durchgesehen und verbessert sowie um ein Schlagwortregister und einen Index der verwendeten Notationen erweitert worden.
Dies ist eine Liste der sachlichen Verbesserungen, die gegenüber der ersten Auflage nötig waren.

Seite 1 bis 89	(31. März 1987)

Übungen umnumeriert.

Seite 6, Zeile 6	(31. März 1987)

Im Fall $(l > 0)$ muß es statt "W_{a_l}" heißen "Wa_l für ein W".

Seite 9, Zeile 3	(31. März 1987)

Statt "$(W_0, \dots, W_R, \dots, W_{R-1})$" muß es heißen "$(W_0, \dots, W_r, \dots, W_{R-1})$".

Seite 10, Zeile 7	(31. März 1987)

Statt "B_i" muß es "B^i" heißen.

Seite 10, die letzten 5 Zeilen	(31. März 1987)

Statt "$\emptyset$" muß es jeweils "0" heißen.

Seite 13, Zeile 7	(1. April 1987)

Statt "durch Einsetzen von C_0^0 in I_0^n" muß es heißen "durch Einsetzen von I_1^n in C_0^0".

Seite 14, Zeile 18	(1. April 1987)

Statt "$K_P \cdot \ldots \cdot K_Q$" muß es heißen "$K_P \cdot K_Q$".

Seite 14, Zeilen 4 und 2 von unten	(1. April 1987)

Statt "$\neg P_0(\vec{x}), \dots, \neg P_n(\vec{x})$" muß es heißen "$\neg P_1(\vec{x}), \dots, \neg P_n(\vec{x})$".

Seite 15, Zeilen 4 f.	(1. April 1987)

Statt "$\neg P_0(\vec{x})$" muß es jeweils heißen "$\neg P_1(\vec{x})$".

Seite 15, Zeile 10	(1. April 1987)

Statt "$K_{=0}(K_R(\vec{x}, z) \wedge K_P(\vec{x}, z))$" muß es heißen "$K_{=0}(K_R(\vec{x}, z) + K_P(\vec{x}, z))$".

Seite 17, Zeile 4	(1. April 1987)

Statt “$g(\vec{x}, 0, 0)$” muß es heißen “$g(\langle\vec{x}\rangle, 0, 0)$”.

Seite 18, Zeile 2	(1. April 1987)

Statt “ ‘$\mathcal{W}_w \in A_L^*$’ ” muß es heißen “ ‘$\mathcal{W}_w \in A^*$’, wobei $A = \{a_1, \ldots, a_L\}$”.

Seite 14 f.	(1. April 1987)

Die in Lemma 9 erwähnte Funktion muß statt “N” “Na” heißen.

Seite 18, Zeilen 13 f.	(1. April 1987)

Zum Beweis werden *drei* Hilfsfunktionen benötigt: $Ers(s, i, y)$ bleibt unverändert; neu definiert wird

$$D(s, i) := \langle x_0, \ldots, x_{n-1}, i\rangle, \text{ wenn } s = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle.$$

Dadurch vereinfacht sich die Definition von $F(s, i)$ entsprechend.

Seite 19, Zeile 2	(1. April 1987)

Statt “$(r, c_1, \ldots, c_L)$” muß es heißen “$(r, c_0, \ldots, c_l)$”.

Seite 19, Zeile 10 von unten	(1. April 1987)

Statt “$G_n(t+1, \vec{x}) = F(g(t, \vec{x}), 0)$” muß es heißen “$G_n(t+1, \vec{x}) = D(g(t, \vec{x}), 0)$”.

Seite 22, Zeile 3	(1. April 1987)

Statt “$\mu y(g(x_1, \ldots, x_n) = 0$” muß es heißen “$\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$”.

Seite 22, Zeile 10 von unten	(1. April 1987)

Statt “$\varphi_{s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n)$” muß es heißen “$\varphi^n_{s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n)$”.

Seite 22, Zeile 3 von unten	(1. April 1987)

Statt “$\varphi^m_{s_n^m(e, \vec{y})}(\vec{x})$” muß es heißen “$\varphi^n_{s_n^m(e, \vec{y})}(\vec{x})$”.

Seite 23, Zeile 1	(1. April 1987)

Statt “$\langle b_0, \ldots, b_n\rangle$” muß es heißen “$\langle\ulcorner b_0\urcorner, \ldots, \ulcorner b_n\urcorner\rangle$”.

Seite 23, Zeile 2	(1. April 1987)

Die linke Gleichung “$M' = ((n+1, 1), \ldots, (n+1, 1), \overline{b}_0, \ldots, \overline{b}_N)$” wird ergänzt zu “$M' = (\underbrace{(n+1, 1), \ldots, (n+1, 1)}_{y\text{-viele}}, \overline{b}_0, \ldots, \overline{b}_N)$”.

Seite 23, Zeile 2	(1. April 1987)

Statt "$\langle n+1,1\rangle,\dots,\langle n+1,1\rangle,\overline{b}_0,\dots,\overline{b}_n\rangle$" muß die rechte Gleichung heißen: "$\langle n+1,1\rangle,\dots,\langle n+1,1\rangle,\overline{b}_0,\dots,\overline{b}_N\rangle$" heißen.

Seite 23, Zeile 4	(1. April 1987)

Statt "$\langle r,l\rangle$" muß es jeweils heißen "(r,l)".

Seite 23, Zeile 6	(1. April 1987)

Statt "$b_i = \langle r,c_0,\dots,c_n\rangle \implies \overline{b}_i = \langle r,c_0+y,\dots,c_n+y\rangle$" muß es heißen "$b_i = (r,c_0,\dots,c_L) \implies \overline{b}_i = (r,c_0+y,\dots,c_L+y)$".

Seite 23, Zeile 9	(1. April 1987)

Statt "$p_b^{(b+x)^2}$" muß es heißen "$p_b^{(b+y)^2}$".

Seite 23, Zeile 12	(1. April 1987)

Statt "$p_{e+y}^{((e+y)+\langle m+1,1\rangle)^2}$" muß es heißen "$p_{e+y}^{((e+y)+\langle n+1,1\rangle)^2}$".

Seite 25, Zeile 19	(1. April 1987)

Statt "$\varphi_{h(z)}(n,x,y)$" muß es heißen "$\varphi^3_{h(z)}(n,x,y)$".

Seite 26, Zeile 11	(1. April 1987)

Statt "$\varphi^2_{e_0}(x,z)$" muß es heißen "$\varphi^2_{e_1}(x,z)$".

Seite 29, Zeilen 17 f.	(1. April 1987)

Statt "x" muß es jeweils "$\vec{x}$" heißen.

Seite 29, Zeile 10	(13. Februar 1987)

"$K_A = \varphi$ partiell rekursiv" wird ergänzt zu "$K_A = \varphi$ partiell rekursiv und total".

Seite 30, Zeile 12 von unten	(13. Februar 1987)

Statt "$A,B \in \mathbb{N}^n$" muß es "$A,B \subseteq \mathbb{N}^n$" heißen.

Seite 30, Zeile 11 von unten	(13. Februar 1987)

"$A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A^* \uplus B^* = A \cup B$" wird ergänzt zu "$A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A^* \cap B^* = \emptyset$, $A^* \uplus B^* = A \cup B$", auch wenn das redundant ist.

Seite 31, Zeile 5	(2. April 1987)

Zur Erläuterung wird eingefügt "($A^* \uplus B^*$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung von A^* und B^*.)".

Seite 34, Zeile 19	(2. April 1987)

Statt “$f((gf)^n(a)$” muß es heißen “$f(gf)^n(a)$”.

Seite 35, Zeile 12	(2. April 1987)

Ergänze “Lemma 1b” zu “§ 5, Lemma 1b”.

Seite 35, Zeile 8 von unten	(2. April 1987)

Statt “$A = f^{-1}(B)$” muß es heißen “$A = f^{-1}[B]$”.

Seite 36, Zeile 7	(2. April 1987)

Statt “$h^{-1}(A_1)$” muß es heißen “$h^{-1}[A_1]$”.

Seite 36, Zeilen 17, 16 und 12 von unten	(2. April 1987)

Statt “$W_e^2(y,z,x)$” bzw. “$W_e^2(y,\varphi(h(x)),x)$” muß es jeweils heißen
“$W_e^3(y,z,x)$” bzw. “$W_e^3(y,\varphi(h(x)),x)$”.

Seite 36, Zeile 15 von unten	(2. April 1987)

Statt “$\varphi_f(s(f))$” muß es heißen “$\varphi_f^1 s(f)$”.

Seite 36, Zeile 4 von unten	(2. April 1987)

Ergänze “(Vergleiche § 3, Übung 1.)”. (Das ist Übung 5 in der alten Numerierung.)

Seite 37, Zeile 4	(2. April 1987)

Statt “$f^{-1}(D_x)$” muß es heißen “$f^{-1}[D]$”.

Seite 38, Zeilen 19 bis 23	(11. Februar 1987)

Statt “rg” muß es jeweils “rng” heißen.

Seite 43, Zeilen 13, 19 und 24	(2. April 1987)

Statt “$f(x)$” muß es jeweils “$f(\vec{x})$” heißen.

Seite 47, Zeile 7 von unten	(2. April 1987)

Statt “$\overline{h((g)_1)}$” muß es “$\overline{h((g)_2)}$” heißen.

Seite 48, Zeilen 18 f.	(2. April 1987)

Statt
“$\leftrightarrow \exists g[T^{n+2}(e,\overline{h((g)_1)},(g)_0,\vec{x},(g)_2) \wedge (g)_0 = x_0] \leftrightarrow (\mu g T^{n+2}(e,\overline{h((g)_1)},(g)_0,\vec{x},(g)_2))_0 \simeq x_0$
$\leftrightarrow (\mu g \tilde{T}^n(e,\overline{h((g)_1)},\vec{x},g))_0 \simeq x_0$”
muß es heißen
“$\leftrightarrow \exists g[T^{n+2}(e,\overline{h((g)_2)},(g)_0,\vec{x},(g)_1) \wedge (g)_0 = x_0] \leftrightarrow (\mu g T^{n+2}(e,\overline{h((g)_2)},(g)_0,\vec{x},(g)_1))_0 \simeq x_0$
$\leftrightarrow (\mu g \tilde{T}^n(e,\overline{h((g)_2)},\vec{x},g))_0 \simeq x_0$”.

Seite 48, Zeile 22 (2. April 1987)

Statt "$\varphi_e^{n+m}[h](x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$" muß es heißen "$\varphi_e^{n+m}[h](x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$".

Seite 49, Zeile 9 (2. April 1987)

Ergänze "Analog $W_e^n[A] := W_e^n[K_A]$.".

Seite 52, Zeile 3 von unten (3. April 1987)

Statt "$A = \overline{W}_e[A]$" muß es "$A = W_e[A]$" heißen.

Seite 58, Zeile 3 (17. Februar 1987)

Statt "$\overline{W}_e[C](x)$ ist eine in C ..." muß es heißen "$\overline{W}_e^i[C](x)$ ist eine in C ...".

Seite 58, Zeile 2 von unten (17. Februar 1987)

Statt "$x \notin \overline{W}_e^i[b_i]$" muß es heißen "$x \notin \overline{W}_e^i[b_{i-1}]$".

Seite 60, Zeile 16 (17. Februar 1987)

Statt "$x \notin \overline{W}_e^i[b_i]$" muß es heißen "$x \notin \overline{W}_e^i[b_{i-1}]$".

Seite 63, Zeile 22 (17. Februar 1987)

Statt "$H(F_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), \ldots, F_k(\vec{x}, \vec{\alpha}))$" muß es heißen "$H(F_1(\vec{x}, \vec{\alpha}), \ldots, F_k(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{\alpha})$".

Seite 64, Zeile 2 von unten (3. April 1987)

Statt "$\overline{W}^{n,r}_{\overline{s}^m_{n,r}(y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$" muß der Ausdruck auf der rechten Seite heißen: "$\overline{W}^{n,r}_{\overline{s}^m_{n,r}(e, y_1, \ldots, y_m)}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$".

Seite 67, Zeilen 19, 17 und 2 von unten (3. April 1987)

Statt "Π_m^0" muß es jeweils "Π_m^1" heißen.

Seite 67, Zeile 10 von unten (3. April 1987)

Am Ende der Zeile fehlt ein "$(\star)$".

Seite 67, Zeilen 10 und 6 von unten (3. April 1987)

Statt "Π_m^1" muß es jeweils "Π_{m+1}^1" heißen.

Seite 68, Zeile 6 von unten (3. April 1987)

Statt "Π_n^0" muß es "Π_{n+1}^0" heißen.

Seite 71, Zeile 10 (11. Februar 1987)

Statt "Die obere Eigenschaft ist Π_0^1" muß es heißen: "Die obere Eigenschaft ist Π_1^0".

Seite 71 f.	(6. April 1987)

Die Definition des Rangs und die Anmerkung zur Erlaubtheit werden gestrichen und durch das folgende ersetzt:
"Es sei T ein fundierter Baum. Dann läßt sich eine *Rang*-Funktion rg_T definieren, die jedem $s \in T$ eine Ordinalzahl wie folgt zuordnet:

$\mathrm{rg}_T(s)$ ist 0, wenn s ein "Blatt" des Baumes T ist, und sonst die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als die Ränge aller Nachfolger von s.

Diese Definition ist nur für fundierte Bäume sinnvoll, da sonst ein unendlicher Regreß in der Definition eintritt. Der *Rang* eines Baumes ist dann gleich dem höchsten Rang eines seiner Elemente, nämlich $\mathrm{rg}_T(0)$.

Formal:

Definition : a) Für fundierte Bäume T ist der T-**Rang** eine Funktion

$$\mathrm{rg}_T : T \to On$$
$$s \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \forall i\, s^\frown\langle i\rangle \notin T \\ \min\{y \mid \forall i \in \mathbb{N}\, y > \mathrm{rg}_T(s^\frown\langle i\rangle)\} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

b) Für alle Bäume T wird der **Rang** von T definiert als

$$|T| := \begin{cases} \mathrm{rg}_T(0) & \text{, wenn } T \text{ fundiert und nichtleer} \\ -1 & \text{, wenn } T \text{ leer} \\ \omega_1 & \text{, wenn } T \text{ nicht fundiert und nichtleer.} \end{cases}$$

c) Für Funktionen α definieren wir entsprechend $|\alpha| := |T^\alpha|$."

Seite 72, Zeile 5 von unten	(6. April 1987)

Übung 26 (in der alten Numerierung) von §12 (Seite 79) wird hinter die Bemerkungen eingefügt.

Seite 71, Zeile 15 von unten	(11. Februar 1987)

Statt "$R(\vec{x},\vec{s},t) \leftrightarrow \exists l R''(\vec{x},\vec{s},t,l)$" muß es heißen: "$R'(\vec{x},\vec{s},t) \leftrightarrow \exists l R''(\vec{x},\vec{s},t,l)$".

Seite 77, Zeilen 8, 10 und 12	(17. Februar 1987)

In Korollar 8 muß es statt "Σ_1^2" jeweils heißen "Σ_2^1".

Seite 77, Zeile 11	(17. Februar 1987)

Statt "$\bar{S}(\alpha,\delta)$" muß es heißen "$\bar{S}(\alpha,\beta)$".

Seite 79, Zeile 12	(6. April 1987)

Statt "$T^\beta_{(1)} := T^\beta$" heißt es besser "$T^\beta_{(1)} := \{x \mid \beta(x) = 0\}\ (= T^\beta!)$".

Seite 79, Zeilen 19 bis 24	(6. April 1987)

Die Definition des Rangs und die Übung werden hier gestrichen. (Vgl. §11)

Seite 83, Zeile 6 von unten	(6. März 1987)

Statt "$\{(e,i) \mid e \in H \wedge K_{H_e^{n,r}}(\vec{x},\vec{\alpha}) = i\}$ als $I^{\hat{\Gamma}(\vec{x},\vec{\alpha})}$" muß es heißen "$\{(e,i,x) \mid e \in H \wedge K_{H_e^{n,r}}(\vec{x},\vec{\alpha}) = i\}$ als $I^{\hat{\Gamma}(\vec{\alpha})}$".