# Stabile Gruppen*

Martin Ziegler

Vorlesung WS 90/91

## Literatur

[H] Humphreys *Linear algebraic groups*, Springer, New York

[N] Nesin, Pillay (ed.) *Model theory of groups*, University of Notre Dame Press, Notre Dame Indiana

[P] Poizat *Groupes stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Mari'fah,Villeurbanne

## Inhaltsverzeichnis



*Version 8 (14. November 2006)

# 1 Der Satz von Reineke

Eine Gruppe ist in dieser Vorlesung eine Gruppe mit Zusatzstruktur. Eine Gruppe ohne Zusatzstruktur nennen wir *reine* Gruppe. Typisches Beispiel ist die additive Gruppe eines Körpers, die Multiplikation ist Zusatzstruktur. Allgemeiner betrachten wir Gruppen $G$, die in einer Struktur $M$ definierbar sind: Das Universum ist eine definierbare Teilmenge von $M^n$, die Multiplikation ist in $M$ definierbar.

**Definition** *Eine unendliche Struktur $M$ heißt* minimal*, wenn jede (mit Parametern) definierbare Teilmenge von $M$ endlich oder koendlich ist.*

Algebraisch abgeschlossene Körper haben Quantorenelimination: jede definierbare Teilmenge ist boolesche Kombination von Gleichungen. Gleichungen in einer Variablen werden aber von allen oder nur von endlich vielen Elementen erfüllt: algebraisch abgeschlossene Körper sind also minimal.

**Satz** *Minimale Gruppen sind abelsch.*

Beweis:
$G$ sei minimale Gruppe. Zunächst bemerken wir, daß jede echte definierbare Untergruppe von $G$ endlich ist. Wenn wir annehmen, daß $G$ nicht abelsch ist, ist das Zentrum $\mathrm{Z}$ von $G$ endlich. Wir führen diese Annahme zum Widerspruch. Für $a \in G \setminus \mathrm{Z}$ ist der Zentralisator

$$\mathrm{C}(a) = \{g \in G \mid a^g = a\}$$

(Notation: $a^g = g^{-1}ag$)
endlich. Weil $a$ zu $\mathrm{C}(a)$ gehört, hat $a$ endliche Ordnung. Andererseits entsprechen die Konjugierten $a^g$ von $a$ bijektiv den Linksnebenklassen von $\mathrm{C}(a)$. Die Konjugationsklasse $a^G$ von $a$ ist also unendlich, mithin koendlich. Das ist nur möglich, wenn alle $a \in G \setminus \mathrm{Z}$ konjugiert sind.

In der Quotientengruppe $H = G/\mathrm{Z}$ haben also alle Elemente endliche Ordnung und alle Elemente $\neq 1$ sind konjugiert. Wir zeigen, daß ein solches $H$ höchstens zwei Elemente haben kann. Das widerspricht aber der Endlichkeit von $\mathrm{Z}$.
Alle Elemente $a \neq 1$ von $H$ haben dieselbe Ordnung $p$. In der von $a$ erzeugten Untergruppe von $H$ kommen Elemente aller Ordnungen vor, die $p$ teilen. $p$ muß also prim sein.

Behauptung: $p = 2$
Wenn $p \neq 2$, wären $a$ und $a^2$ konjugiert, also $a^2 = a^h$ für ein $h \in H$. Wir haben dann

$$a = a^{h^p} = a^{2^p}.$$

Aus $2^p \equiv 2 \pmod p$ folgt dann $a = a^2$. Widerspruch.

Eine Gruppe vom Exponenten 2 muß aber abelsch sein: Denn für den Kommutator $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ gilt

$$[a,b] = abab = (ab)^2 = 1.$$

In einer abelschen Gruppe ist jedes Element nur zu sich selbst konjugiert. Also kann $H$ nur ein Element $\neq 1$ haben. $\square$

# 2 Algebraische Gruppen

Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Nullstellenmengen von Systemen von Polynomgleichungen

$$\mathrm{V}(p_i)_{i \in I} = \{a \in K^n \mid p_i(a) = 0 \quad (i \in I)\},$$

wobei $p_i \in K[X_1 \dots X_n]$, sind die abgeschlossenen Mengen der *Zariski–Topologie* von $K^n$. Dieser Raum ist $T_1$ (aber nicht $T_2$) und *noethersch*: jede echt absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen bricht ab. Das folgt daraus, daß $K[X_1 \dots X_n]$ noethersch ist.

Sei $U$ eine offene Umgebung von $x$. Eine Funktion $f : U \to K$ heißt *regulär* bei $x$, wenn $f$ sich in einer Umgebung von $x$ als rationale Funktion schreiben läßt. (Beachte, daß der Definitionsbereich einer rationalen Funktion aus $K(X_1 \dots X_n)$ eine nicht-leere offene Menge ist). $f$ heißt regulär, wenn $f$ an allen Punkten von $U$ regulär ist. $K^n$ wird dadurch ein geringter Raum:

**Definition** *Ein* geringter Raum $(X, \Gamma)$ *ist ein topologischer Raum $X$ mit einer Garbe $\Gamma$ von $K$-Algebren von Funktionen nach $K$. Das heißt: Jeder nicht-leeren offenen Menge $U$ ist eine $K$-Algebra $\Gamma(U)$ von „regulären" Funktionen von $U$ nach $K$ zugeordnet, die das Garbenaxiom erfüllt: Für jede offene Überdeckung $(U_i)$ von $U$ ist $f$ genau dann aus $\Gamma(U)$, wenn alle $f \restriction U_i$ regulär sind.*

Ist $(Y, \Gamma)$ ein geringter Raum und $\phi : X \to Y$ eine Abbildung, wird auf $X$ auf natürliche Weise die Struktur eines geringten Raumes induziert: Die Topologie ist die Urbildtopologie, die Garbe $\phi^{\#}\Gamma$ ist definiert durch:

> $f \in \phi^{\#}\Gamma(U)$ gdw. wenn $f$ lokal von der Form $g \circ \phi$ für ein $g \in \Gamma(W)$ mit $\phi^{-1}(W) \subset U$ ist.

Insbesondere ist jede Teilmenge von $Y$ wieder ein geringter Raum.

(Die Struktur auf $X$ ist die „gröbste", für die $\phi$ ein Morphismus von geringten Räumen wird. Ist umgekehrt eine surjektive Abbildung $\psi : Y \to Z$ gegeben, so definiert man leicht auf $Z$ eine *feinste* Struktur, für die $\psi$ ein Morphismus wird.)

**Definition** $(X, \Gamma_X)$ *und* $(Y, \Gamma_Y)$ *seien geringte Räume. Eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ ist ein* Morphismus *wenn $\phi^{\#}\Gamma_Y \subset \Gamma_X$; das heißt, wenn für jedes $g \in \Gamma_Y(W)$ die Abbildung $g \circ \phi$ zu $\Gamma_X(\phi^{-1}(W))$ gehört.*

Eine abgeschlossene Teilmenge $V$ von $K^n$ ist mit der induzierten Struktur ein geringter Raum. Eine *affine Varietät* ist ein geringter Raum, der zu einem solchen $V$ isomorph ist. Die Morphismen affiner Varietäten haben eine einfache Gestalt:

**Lemma 1** *$X$ und $Y$ seien abgeschlossen in $K^m$ bzw. $K^n$. Dann sind die Morphismen von $X$ nach $Y$ gerade die Funktionen, die von polynomialen Abbildungen $K^m \to K^n$ gegeben werden.*

*Die Morphismen von $X$ nach $K$ sind genau die Elemente von $\Gamma(X)$, die regulären Abbildungen.*

**Definition** *Eine* Prävarietät *ist ein geringter Raum, der eine endliche offene Überdeckung aus affinen Varietäten besitzt.*

Weil affine Varietäten wieder noethersch sind, sind auch Prävarietäten noethersche Räume. Wie bei affinen Varietäten sind die Morphismen nach $K$ gerade die überall definierten regulären Abbildungen. Wir nennen daher Morphismen zwischen zwei Prävarietäten ebenfalls *regulär*.

Beispiel: Sei $\pi : K^{n+1} \setminus 0 \to P^n$ die kanonische Abbildung von $K^{n+1} \setminus 0$ auf den zugeordneten projektiven Raum. Man versieht $P^n$ mit der Quotiententopologie und mit der Bildgarbe der Funktionen, die um $\pi$ verlängert regulär in $K^{n+1} \setminus 0$ sind. Dann ist, wie man leicht sieht, $P^n$ eine Prävarietät. Abgeschlossene Teilmengen von $P^n$ heißen *projektive* Varietäten. Der nächste Satz zeigt, daß projektive Varietäten Prävarietäten sind.

Eine Menge $A$, die relativ-offen in einer abgeschlossenen Menge $B$ von $X$ ist, ist *lokal-abgeschlossen* in $X$. (Es genügt sogar zu fordern, daß $A$ lokal-abgeschlossen in $B$ und $B$ lokal-abgeschlossen in $X$ ist.)

**Satz 2** *Eine lokal-abgeschlossene Teilmenge einer Prävarietät ist wieder eine Prävarietät.*

Beweis:
Sei $X$ eine Prävarietät. Es genügt zu zeigen, daß jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge $Y$ von $X$ wieder eine Prävarietät ist.

Wenn $Y$ abgeschlossen ist, folgt das einfach daraus, daß abgeschlossene Teilmengen von affinen Varietäten wieder affine Varietäten sind. Das gilt im allgemeinen nicht für offene Teilmengen. Eine affine Varietät V besitzt aber immer eine Basis (der Topologie) aus offenen affinen Teilmengen: die Mengen

$$\mathrm{D}_V(f) = \{a \in V \mid f(a) \neq 0\},$$

wobei $f$ eine beliebige Funktion aus dem „Koordinatenring“ $\Gamma(V)$ ist (man schreibt auch $K[V]$ für $\Gamma(V)$). Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen:

**Lemma 3** *Die $\mathrm{D}_V(f)$ sind affine Varietäten. Wenn $V$ abgeschlossen in $K^n$ ist, liefert*

$$a \to (a, \frac{1}{f(a)})$$

*einen Isomorphismus von $\mathrm{D}_V(f)$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge von $K^{n+1}$.*

Wenn nun $Y$ eine offene Teilmenge einer Prävarietät $X$ ist, sieht $Y$ lokal wie eine affine Varietät aus, hat also eine Überdeckung aus affinen Teilmengen. Weil $X$ noethersch ist, genügt eine endliche Teilüberdeckung. □

Wenn $V$ und $W$ abgeschlossen sind in $K^m$ bzw. $K^n$, dann ist die affine Varietät $V \times W \subset K^{m+n}$ das Produkt von $V$ und $W$ in der Kategorie der affinen Varietäten. Sind $O$ und $U$ affin und offen in $V$ bzw. $W$, so ist $O \times U$ offen in $V \times W$ und wieder das Produkt von $O$ und $U$ im kategoriellen Sinn. Das Produkt zweier Prävarietäten $X$ und $Y$ konstruiert man leicht so: Man wählt offene affine Überdeckungen $(O_i)$ und $(U_j)$, und macht dann die Menge $X \times Y$ so zu einem geringten Raum, daß die offenen Teilmengen $O_i \times U_j$ mit der induzierten Struktur die Produkte der affinen Varietäten $O_i$ und $U_j$ sind.

**Definition** *Eine* algebraische Gruppe *ist eine Prävarietät $G$ mit einer durch reguläre Abbildungen*

$$G \times G \xrightarrow{\circ} G \text{ und } G \xrightarrow{-1} G$$

*gegebenen Gruppenstruktur. Die Morphismen algebraischer Gruppen sind reguläre Homomorphismen.*

Eine algebraische Gruppe ist automatisch eine *Varietät*: die Diagonale $\Delta_G$ ist (als Urbild der Eins unter der regulären Abbildung $x, y \to x \circ y^{-1}$) abgeschlossen in $G \times G$.

$\mathrm{GL}(n, K)$ ist als durch die Ungleichung $\det A \neq 0$ definierte offene Teilmenge von $\mathrm{M}(n, K) \simeq K^{n \cdot n}$ eine affine algebraische Gruppe. Die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, K)$ heißen *lineare* algebraische Gruppen. Lineare algebraische Gruppen sind natürlich affin.

**Satz 4 ([H])** *Affine algebraische Gruppen sind linear.*

Beweisidee:
$G$ operiert in natürlicher Weise auf dem (unendlichdimensionalen) $K$-Vektorraum $K[G]$. Es gibt beliebig große endlichdimensionale $G$–invariante Teilräume $H$. Wenn man $H$ genügend groß wählt, operiert $G$ treu auf $H$. $G$ ist dann isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}(H)$. □

**Satz 5 ([H])**
*Sei $N$ ein abgeschlossener Normalteiler der algebraischen Gruppe $G$.*

1. *Dann ist $G/N$ mit der induzierten Struktur wieder eine algebraische Gruppe.*

2. *Wenn $G$ affin ist, ist auch $G/N$ affin.*

□

Ein Beispiel ist die projektive lineare Gruppe $\mathrm{PGL}(n, K)$: der Quotient von $\mathrm{GL}(n, K)$ nach ihrem Zentrum $\mathrm{D}(n, K)$ - den skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix. Eine Darstellung der $\mathrm{PGL}(n, K)$ als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n)$ erhält man, indem man $\mathrm{GL}(n, K)$ auf $\mathrm{M}_n$ durch Konjugation operieren läßt.

**Definition** *Sei $X$ eine Prävarietät. Eine* Interpretation *von $X$ in $K$ ist eine injektive Abbildung $i : X \to K^n$ derart, daß*

*(1) das Bild jeder offenen Menge $O$ definierbar und*

*(2) für jede reguläre Funktion $f : O \to K$ die Komposition $f \circ i^{-1}$ eine definierbare Funktion von $i(O)$ nach $K$ ist.*

Ist $i$ eine Interpretation von $X$ und $g$ eine definierbare injektive Funktion von $i(X)$ nach $K^m$, so ist $g \circ i$ wieder eine Interpretation von $X$. Das folgende Lemma zeigt, daß alle Interpretationen von $X$ auf diese Weise auseinander hervorgehen.

**Lemma 6** *Sei $i$ eine Interpretation von $X$, $j$ eine Interpretation von $Y$ und $f$ eine reguläre Abbildung von $X$ nach $Y$. Dann ist $j \circ f \circ i^{-1}$ eine definierbare Abbildung von $i(X)$ nach $j(Y)$.*

Beweis:
Man findet endliche Überdeckungen $O_i$ von $X$ und $U_i$ von $Y$ $(i = 1 \dots n)$ mit affinen offenen Mengen, sodaß $f(O_i) \subset U_i$. Daß $O_i$ affin ist, bedeutet, daß es einen Isomorphismus $\pi$ von $O_i$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge $V$ von $K^n$ gibt; $\rho$ sei ein Isomorphismus von $U_i$ mit $W \subset K^m$. Weil $\pi$ und $\rho$ $n$–tupel von regulären Funktionen sind, sind nach (2) $\pi \circ i^{-1}$ und $\rho \circ j^{-1}$ definierbare Funktionen auf $i(O_i)$ und $j(U_i)$. Andererseits ist $\rho \circ f \circ \pi^{-1}$ eine reguläre Abbildung von $V$ nach $W$, nach Lemma 1 also definierbar. Daraus ergibt sich, daß

$$j \circ f \circ i^{-1} = (\rho \circ j^{-1})^{-1} \circ (\rho \circ f \circ \pi^{-1}) \circ (\pi \circ i^{-1}),$$

auf die nach (1) definierbare Menge $i(O_i)$ eingeschränkt, definierbar ist. Weil die $i(O_i)$ $(i = 1 \dots n)$ die Menge $i(X)$ überdecken, ist $j \circ f \circ i^{-1}$ definierbar. $\square$

**Satz 7** *Jede Prävarietät $X$ ist interpretierbar. Ist $X$ eine algebraische Gruppe, so werden die Gruppenoperationen durch definierbare Abbildungen interpretiert.*

Beweis:
Offensichtlich ist jede affine Varietät interpretierbar durch ihren Isomorphismus mit einer abgeschlossenen Teilmenge des $K^n$. Sei nun $(O_i)(i = 0 \dots n)$ eine offene affine Überdeckung von $X$ und die $\pi_i$ Interpretationen der $O_i$ in $K^n i$. Wenn $n$ größer ist als alle $n_i$, gibt es definierbare Einbettungen der $K^{n_i}$ in $K^n$. Wir können also annehmen, daß alle $O_i$ in $K^n$ interpretiert und die Bilder $B_i$ paarweise disjunkt sind. Weil $O_i \cap O_j$ offen in $O_i$ ist, liefert $\pi_i$ eine Interpretation von $O_i \cap O_j$ mit Bild $B_{ij}$. Lemma 6 zeigt, daß $\pi_j \circ \pi_i^{-1}$ eine definierbare Bijektion $f_{ij}$ zwischen $B_{ij}$ und $B_{ji}$ ergibt. Die Abbildung

$$\pi(x) = \pi_i(x), \text{ wenn } i = \min\{j \mid x \in O_j\}$$

ist dann eine Interpretation von $X$. Dazu genügt es zu sehen, daß die Einschränkungen von $\pi$ auf die $O_i$ Interpretationen sind. $\pi \restriction O_i$ unterscheidet sich aber von $\pi_i$ durch die auf $B_i$ definierte Abbildung

$$f(b) = f_{ij}(b), \text{ wenn } j = \min\{k \mid b \in B_{ik}\}.$$

Diese Abbildung ist aber definierbar.

Zwischenbemerkung:
Sei $\pi$ eine Interpretation von $X$ und $\rho$ eine Interpretation von $Y$, dann ist $\pi \times \rho$ eine Interpretation von $X \times Y$.

Beweis:
Das gilt offensichtlich wenn $X$ und $Y$ affine Varietäten sind: Wir können nämlich nach Lemma 6 annehmen, daß die Interpretationen $\pi$ und $\rho$ die Standardinterpretationen sind. Dann gilt es aber auch für beliebige Prävarietäten $X$ und $Y$, weil man $X \times Y$ mit Produkten von affinen Varietäten überdecken kann.

Wenn nun $G$ eine durch $\pi$ interpretierte Gruppe ist, so liefert nach Lemma 6

$$(b, c) \mapsto \pi((\pi^{-1}(b)) \circ (\pi^{-1}(c)))$$

eine definierbare Abbildung $\pi(G) \times \pi(G) \to \pi(G)$. $\square$

# 3 Total-Transzendente Theorien

Wir fixieren eine vollständige Theorie $T$ ohne endliche Modelle und ein sehr großes saturiertes Modell $\mathbb{C}$. (Wir stellen uns $\mathbb{C}$ als Klasse vor. $A, B \dots$ bezeichnen Teilmengen von $\mathbb{C}$; $\mathbb{D}, \mathbb{E}, \dots$ definierbare Teilklassen; $M, N \dots$ elementare Unterstrukturen - also Modelle von $T$.)

Wir ordnen jetzt jeder definierbaren Teilklasse $\mathbb{D}$ von $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner von $\mathbb{C}^n$) eine Ordinalzahl ( oder $-1$ und $\infty$) zu - den *Morley-Rang* $\mathrm{R}(\mathbb{D})$ von $\mathbb{D}$.

Zuerst definieren wir die Relation $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ durch Rekursion über die Ordinalzahl $\alpha$ :

**Definition**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq 0$ | *gwd.* | $\mathbb{D} \neq \emptyset$ |
| $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \lambda$ | *gwd.* | $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ *für alle* $\alpha < \lambda$, *(*$\lambda$ *Limeszahl)* |
| $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha + 1$ | *gwd.* | *es eine unendliche Familie* $(\mathbb{D}_i)$ *von disjunkten definierbaren Teilklassen von* $\mathbb{D}$ *gibt mit* $\mathrm{R}(\mathbb{D}_i) \geq \alpha$ *für alle* $i$. |

Man zeigt leicht durch Induktion über $\alpha$, daß

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha \geq \beta \to \mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \beta.$$

Wenn man dann definiert

**Definition**

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}) = \sup\{\alpha \mid \mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha\},$$

*wobei*

$\mathrm{R}(\mathbb{D}) = -1$ , *wenn* $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ *für kein* $\alpha$, *und*
$\mathrm{R}(\mathbb{D}) = \infty$ , *wenn* $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ *für alle* $\alpha$.

dann ist $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ im alten Sinn gdw. $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha$ im neuen Sinn.

Spezialfälle:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{R}(\mathbb{D}) = -1 & \text{gdw. } \mathbb{D} \text{ leer ist.} \\ \mathrm{R}(\mathbb{D}) = 0 & \text{gdw. } \mathbb{D} \text{ nicht-leer und endlich ist.} \\ \mathrm{R}(\mathbb{D}) = \infty & \text{wir sagen dann: } \mathbb{D} \textit{ hat keinen Morleyrang.} \end{array}$$

**Lemma 1**

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) = \max(\mathrm{R}(\mathbb{D}_1), \mathrm{R}(\mathbb{D}_2))$$

Beweis:
Daß $\mathrm{R}(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) \geq \mathrm{R}(\mathbb{D}_i)$ ist klar nach Definition. Für die Umkehrung zeigt man leicht durch Induktion über $\alpha$, daß

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) \geq \alpha \to \mathrm{R}(\mathbb{D}_1) \geq \alpha \text{ oder } \mathrm{R}(\mathbb{D}_2) \geq \alpha.$$

□

Die Klassen von kleinerem Rang als $\alpha$ bilden also ein Ideal in der Booleschen Algebra aller definierbaren Klassen. In der Quotientenalgebra identifiziert man zwei Klassen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$, wenn ihre symmetrische Differenz einen kleineren Rang als $\alpha$ hat. Dann haben $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ den gleichen Rang, wenn $\mathbb{F}$ mindestens den Rang $\alpha$ hat.

**Notation**

$$\begin{array}{ll} \mathbb{F} \subset_\alpha \mathbb{G}, & \text{wenn } \mathrm{R}(\mathbb{F} \setminus \mathbb{G}) < \alpha, \\ \mathbb{F} =_\alpha \mathbb{G}, & \text{wenn } \mathrm{R}(\mathbb{F} \Delta \mathbb{G}) < \alpha. \end{array}$$

Ein $\mathbb{F}$ vom Rang $\alpha$ kann nicht eine unendliche Folge $(\mathbb{G}_i)$ von (mod $\alpha$)-disjunkten Teilklassen vom Rang $\alpha$ enthalten. Denn man kann die $\mathbb{G}_i$ durch (mod $\alpha$)-äquivalente aber wirklich disjunkte $\mathbb{G}'_i$ ersetzen; was aber $\mathrm{R}(\mathbb{F}) > \alpha$ zur Folge hätte. $\mathbb{F}$ ist also modulo $\alpha$ Vereinigung von endlich vielen Atomen. Die Zahl der Atome ist der *Morleygrad* von $\mathbb{F}$:

**Definition** *Sei $\mathbb{D}$ nicht leer und habe Morleyrang. Der Morleygrad $\mathrm{d}(\mathbb{D})$ von $\mathbb{D}$ ist die größte Zahl disjunkter definierbarer Teilmengen $\mathbb{D}_i$ von $\mathbb{D}$ vom gleichen Rang wie $\mathbb{D}$.*

Eine Klasse $\mathbb{D}$ vom Rang 1 und Grad 1 heißt *streng–minimal*. $\mathbb{D}$ ist offenbar genau dann streng minimal, wenn $\mathbb{D}$ unendlich ist und jede definierbare Teilklasse von $\mathbb{D}$ endlich oder coendlich in $\mathbb{D}$ ist.

**Lemma 2** *$\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ seien disjunkt und $\mathrm{R}(\mathbb{F}) \leq \mathrm{R}(\mathbb{G})$. Dann ist*

*(1)* $\mathrm{d}(\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = \mathrm{d}(\mathbb{F}) + \mathrm{d}(\mathbb{G})$, *wenn* $\mathrm{R}(\mathbb{F}) = \mathrm{R}(\mathbb{G})$, *und*

*(2)* $\mathrm{d}(\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = \mathrm{d}(\mathbb{G})$, *sonst.*

□

**Definition** *Eine Theorie $T$ heißt* totaltranszendent, *wenn alle definierbaren Klassen Morleyrang haben. Der Morleyrang von $T$ ist der Morleyrang von $\mathbb{C}$.*

Sei $A$ eine Menge von Parametern und $p \in \mathrm{S}(A)$. Sei $\phi(x)$ eine Formel aus $p$ von kleinstem Morleyrang $\alpha$ und - unter den Formeln mit Rang $\alpha$ - mit kleinstem Morleygrad $n$. Wir definieren

**Definition** $\mathrm{R}(p) = \alpha, \quad \mathrm{d}(p) = n.$

$\phi$ ist bis auf Äquivalenz modulo $\alpha$ eindeutig durch $p$ bestimmt. Umgekehrt ist $p$ der einzige Typ von einem Rang $\geq \alpha$, der $\phi$ enthält (Wir sagen $\phi$ *bestimmt* $p$). $p$ läßt sich durch

$$p = \{\psi \text{ aus } L(A) \mid \phi \subset_\alpha \psi\}$$

aus $\phi$ zurückgewinnen. Die $L(A)$–Formeln $\phi$, die auf diese Weise den Typen über $A$ mit Morleyrang entsprechen, sind genau die Formeln mit Morleyrang, die sich nicht in zwei Formeln vom gleichen Rang zerlegen lassen, die über $A$ definiert sind. Formeln vom Grad 1 sind zum Beispiel solche Formeln. Diese Überlegungen zeigen, daß für $L(A)$–Formeln $\phi$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\phi) &= \max\{\mathrm{R}(p) \mid p \in \mathrm{S}(A),\ \phi \in p\} \\ \mathrm{d}(\phi) &= \sum\big(\mathrm{d}(p) \bigm| p \in \mathrm{S}(A),\ \phi \in p,\ \mathrm{R}(p) = \mathrm{R}(\phi)\big). \end{aligned}$$

**Definition** *Sei $A$ Teilmenge von $B$ und $p$ ein Typ über $A$ mit Morleyrang. Eine Fortsetzung $q$ von $p$ auf $B$ hat höchstens den gleichen Rang wie $p$. $q$ heißt* nicht-forkende *Erweiterung (oder wir sagen: $q$* forkt nicht über *$A$), wenn* $\mathrm{R}(p) = \mathrm{R}(q)$.

**Lemma 3** *Jeder Typ $p$ über $A$ mit Morleyrang hat eine nicht-forkende Erweiterung auf $B$. Es gibt höchstens $\mathrm{d}(p)$ viele solche Erweiterungen. Genauer gilt*

$$\mathrm{d}(p) = \sum\big(\mathrm{d}(q) \bigm| q \in S(B),\ q \text{ ist nf-Erweiterung von } p\big).$$

Beweis:
Wenn $p$ von $\phi$ bestimmt wird, sind die nf-Erweiterungen von $p$ auf $B$ genau die $q$ vom gleichen Rang wie $\phi$, die $\phi$ enthalten. $\square$

Die Schranke $\mathrm{d}(p)$ wird auch tatsächlich angenommen: Man wählt $B$ so groß, daß $\phi$ in $B$–definierbare Formeln vom Grad 1 zerfällt. Dann gibt es zu jeder dieser Formeln eine nicht-forkende Erweiterung von $p$. Ein Typ mit Rang heißt *stationär*, wenn er jeweils nur eine nf-Erweiterung hat, d.h. wenn $\mathrm{d}(p) = 1$.

**Lemma 4** *$M$ sei ein $\omega$-saturiertes Modell. Dann gilt:*

1) *Man kann den Morleyrang und Grad von $L(M)$–Formeln in $M$ ausrechnen. Typen über $\omega$–saturierten Modellen sind also stationär.*

2) *Sei $\mathbb{D}$ eine nicht–leere $M$–definierbare Klasse mit Rang und $\mathbb{E}$ eine Teilklasse von $\mathbb{D}$ vom selben Rang. Dann enthält $\mathbb{E}$ ein Element von $M$.*

(In den Folgerungen 14 und 16 werden wir sehen, daß die Voraussetzung der Saturiertheit von $M$ überflüssig ist.)

Beweis:
1) Sei $\mathbb{D}$ eine $M$–definierbare Klasse vom Rang $= \alpha + 1$. Dann enthält $\mathbb{D}$ eine

Klasse $\phi(\mathbb{C}, a)$ von Rang $\alpha$. Man findet nun ein $m$ in $M$ vom gleichen Typ wie $a$. Dann definiert $\mathbb{D}(x) \wedge \neg\phi(x, m)$ über $M$ eine Teilklasse von $\mathbb{D}$, die den Rang $\alpha + 1$ hat. Wenn man so fortfährt, erhält man eine unendliche Familie von $M$–definierbaren disjunkten Teilklassen von $\mathbb{D}$ von Rang $\alpha$. Das gleiche Argument zeigt auch, daß sich $\mathbb{D}$ in $\mathrm{d}(\mathbb{D})$-viele $M$–definierbare Klassen vom Rang $\alpha + 1$ und vom Grad 1 zerlegen läßt.

2) Induktion über $\alpha = \mathrm{R}(\mathbb{D})$ und $n = \mathrm{d}(\mathbb{D})$.
$\alpha = 0:$
$\mathbb{D}$ ist in $M$ enthalten, $\mathbb{E}$ ist nicht leer.
$n > 1:$
Zerlege $\mathbb{D}$ in $M$–definierbare Teilklassen $\mathbb{D}_i$ von Rang $\alpha$ und Grad 1. Dann muß für ein $i \quad \mathrm{R}(\mathbb{D}_i \cap \mathbb{E}) = \alpha$ sein und wir können die Induktionsvoraussetzung auf $\mathbb{D}_i$ und $\mathbb{D}_i \cap \mathbb{E}$ anwenden und sind fertig.
$\alpha = \beta + 1,\ n = 1:$
$(\mathbb{D}_i)$ sei eine unendliche Familie von $M$–definierbaren Teilklassen von $\mathbb{D}$ mit dem Rang $\beta$. Weil $\mathrm{R}(\mathbb{D} \setminus \mathbb{E}) < \alpha$ ist, muß es ein $i$ mit $\mathrm{R}(\mathbb{D}_i \cap \mathbb{E}) = \beta$ geben. Wir sind dann fertig nach Induktion.
$\alpha$ Limeszahl, $n = 1:$
Wähle ein $\mathbb{D}'$ in $\mathbb{D}$ mit $\mathrm{R}(\mathbb{D} \setminus \mathbb{E}) < \mathrm{R}(\mathbb{D}') < \alpha$. Dann können wir die Induktionsvoraussetzung auf $\mathbb{D}'$ und $\mathbb{D}' \cap \mathbb{E}$ anwenden. $\square$

**Satz 5** *Sei $\mathbb{D}$ eine definierbare Klasse vom Rang $\alpha$ und $\phi(x, \overline{y})$ eine Formel. Dann ist $\{\overline{b} \mid \mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, \overline{b})\}$ definierbar.*

Zum Beweis brauchen wir das folgende Lemma

**Lemma 6** *Totaltranszendente Theorien sind* stabil*, d.h. es gibt keine Formel $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ mit der* Ordnungseigenschaft*:*
*d.h. für die es $\overline{a}_i, \overline{b}_j$ $(i, j \in \omega)$ gibt mit*

$$\models \phi(\overline{a}_i, \overline{b}_j) \quad \textit{gdw.} \quad i < j.$$

Beweis:
Ein Kompaktheitsargument zeigt sofort, daß wir die Indexmenge $\omega$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzen können. Sei $\mathbb{D}$ eine definierbare Klasse vom kleinsten (Rang, Grad), für die $I = \{i \in \mathbb{Q} \mid a_i \in \mathbb{D}\}$ ein offenes Intervall ist. Wähle $j$ aus $I$. Dann definieren $\mathbb{D}(x) \wedge \phi(x, b_j)$ und $\mathbb{D}(x) \wedge \neg\phi(x, b_j) \wedge (x \neq a_j)$ ebenfalls offene Intervalle und eine der beiden Formeln hat kleineren (Rang, Grad) als $\mathbb{D}$. Widerspruch. $\square$

Beweis von Satz 5:

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, daß $\overline{y} = y$.

Sei $\mathbb{D}$ zerlegt in $\mathbb{D}_1 \ldots \mathbb{D}_n$, vom Rang $\alpha$ und Grad 1. Dann ist $\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b)$ gdw. $\mathbb{D}_i \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b)$ für alle $i$. Wir können also annehmen, daß $\mathbb{D}$ Grad 1 hat. $M$ sei ein $\omega$-saturiertes Modell, das die Parameter von $\mathbb{D}$ enthält.

Behauptung 1:
$\mathbb{D}(M)$ enthält eine endliche Menge $\Delta$, mit $\Delta \subset \phi(\mathbb{C}, c) \rightarrow \mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, c)$ für alle $c$.

Beweis: Unter der Annahme, daß $\Delta$ nicht existiert, konstruieren wir $a_i, b_j$ wie in Lemma 6 und mit der Zusatzeigenschaft

$$a_i \in \mathbb{D}(M),\ \mathbb{D} \not\subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b_j)$$

Dann hat $\mathbb{D}(x) \wedge \phi(x, y)$ die Ordnungseigenschaft. Aus dem Beweis von Lemma 6 sieht man, daß dann $\mathbb{D}$ keinen Rang haben kann und wir sind fertig.

Seien $a_0 \dots a_{i-1}, b_0 \dots b_{i-1}$ schon konstruiert. Die Annahme, daß es kein $\Delta$ gebe, liefert ein $b_i$ mit $\{a_0 \dots a_{i-1}\} \subset \phi(\mathbb{C}, b_i)$ und $\mathbb{D} \not\subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b_i)$. Sei $\mathbb{V}$ die Vereinigung der $\phi(\mathbb{C}, b_j) \quad (j = 0 \dots i)$. Weil $\mathbb{D}$ Grad 1 hat, ist $\mathbb{D} \not\subset_\alpha \mathbb{V}$. Wir finden also nach Lemma 4 ii) ein $a_i$ in $(\mathbb{D} \setminus \mathbb{V})(M)$.

Behauptung 2
Zu jedem $b$ mit $\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b)$ gibt es ein endliches $\Delta_b \subset \phi(M, b)$ mit der Eigenschaft von Behauptung 1. (Man kann $\Delta_b \subset \mathbb{D}$ wählen.)

Beweis:
Wende die Behauptung 1 auf $\mathbb{D} \cap \phi(\mathbb{C}, b)$ an.

Sei $\mathbb{E}$ die Klasse der $c$ mit $\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, c)$. Sei $\chi_c(b)$ die Aussage „$\Delta_c \subset \phi(\mathbb{C}, b)$“. (Beachte, daß $\{\chi_c(y) \mid c \in \mathbb{E}\}$ eine Menge und keine Klasse ist. Darum haben wir das Modell $M$ eingeführt.) Dann ist „$\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b)$“ äquivalent zu $\bigvee \chi_c(b)$, also $\bigvee$–definierbar. „$\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, b)$“ ist aber auch äquivalent zu „$\mathbb{D} \not\subset_\alpha \neg\phi(\mathbb{C}, b)$“ also $\bigwedge$–definierbar. Daraus folgt die Behauptung mit einem Kompaktheitsargument.
□

Bemerkung:
Natürlich braucht man in der definierenden Formel nur die Parameter von $\phi(x, \overline{y})$ und $\mathbb{D}$.[1] Die im Beweis konstruierte Formel verwendet neben den Parametern von $\phi$ noch Parameter aus $\mathbb{D}(M)$. Der Beweis zeigt, daß man die Parameter der definierenden Formel in jeder Menge $A$ finden kann, die die Parameter von $\phi$ enthält und in der jede Teilklasse von $\mathbb{D}$ vom Rang $\alpha$ realisiert wird.

**Folgerung 7** *Sei $p \in S(A)$ stationär und $\mathbf{p}$ die globale nicht-forkende Erweiterung von $p$ auf $S(\mathbb{C})$. Dann ist $\mathbf{p}$* definierbar *über $A$. D.h. zu jeder $L(A)$–Formel $\phi(x, \overline{y})$ gibt es eine $L(A)$–Formel $\mathrm{d}_{\mathbf{p}}x\phi(x, \overline{y})$ mit freien Variablen $\overline{y}$, sodaß für alle $\overline{b}$*

$$\phi(x, b) \in \mathbf{p} \quad \text{gdw.} \quad \models \mathrm{d}_{\mathbf{p}}x\phi(x, \overline{b}).$$

*Insbesondere ist $p$ definierbar über $A$.*

Beweis:
Sei $p$ ein Typ über $A$, $\alpha$ der Rang von $p$ und $\mathbb{D}(x)$ eine Formel, die $p$ bestimmt. Dann ist $\mathbb{D} \subset_\alpha \phi(\mathbb{C}, \overline{b})$ gdw. $\phi(x, b)$ zu allen nicht forkenden Erweiterungen von $p$ auf $\mathbb{C}$ gehört. Wir haben also sogar eine Definierbarkeitsaussage für nichtstationäre Typen. □

**Folgerung 8** *Sei $\phi(x)$ eine Formel ohne Parameter. Dann ist jede definierbare Teilklasse von $\phi(\mathbb{C})$ definierbar mit Parametern aus $\phi(\mathbb{C})$.*

[1] Eine definierbare Klasse $\mathbb{E}$ ist definierbar über $A$ , wenn alle Automorphismen von $\mathbb{C}$, die $A$ fixieren, $\mathbb{E}$ invariant lassen.

Beweis:
Sei $\psi(\mathbb{C}, c)$ eine Teilklasse von $\phi(\mathbb{C})$. Nach Folgerung 7 (und der Bemerkung im Beweis) ist $p(y) = \mathrm{tp}(c/\phi(\mathbb{C}))$ mit Parametern aus $\phi(\mathbb{C})$ definierbar. Also ist $\psi(\mathbb{C}, c) = \{a \in \phi(\mathbb{C}) \mid \psi(a, y) \in p\}$ mit Parametern aus $\phi(\mathbb{C})$ definierbar. □

Notation
$\overline{a}$ und $\overline{b}$ seien zwei endliche Tupel und $A$ eine Parametermenge. Wir schreiben $\mathrm{R}(\overline{a}/A)$ für $\mathrm{R}(\mathrm{tp}(a/A))$. $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind *unabhängig* über $A$, wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})$ nicht über $A$ forkt, d.h. wenn $\mathrm{R}(\overline{a}/A\overline{b}) = \mathrm{R}(\overline{a}/A)$. Symbolisch:

$$\overline{a} \underset{A}{\perp} \overline{b}$$

**Satz 9 (Forkingsymmetrie)** *$T$ sei totaltranszendent. Dann ist $\overline{a} \perp \overline{b}$ gdw. $\overline{b} \perp \overline{a}$.*

Beweis:
Wir schreiben kurz $a$ für $\overline{a}$ und $b$ für $\overline{b}$. Sei $M$ ein $\omega$-saturiertes Modell, das $A$ enthält. Wegen Lemma 3 können wir annehmen, daß

i) $a \perp M$

ii) $b \perp_a M$

Sei $a \not\perp b$. Wegen i) gilt dann $a \not\perp_M b$.

Behauptung: $b \not\perp_M a$.

Beweis:
Sei $\alpha = \mathrm{R}(a/M)$, $\beta = \mathrm{R}(b/M)$, $\phi(x)$ sei bestimmende Formel von $\mathrm{tp}(a/M)$ und $\psi(y)$ sei bestimmende Formel von $\mathrm{tp}(b/M)$. Wir wissen daß es eine $L(M)$–Formel $\chi(x, y)$ gibt mit $\models \chi(a, b)$ und $\mathrm{R}\chi(x, b) < \alpha$. Dabei können wir annehmen, daß $\chi(x, y)$ die Formeln $\phi(x)$ und $\psi(y)$ impliziert. Wegen Satz 5 ist die Klasse

$$\{c \mid \mathrm{R}\chi(x, c) < \alpha\} = \{c \mid \phi(\mathbb{C}) \not\subset_\alpha \chi(\mathbb{C}, c)\}$$

definierbar über $M$. Wir können also auch noch annehmen, daß $\chi(x, c)$ immer $\mathrm{R}\chi(x, c) < \alpha$ zur Folge hat. Die Formel $\chi(a, y)$ kann dann nicht in $M$ erfüllbar sein. Nach Lemma 4 2) folgt daraus, daß $\mathrm{R}\chi(a, y) < \mathrm{R}\psi(y) = \beta$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Mit „Forkingrechnung“ folgt nun leicht, daß $b \not\perp a$:

Annahme: $b \perp a$

Dann würde aus ii) folgen, daß $b \perp Ma$ („Transitivitätsargument“). Daraus wiederum würde $b \perp a$ folgen („Monotonieargument“). Widerspruch. □

## Imaginäre Elemente

Wir erweitern $\mathbb{C}$ um Sorten für imaginäre Elemente zur mehrsortigen Struktur $\mathbb{C}^{eq}$. Für jede 0–definierbare Äquivalenzrelation $\mathbb{E}$ auf einem $\mathbb{C}^n$ führen wir die neue Sorte $\mathbb{C}^n/\mathbb{E}$ ein. Wir erweitern $L$ zur Sprache $L^{eq}$, indem wir für jedes

$\mathbb{E}$ ein neues (n-stelliges) Funktionszeichen für die Projektion $\pi_{\mathbb{E}} : \mathbb{C}^n \to C^n/\mathbb{E}$ einführen. $T^{eq}$ ist die vollständige Theorie von $\mathbb{C}^{eq}$. Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen:

**Lemma 10** *Zu jeder $L^{eq}$–Formel $\phi(x_1, \dots x_n)$ mit Variablen $x_i$ der Sorte $\mathbb{C}^{n_i}/\mathbb{E}_i$ gibt es eine L–Formel $\psi(\overline{y}_1, \dots \overline{y}_n)$, die in $T^{eq}$ zu $\phi(\pi_{\mathbb{E}_1}(\overline{y}_1), \dots \pi_{\mathbb{E}_n}(\overline{y}_n))$ äquivalent ist.* □

Es folgt, daß in $\mathbb{C}^{eq}$ keine neuen Relationen auf $\mathbb{C}$ definierbar sind. Die Morleyränge von $L$–Formeln bleiben also die gleichen, ob sie in $\mathbb{C}$ oder in $\mathbb{C}^{eq}$ ausgerechnet werden. Daß mit $T$ auch $T^{eq}$ totaltranszendent ist, folgt aus dem nächsten Lemma:

**Lemma 11** *$\mathbb{D}$ sei eine definierbare Klasse und $\mathbb{E}$ das Bild von $\mathbb{D}$ unter einer definierbaren Abbildung $f$. Wenn alle Fasern $f^{-1}(e)$ mindestens den Rang $\alpha$ haben, dann ist $\mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha + \mathrm{R}(\mathbb{E})$.*

*Wenn $f$ eine Bijektion ist, hat man also $\mathrm{R}(\mathbb{D}) = \mathrm{R}(\mathbb{E})$ und man sieht leicht, daß dann auch $\mathrm{d}(\mathbb{D}) = \mathrm{d}(\mathbb{E})$.*

Beweis:
Man zeigt ganz leicht durch Induktion über $\beta$, daß immer

$$\mathrm{R}(\mathbb{E}) \geq \beta \to \mathrm{R}(\mathbb{D}) \geq \alpha + \beta.$$

□

Sei $\mathbb{D}$ eine definierbare Klasse. Ein Tupel $\overline{c}$ heißt *kanonischer Parameter* von $\mathbb{D}$, wenn $\mathbb{D}$ genau von den Automorphismen von $\mathbb{C}$ in sich überführt wird, die $\overline{c}$ festlassen. $c$ ist durch diese Eigenschaft bis auf Interdefinierbarkeit eindeutig bestimmt. Außerdem ist klar, daß sich $\mathbb{D}$ mit den Parametern $\overline{c}$ definieren läßt. In $\mathbb{C}^{eq}$ hat jede definierbare Klasse einen kanonischen Parameter: Wenn $\mathbb{D}$ definiert ist durch $\phi(x, a)$, definiere die Äquivalenzrelation.

$$a_1 \mathbb{E} a_2 \quad \text{gdw.} \quad \phi(\mathbb{C}, a_1) = \phi(\mathbb{C}, a_2).$$

Für $c$ nehmen wir dann einfach das Element $a/\mathbb{E}$.

Wir haben $\mathbb{C}^{eq}$ vor allem darum eingeführt, weil der algebraische Abschluß in $\mathbb{C}^{eq}$ interessante neue Elemente enthält:

**Lemma 12 ($\mathbb{C}^{eq}$)** *Sei $A$ eine Parametermenge und $\mathbb{D}$ eine definierbare Teilklasse von $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

*a)* *$\mathbb{D}$ ist definierbar über* $\mathrm{acl}(A)$.

*b)* *$\mathbb{D}$ hat nur endlich viele Konjugierte über $A$, d.h. $\mathbb{D}$ hat nur endlich viele Bilder unter Automorphismen von $\mathbb{C}$, die $A$ punktweise festlassen*

*c)* *$\mathbb{D}$ besteht aus vollen Klassen einer* endlichen[2] *$A$–definierbaren Äquivalenzrelation $\mathbb{E}$.*

[2] Äquivalenzrelationen mit nur endlich vielen Klassen heißen endlich.

Beweisskizze:
$a) \to b)$ : Über $A$ algebraische Elemente haben nur endlich viele Konjugierte über $A$.
$b) \to a)$ : Der kanonische Parameter von $\mathbb{D}$ ist algebraisch über $A$.
$b) \to c)$ : $a\mathbb{E}b$ gdw. $a$ und $b$ in denselben $A$–Konjugierten von $\mathbb{D}$ liegen.
$c) \to b)$ : $A$–Automorphismen permutieren die Klassen von $\mathbb{E}$.

**Satz 13** *Sei $T$ totaltranszendent, $\mathbb{D}$ über $A$ definierbar. Dann gibt es eine $A$–definierbare endliche Äquivalenzrelation auf $\mathbb{D}$, deren Klassen kleineren Rang als $\mathbb{D}$ haben oder vom Grad 1 sind. Das letzte Lemma zeigt, daß das gerade bedeutet: $\mathbb{D}$ läßt sich in Teilklassen zerlegen, die denselben Rang, aber Grad 1 haben und über $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ definiert sind.*

Beweis:
Wir müssen zeigen, daß Typen über einer (in $\mathbb{C}^{eq}$) algebraisch abgeschlossenen Menge $A$ stationär sind.

Behauptung 1:
Ein globaler Typ $\mathbf{p}$, der über $A$ nicht forkt, ist über $A$ definierbar.

Beweis:
Nach Folgerung 7 ist $\mathbf{p}$ (über jedem $\omega$-saturierten Modell, das $A$ enthält) definierbar. Die $A$-Konjugierten von $\mathbf{p}$ sind alle nf-Erweiterungen von $\mathbf{p} \restriction A$. $\mathbf{p}$ hat also höchstens $\mathrm{d}(\mathbf{p} \restriction A)$ viele Konjugierte. Die Behauptung folgt jetzt mit Lemma 12.

Behauptung 2:
Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ und $A \subset B$. Dann hat $p$ nur eine nf-Erweiterung auf $B$.

Beweis: $q_i \in \mathrm{S}(B) \quad (i = 1, 2)$ seien zwei nf-Erweiterungen von $p$. Wir können annehmen, daß $B = Ab$, für ein endliches Tupel $b$. Wir wählen eine Realisierung $a_1$ von $q_1$ und dann mit Lemma 3 eine Realisierung $a_2$ von $q_2$ mit $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{Aa_1} b$ (Monotonie), $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{Aa_1} a_2$ (Symmetrie) und $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A} a_2 a_1$ (Transitivität). Nach Behauptung 1 ist $\mathrm{tp}(b/Aa_1a_2)$ aber definierbar über $A$. Weil die $a_i$ denselben Typ über $A$ haben, muß also $\mathrm{tp}(ba_1/A) = \mathrm{tp}(ba_2/A)$ sein. Daraus folgt $q_1 = q_2$. □

**Folgerung 14** *($T$ totaltranszendent)*
*Typen über Modellen sind stationär.*

Beweis:
Ein Modell $M$ ist zwar nicht algebraisch abgeschlossen in $\mathbb{C}^{eq}$, aber $M^{eq}$ ist es. $M^{eq}$ ist aber die definierbare Hülle von $M$ in $\mathbb{C}^{eq}$. Das bedeutet, daß jeder Typ über M genau eine Fortsetzung auf $M^{eq}$ hat. □

**Folgerung 15** *($T$ totaltranszendent)*
*Kein Typ über $\mathrm{acl}(A)$ forkt über $A$.*

Beweis:
Sei $b$ algebraisch über $A$ und $d$ ein beliebiges Element. Natürlich ist $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A} d$. Daraus folgt $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A} b$. □

**Folgerung 16** *(T totaltranszendent)*
*Lemma 4 2) gilt für beliebige Modelle.*

Beweis:
Sei $E$ definiert durch $\phi(a,y)$. Wähle ein $b$ mit $\models \phi(a,b)$ und $\mathrm{R}(b/Ma) = \mathrm{R}\phi(a,y) = \alpha$. Weil $\mathrm{R}(\mathbb{E}) = \alpha$, ist $\mathrm{R}(b/M) = \alpha$ und wir haben $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M b$. Weil der Typ $\mathrm{tp}(a/Mb)$ definierbar ist über $M$ und die Formel $\phi(x,b)$ enthält, muß er auch eine Formel der Form $\phi(x,m)$ für ein $m \in M$ enthalten. Das war zu zeigen. $\square$

Wir fassen unsere Informationen über stationäre Typen noch einmal zusammen:

**Bemerkung** ($T$ totaltranszendent)
Sei $p$ ein Typ über $M$ und $A$ eine Teilmenge von $M$. Dann sind äquivalent:

a) $p$ forkt nicht über $A$ und $p \upharpoonright A$ ist stationär.

b) $p$ ist definierbar über $A$.

c) $p$ enthält eine $L(A)$–Formel $\phi$ mit $\mathrm{R}(\phi) = \mathrm{R}(p)$ und $\mathrm{d}(\phi) = 1$.

Wenn

d) $p$ endlich erfüllbar in $A$ ist,
gelten a,b, c). Wenn $A$ ein Modell ist, ist d) auch notwendig.

Beweis:
*a)* $\longleftrightarrow$ *c)* : folgt aus Lemma 3.
*a)* $\longrightarrow$ *b)* : ist Folgerung 7.
*b)* $\longrightarrow$ *a)* : Wenn $A$ ein Modell ist, ist alles klar, denn die nicht-forkende Fortsetzung $p'$ von $p \upharpoonright A$ auf $M$ ist ebenfalls über $A$ definierbar. Die Definitionen von $p$ und $p'$ stimmen auf dem Modell $A$ überein. Also muß $p = p'$ sein. Im allgemeinen Fall wählen wir eine Realisierung $c$ von $p$ und eine beliebige Erweiterung $N$ von $A$, die über $A$ von $Mc$ unabhängig ist. Dann ist $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M N$. Der Typ von $c$ über $M \cup N$ hat also dieselbe Definition $\mathrm{d}_p$ wie $p$. Weil $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A N$ können wir schließen, daß der Typ über $N$, der durch $\mathrm{d}_p$ definiert wird, nicht über $A$ forkt. Weil $N$ (bis auf Isomorphie über $A$) ein beliebiges Modell war, das $A$ enthält, gilt das auch für $M$: $p$ forkt nicht über $A$. Die Stationarität von $p \upharpoonright A$ folgt genauso: Wir können nämlich annehmen, daß der Typ von $c$ über $N$ eine beliebig vorgegebene nicht-forkende Erweiterung $p'$ von $p \upharpoonright A$ ist: „Drehe“ $N$ über $A$ zunächst so, daß $\mathrm{tp}(c/N) = p'$. Dann drehe $N$ über $Ac$ so daß $N \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A Mc$.

d): Daß d) notwendig ist, wenn $A$ ein Modell ist, folgt aus Folgerung 16. Wenn d) gilt, zeigt die Bemerkung nach dem Beweis von Satz 5, daß $p$ über $A$ definierbar ist. $\square$

**Satz 17 (Dimensionsformel)** *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ eine definierbare Abbildung. Sei $\alpha$ eine obere Schranke für die Ränge der Fasern $f^{-1}(e)$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}) \leq \mathrm{R}(\mathbb{E}) \qquad (\textit{ falls } \alpha = 0)$$
$$\mathrm{R}(\mathbb{D}) \leq \alpha(\mathrm{R}(\mathbb{E}) + 1) \qquad (\textit{ falls } \alpha > 0).$$

Beweis:
Zunächst ist klar, daß man annehmen kann, daß $\mathrm{R}(\mathbb{E}) < \infty$, und daß man nur den Fall $\mathrm{d}(\mathbb{E}) = 1$ zu beweisen braucht: Sonst zerlegt man $\mathbb{E}$ in Teilklassen $\mathbb{E}_i$ vom Grad 1 und betrachtet $\mathbb{D}_i = f^{-1}(\mathbb{E}_i)$.

Wir werden die folgende Sprechweise verwenden: Sei $A$ eine Menge von Parametern. Ein Element $e$ von $\mathbb{E}$ heißt *generisch* über $A$, wenn $\mathrm{R}(e/A) = \mathrm{R}(\mathbb{E})$. Die generischen Elemente haben alle denselben Typ über $A$. Wenn eine Parametermenge nicht spezifiziert ist, ist die Menge aller gerade fixierten Parameter gemeint.

1. Fall $\quad \alpha = 0$.
Wir zeigen durch Induktion über $\beta$:

$$\mathrm{R}(\mathbb{D}) > \beta \rightarrow \mathrm{R}(\mathbb{E}) > \beta.$$

Sei also $\mathrm{R}(\mathbb{D}) > \beta$. Dann gibt es disjunkte Teilklassen $\mathbb{D}_i$ $(i \in \omega)$ mit $\mathrm{R}(\mathbb{D}_i) \geq \beta$. Sei $e \in \mathbb{E}$ generisch. Für ein $i$ muß $f^{-1}(e) \cap \mathbb{D}_i$ leer sein. Weil $e$ generisch ist, hat $\mathbb{E}' = \{e' \mid f^{-1}(e') \cap \mathbb{D}_i \neq \emptyset\}$ einen kleineren Rang als $\mathbb{E}$. Weil $f$ $\mathbb{D}_i$ auf $\mathbb{E}'$ abbildet, ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{R}(\mathbb{E}') \geq \beta$. Also ist $\mathrm{R}(\mathbb{E}) > \beta$.

Hilfssatz:
Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}$ eine definierbare Abbildung. Der Grad von $\mathbb{E}$ sei 1, und für generisches $e$ sei der Rang der Faser $f^{-1}(e)$ durch $\alpha$ beschränkt. Wenn $\mathrm{R}(\mathbb{D}) > \beta + \alpha$, dann gibt es eine Teilklasse $\mathbb{D}'$ von $\mathbb{D}$, deren Rang größer als $\beta$ ist und auf der $f \restriction \mathbb{D}'$ eine endliche generische Faser hat.

Beweis:
Induktion über $\alpha$: Der Fall $\alpha = 0$ ist klar. Nehmen wir also $\alpha > 0$ an. Sei $(\mathbb{D}_i)$ eine unendliche disjunkte Familie von Teilklassen von $\mathbb{D}$ mit Rang $\geq \beta + \alpha$. Für generisches $e$ und mindestens ein $i$ hat $f^{-1}(e) \cap \mathbb{D}_i$ einen kleineren Rang als $\alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $\mathbb{D}_i$ eine Teilklasse $\mathbb{D}'$ von größerem Rang als $\beta$, auf der die generische Faser von $f$ endlich ist.

Nun weiter im Beweis von Satz 17:

2. Fall $\alpha > 0$.
Wir zeigen $\mathrm{R}(\mathbb{D}) > \alpha(\beta + 1) \rightarrow \mathrm{R}(\mathbb{E}) > \beta$ durch Induktion nach $\beta$:

Nach dem Hilfssatz gibt es eine Teilklasse $\mathbb{D}'$ von $\mathbb{D}$ mit $\mathrm{R}(\mathbb{D}') > \alpha\beta$, mit der die generische Faser nur endliche viele Punkte, sagen wir $k$ Stück, gemeinsam hat. Dann hat $\mathbb{E}^* = \{e' \mid \#(f^{-1}(e') \cap \mathbb{D}') > k\}$ einen kleineren Rang als $\mathbb{E}$. Sei $\mathbb{D}^* = f^{-1}(\mathbb{E}^*) \cap \mathbb{D}'$. Eine von beiden Klassen, $\mathbb{D}^*$ oder $\mathbb{D}' \setminus \mathbb{D}^*$, hat größeren Rang als $\alpha\beta$. Wenn $\mathrm{R}(\mathbb{D}^*) > \alpha\beta$, dann liefert die Induktion $\mathrm{R}(\mathbb{E}^*) > \delta$ für alle $\delta < \beta$. Also ist $\mathrm{R}(\mathbb{E}) > \mathrm{R}(\mathbb{E}^*) \geq \beta$. Wenn $\mathrm{R}(\mathbb{D}' \setminus \mathbb{D}^*) > \alpha\beta$, ist nach Fall 1 $\mathrm{R}(\mathbb{E} \setminus \mathbb{E}^*) > \alpha\beta \geq \beta$. □

**Folgerung 18**
1) *Wenn $a$ algebraisch über $Ab$ ist, dann ist* $\mathrm{R}(a/A) \leq \mathrm{R}(b/A)$.

2) *Wenn $a$ und $b$ endlichen Rang über $A$ haben, dann auch das Paar* $(a, b)$.

3) *Eine Theorie ist genau dann totaltranszendent, wenn alle Formeln in einer Variablen Morleyrang haben.*

Beweis:
1): Sei $\mathbb{E}(y)$ bestimmende Formel von $\mathrm{tp}(b/A), \mathbb{D}(x,y)$ eine $L(A)$–Formel mit $\models \mathbb{D}(a,b)$ und $\mathrm{R}\mathbb{D}(x,b) = 0$. Wir können annehmen, daß $\mathrm{R}\mathbb{D}(x,b') = 0$ für alle $b'$ und daß $\mathbb{D}(x,y)$ $\mathbb{E}(y)$ impliziert. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ die Projektion auf die zweite Komponente. Aus dem Satz folgt $\mathrm{R}\mathbb{D} \leq \mathrm{R}\mathbb{E}$.

2: $\mathbb{F}(x)$ und $\mathbb{E}(y)$ seien bestimmende Formeln der Typen von $a$ bzw. $b$ über $A$. Setze $\mathbb{D}(x,y) = \mathbb{F}(x) \wedge \mathbb{E}(y)$, und sei $f$ die Projektion auf die zweite Komponente. Der Satz liefert dann $\mathrm{R}(ab/A) \leq \mathrm{R}(a/A)(\mathrm{R}(b/A)+1)$.

3): Wie 2). □

# 4 $\omega_1$–Kategorische Theorien

$L$ sei in diesem Kapitel eine abzählbare Sprache, $T$ eine vollständige $L$-Theorie mit unendlichen Modellen.

**Definition** *$T$ heißt $\omega_1$–kategorisch, wenn alle Modelle der Mächtigkeit $\omega_1$ isomorph sind.*

Beispiele:

1. Für einen abzählbaren Schiefkörper $K$ die Theorie der unendlichen $K$–Vektorräume. ($L$ enthält neben $0, +, -$ ein einstelliges Funktionszeichen für jedes Element von K.)
2. Für $p$ prim oder Null die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p$.

**Satz 1 (Baldwin-Lachlan)** *$T$ ist genau dann $\omega_1$–kategorisch, wenn $T$ total transzendent ist und kein* Vaughtsches Paar *besitzt. Ein Vaughtsches Paar ist eine echte elementare Erweiterung $M \prec N$ zusammen mit einer $L(M)$-Formel $\phi(x)$, die in $M$ eine unendliche Menge definiert, die sich beim Übergang zu $N$ aber nicht vergrößert: also $\phi(M) = \phi(N)$.* □

Wir halten für den Rest des Kapitels eine $\omega_1$-kategorische Theorie $T$ fest.

**Satz 2** *Sei $\mathbb{D}(x)$ eine über dem Modell $M$ definierte streng minimale Formel. Dann gibt es zu jedem Element $a \in \mathbb{C} \setminus M$ ein $d \in \mathbb{D} \setminus M$, das algebraisch über $Ma$ ist.*

Wir sagen dafür: Jeder nicht-algebraische Typ (nämlich hier der Typ von $a$ über $M$) ist *nicht-orthogonal* zu $\mathbb{D}$.

Beweis:
$N$ sei eine Primerweiterung von $Ma$ ($N$ existiert, weil $T$ t.t. ist.) Dann ist $N$ atomar über $Ma$. Weil $T$ kein Vaughtsches Paar hat, gibt es ein $d \in \mathbb{D}(N) \setminus M$. Wir wählen eine $L(M)$-Formel $\phi(x,y)$, sodaß $\phi(x,a)$ den Typ von $d$ über $Ma$ isoliert. Dann ist $\phi(\mathbb{C},a) \subset \mathbb{D}$. Weil $\phi(\mathbb{C},a)$ nicht in $M$ realisiert wird, muß nach

Folgerung 3.16 der Rang von $\phi(x,a)$ kleiner als der Rang von $\mathbb{D}(x)$ sein. $d$ ist also algebraisch über $Ma$. $\square$

In $\omega_1$-kategorischen Theorien läßt sich die Dimensionsformel von Satz 3.17 beträchtlich verschärfen.

**Satz 3** *Für jede Formel $\phi(x,y)$ und jedes $k \in \omega$ ist die Menge*

$$\{a \in \mathbb{C} \mid \mathrm{R}\phi(a,y) \geq k\}$$

*definierbar.*

**Folgerung 4** *Sei für alle $a \in \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{R}\phi(a,y) \leq k$. Dann ist*

$$\mathrm{R}\phi(x,y) \leq \mathrm{R}\big(\exists y \phi(x,y)\big) + k.$$

Beweis der Folgerung
Notation: $\psi(x) = \exists y \phi(x,y)$

Durch Induktion über $k$ und $\beta = \mathrm{R}\psi(x)$. Wir können $\beta \geq 0$ und $\mathrm{d}\psi(x) = 1$ annehmen.

Sei $\mathrm{R}\phi(x,y) > \beta + k$. Wir finden in $\phi$ eine disjunkte Familie $\phi_i(x,y)$ mit $\mathrm{R}\phi_i(x,y) = \beta + k$. Sei $a$ aus $\psi(\mathbb{C})$ generisch über den Parametern von $\phi$ und den $\phi_i$. Weil $\mathrm{R}\phi(a,y) \leq k$, muß es ein $i$ mit $\mathrm{R}\phi_i(a,y) < k$ geben. Der Satz sagt, daß $\mathrm{R}\phi_i(a',y) < k$ äquivalent zu einer Formel $\psi'(a')$ ist. $\psi'(x)$ kann man natürlich so wählen, daß nur die Parameter von $\phi_i(x,y)$ vorkommen. Wenn wir $\psi_0(x) = \psi(x) \wedge \psi'(x)$ und $\psi_1(x) = \psi(x) \wedge \neg\psi'(x)$ setzen, haben wir – weil $a$ generisch ist – $\mathrm{R}\psi_0(x) = \beta$ und $\mathrm{R}\psi_1(x) = \gamma < \beta$. Induktion ergibt

$$\mathrm{R}(\phi_i(x,y) \wedge \psi_0(x)) \leq \beta + (k-1) \quad (< 0 \text{ wenn } k = 0)$$

und

$$\mathrm{R}(\phi_i(x,y) \wedge \psi_1(x)) \leq \gamma + k.$$

Es ergibt sich $\mathrm{R}\phi_i(x,y) < \beta + k$. Widerspruch $\square$

Der Beweis von Satz 3 geht durch Induktion über $k$. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist klar. Wir nehmen an, daß der Satz für alle $k' \leq k$ schon bewiesen ist. Dann gilt auch die Folgerung 4 für alle $k' \leq k$.

Wir wollen zeigen, daß $\{a \in \mathbb{C} \mid \mathrm{R}\phi(a,y) \geq k+1\}$ definierbar ist. Dazu brauchen wir eine Reihe von Lemmas. Zuerst aber fixieren wir eine streng minimale Formel $\mathbb{D}(y)$.

**Lemma A** $\mathrm{R}(a/Ad) < k \rightarrow \mathrm{R}(a/A) \leq k$ *für alle $d \in \mathbb{D}$.*

Beweis:
$\mathrm{R}(a/Ad) < k$ sei durch die $L(A)$–Formel $\chi(x,y)$ bezeugt: es sei $\models \chi(a,d)$ und $\mathrm{R}\chi(x,d) < k$. Wir können annehmen, daß $\chi(x,y)$ $\mathbb{D}(y)$ impliziert und außerdem – wegen der Gültigkeit von Satz 3 für $k$ – daß $\mathrm{R}\chi(x,d') < k$ für alle $d' \in \mathbb{C}$. Aus Folgerung 4 (für $k-1$ !) folgt $\mathrm{R}\chi(x,y) \leq k$. Also ist auch (wenn man will, nach Lemma 3.11) $\mathrm{R}\exists y \chi(x,y) \leq k$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

**Lemma B** *$\{a \in \mathbb{C} \mid \mathrm{R}\phi(a,y) \leq k\}$ ist $\bigvee$-definierbar. Für $k = 0$ ist das klar. Für $k \geq 1$ folgt das aus der folgenden Äquivalenz:*
*$\mathrm{R}\phi(x) \leq k$ gdw. es eine Formel $\chi(x,y)$ gibt, die $\mathbb{D}(y)$ impliziert und für die gilt*

*a)* $\mathrm{R}\chi(x,d) < k$ *für alle $d \in \mathbb{C}$,*

*b)* $\mathrm{R}\big(\phi(x) \wedge \neg\exists y \chi(x,y)\big) < k$.

Beweis:
$\Leftarrow$:
Aus der Folgerung 4 (für $k-1$!) ergibt sich aus a), daß $\mathrm{R}\chi(x,y) \leq k$. Also ist auch $\mathrm{R}\exists y\chi(x,y) \leq k$. Zusammen mit b) ergibt sich daraus $\mathrm{R}\phi(x) \leq k$.

$\Rightarrow$:
Sei $M$ ein Modell, das die Parameter von $\phi$ und $\mathbb{D}$ enthält. $p_1, \ldots, p_n$ seien die Typen über $M$, die $\phi(x)$ enthalten und den Rang $k$ haben. (Wenn $\phi$ kleineren Rang als $k$ hat, ist $n = 0$, sonst ist $n = \mathrm{d}(\phi)$). Wähle Realisierungen $a_i$ der $p_i$ und mit Satz 2 $d_i \in \mathbb{D} \setminus M$ die algebraisch über $Ma_i$ sind. $\chi_i(x,y)$ seien $L(M)$-Formeln, die bezeugen, daß $a_i \not\downarrow_M d_i$ : es gelte $\models \chi_i(a_i,d_i)$ und $\mathrm{R}\chi_i(x,d_i) < k$. Wir können annehmen, daß $\chi_i$ $\mathbb{D}$ impliziert und weiter, weil Satz 3 für $k$ gilt, daß $\mathrm{R}\chi_i(x,d) < k$ für alle $d \in \mathbb{C}$. Jetzt können wir $\chi = \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_n$ setzen. $\chi$ hat offensichtlich die Eigenschaft a). Die Eigenschaft b) ist äquivalent dazu, daß alle Realisierungen $a$ von $\phi(x)$, deren Typ über $M$ den Rang $k$ hat, auch die Formel $\exists y\ \chi(x,y)$ erfüllen . In der Tat! Wenn $a$ über $M$ denselben Typ wie $a_i$ hat, dann gibt es auch zu $a$ ein $d$ mit $\models \chi_i(a,d)$. □

**Lemma C** *$\{a \in \mathbb{C} \mid \mathrm{R}\phi(a,y) \geq k+1\}$ ist $\bigvee$-definierbar. Es ist nämlich*
*$\mathrm{R}\phi(x) \geq k+1$ gdw. es eine Formel $\chi(x,y)$ gibt, die $\phi(x)$ impliziert und für die gilt*

*a)* $\mathrm{R}\chi(a,y) \leq 0$ *für alle $a \in \mathbb{C}$,*

*b)* $\models \mathrm{d}_{\mathbf{D}} y\ \gamma(y)$.

*Hierbei ist $\gamma(y)$ eine Formel, die $\{d \mid \mathrm{R}\chi(x,d) \geq k\}$ definiert (Induktion); **D** der globale Typ, der von $\mathbb{D}$ bestimmt wird, und $\mathrm{d}_{\mathbf{D}} y\ \gamma(y)$ die Aussage „$\gamma(y)$ gehört zu **D**“ (siehe Folgerung 3.7).*

Beweis:
$\Leftarrow$: Sei $B$ die Menge der in $\mathbb{D}$, $\phi$ und $\chi$ vorkommenden Parameter. Wähle ein $d$ aus $\mathbb{D}$, das nicht algebraisch über $B$ ist. Nach b) ist $\models \gamma(d)$, also $\mathrm{R}\chi(x,d) \geq k$. Man findet also ein $a$ aus $\chi(\mathbb{C},d)$ mit $\mathrm{R}(a/Bd) \geq k$. Nach a) ist $d$ algebraisch über $Ba$. Es folgt $a \not\downarrow_B d$ und $\mathrm{R}(a/B) \geq k+1$. Weil $a$ auch $\phi$ realisiert, ist $\mathrm{R}\phi(x) \geq k+1$.

$\Rightarrow$: Sei $M$ ein Modell, das die Parameter von $\phi$ enthält. Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in \phi(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{R}(a/M) \geq k+1$. Satz 2 liefert uns ein $d \in \mathbb{D} \setminus M$, das algebraisch über $Ma$ ist. Sei $\chi(x,y)$ eine $L(M)$–Formel, die das bezeugt: es gelte $\models \chi(a,d)$ und $\mathrm{R}\chi(a,y) = 0$. Wir können $\mathrm{R}\chi(a',y) \leq 0$ für alle $a' \in \mathbb{C}$ erreichen, indem wir – wenn $n$ die Zahl der Elemente von $\chi(a,\mathbb{C})$ ist – $\chi(x,y)$

durch $\chi(x,y) \wedge \exists^{\leq n} z \chi(x,z)$ ersetzen. Aus Lemma A folgt $\mathrm{R}(a/Md) \geq k$. $d$ erfüllt also $\gamma(y)$. Weil die Parameter von $\gamma$, wie die Parameter von $\chi$, in $M$ liegen, folgt $\gamma(y) \in \mathbf{D}$. Also gilt auch b). □

Damit ist Satz 3 bewiesen.

**Folgerung 5** *Alle Morleyränge sind endlich.*

Beweis:
Sonst gibt es ein Modell $M$ und ein $a$ mit $\mathrm{R}(a/M) = \omega$. Wähle $d \in \mathbb{D} \setminus M$ wie in Satz 2. Weil $a \not\perp_M d$, ist $\mathrm{R}(a/Md)$ kleiner als $\omega$. Nach Lemma A muß dann auch $\mathrm{R}(a/M)$ endlich sein. Widerspruch. □

**Folgerung 6 (Dimensionsgleichung)** *Sei* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ *eine definierbare Surjektion und der Rang aller Fasern sei* $k$. *Dann ist* $\mathrm{R}(\mathbb{H}) = \mathrm{R}(\mathbb{E}) + k$.

Beweis:
Sei $\mathbb{F} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{H}$ der Graph von $f^{-1}$. Folgerung 4 ergibt $\mathrm{R}(\mathbb{F}) \leq \mathrm{R}(\mathbb{E}) + k$. Lemma 3.11 gibt $\mathrm{R}(\mathbb{F}) \geq k + \mathrm{R}(\mathbb{E})$. Also ist $\mathrm{R}(\mathbb{F}) = \mathrm{R}(\mathbb{E}) + k$. Zwischen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{H}$ gibt es aber eine definierbare Bijektion. Dasselbe Lemma zeigt nun, daß folglich $\mathbb{F}$ und $\mathbb{H}$ denselben Rang haben müssen. □

**Folgerung 7 (Lascargleichung)** $\mathrm{R}(ab/A) = \mathrm{R}(a/bA) + \mathrm{R}(b/A)$

Beweis:
Die Typen $\mathrm{tp}(ab/A)$, $\mathrm{tp}(a/bA)$ und $\mathrm{tp}(b/A)$ seien bestimmt durch die Formeln $\phi(x,y)$, $\chi(x,b)$ und $\psi(y)$. Wir können annehmen, daß $\phi(x,y) = \chi(x,y)$ und $\exists x \phi(x,y) = \psi(y)$. Nach Satz 3 können wir weiterhin annehmen, daß $\mathrm{R}\phi(x,b') = \mathrm{R}(a/Ab)$ für alle $b' \in \psi(\mathbb{C})$. Wir erhalten das Ergebnis, wenn wir Folgerung 6 auf die Projektion von $\phi(\mathbb{C},\mathbb{C})$ auf die zweite Komponente anwenden. □

Eine streng minimale Menge trägt eine Geometrie. Wir wollen zeigen, daß hier der Morleyrang der geometrischen Dimension entspricht.

**Definition** *Sei* $X$ *eine Menge. Ein Operator* $cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *heißt* Prägeometrie*, wenn die folgenden Axiome gelten:*

*(cl ist Abschlußoperator:)*

*a)* $A \subset clA$

*b)* $A \subset B \to cla \subset clB$

*c)* $clclA = clA$

*(cl hat endlichen Charakter:)*

*d) Wenn* $a \in clA$*, gibt es eine endliche Teilmenge* $A_0$ *von* $A$ *mit* $a \in clA_0$.

*(Die Austauscheigenschaft:)*

*e) Wenn* $a \in cl(A \cup \{b\}) \setminus clA$, *dann ist* $b \in cl(A \cup \{a\})$.

*(Eine* Geometrie *erfüllt zusätzlich:* $cl\emptyset = \emptyset$ *und* $cl\{a\} = \{a\}$.*)*

Beispiele:

1. Ein Vektorraum mit $cl$ = „der aufgespannte Unterraum“.
2. Ein Körper mit $cl$ = „der (relative) algebraische Abschluß des erzeugten Unterkörpers“.
3. Eine $\emptyset$-definierbare streng minimale Menge mit $cl = \mathrm{acl}$. In den letzten beiden Fällen ist e) nicht trivial!

$E$ ist ein *Erzeugendensystem* von $X$, wenn $clE = X$; eine Teilmenge $U$ von $X$ heißt *unabhängig*, wenn $u \notin cl(U \setminus \{u\})$ für alle $u \in U$. Eine *Basis* von $X$ ist ein unabhängiges Erzeugendensystem von $X$.

Man zeigt leicht:

**Lemma 8**
*1) Jedes Erzeugendensystem von* $X$ *enthält eine Basis von* $X$.

*2) Jede unabhängige Menge läßt sich zu einer Basis von* $X$ *erweitern.*

*3) Alle Basen von* $X$ *haben die gleiche Mächtigkeit* $\dim X$*: die* Dimension *von* $X$.

Mit einer Teilmenge $A$ von $X$ sind zwei Prägeometrien assoziiert: Einmal die auf $A$ induzierte Prägeometrie $cl\lceil P(A)$, dann die *nach* $A$ *relativierte* Prägeometrie auf $X$ $cl_A(\ldots) = cl(A \cup \ldots)$. Wir schreiben für die beiden Dimensionen $\dim(A)$ und $\dim(X/A)$.

**Lemma 9** $\dim X = \dim(X/A) + \dim A$

Beweis:
Die (disjunkte) Vereinigung einer Basis von $X$ (mod $A$) und einer Basis von $A$ ist eine Basis von $X$. □

**Satz 10** *Sei* $\mathbb{D}(x)$ *eine über* $A$ *definierte streng minimale Menge.* $B$ *sei eine endliche Teilmenge von* $\mathbb{D}$. *Dann ist*

$$\mathrm{R}(B/A) = \dim(B/A).$$

Beweis:
R und dim sind in der gleichen Weise durch Induktion über $|B|$ definierbar:
Es ist $\mathrm{R}(b/A) = 0$ gdw. $b \in \mathrm{acl}(A)$ gdw. $\dim(b/A) = 0$.
$\mathrm{R}(Bb/A) = \mathrm{R}(b/BA) + \mathrm{R}(B/A)$ (Lascargleichung)
$\dim(Bb/A) = \dim(b/BA) + \dim(B/A)$ (Lemma 9)
□

# 5 Konstruktible Gruppen sind algebraisch

Eine boolesche Kombination von offenen und abgeschlossenen Teilmengen einer Prävarietät heißt *konstruktibel*. Weil ein algebraisch abgeschlossener Körper $\mathbb{C}$ Quantorenelimination hat, sind die konstruktiblen Teilmengen von $\mathbb{C}^n$ gerade die definierbaren Teilmengen. Daraus folgt leicht, daß allgemein in einer interpretierten Prävarietät die konstruktiblen Mengen gerade die definierbaren sind. Aus 2.6 geht hervor, daß der Begriff der definierbaren Menge in einer Prävarietät nicht von der Wahl der Interpretation abhängt. Ebenso macht es Sinn von definierbaren Abbildungen zwischen Prävarietäten zu sprechen. Weil Mengen, zwischen denen es eine definierbare Bijektion gibt, gleichen Morleyrang und Grad haben, sind auch diese Begriffe für konstruktible Teilmengen von Prävarietäten wohldefiniert. Konstruktible Gruppen sind nichts anderes als Gruppen, die in $\mathbb{C}$ definierbar sind. Konstruktible Gruppen haben natürlich endlichen Morleyrang. Die Leitidee bei der Untersuchung von Gruppen mit endlichem Morleyrang ist: „Gruppen mit endlichem Morleyrang verhalten sich wie algebraische Gruppen.“ In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß konstruktible Gruppen algebraische Gruppen sind.

Zuerst studieren wir den Zusammenhang zwischen einer konstruktiblen Menge und ihrem Zariski–Abschluß.

**Satz 1** *Eine konstruktible Teilmenge $X$ einer Prävarietät und ihr Zariski–Abschluß $\overline{X}$ haben den gleichen Morley–Rang und den gleichen Morley–Grad. Anders ausgedrückt:*

$$\mathrm{R}(\overline{X} \setminus X) < \mathrm{R}(X).$$

Beweis:
Es ist leicht zu sehen, daß es genügt, die Prävarietät $\mathbb{C}^n$ zu betrachten. Der Beweis geht durch Induktion über $\mathrm{R}(X) = m$.

$X$ sei über dem Körper $K$ definiert. Wähle ein $\overline{a} \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{R}(\overline{a}/K) = m$. $P \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ sei das Verschwindungsideal von $\overline{a}$ über $K$: die Polynome, die $\overline{a}$ als Nullstelle haben. $V \subset \mathbb{C}^n$ sei das Nullstellengebilde von $P$. Wir halten ein $\overline{b} \in V$ fest.

Behauptung 1: $\mathrm{R}(\overline{b}/K) \leq m$.

Beweis: Nach Folgerung 4.10 ist $\mathrm{R}(\ldots/K) = \dim(\ldots/K)$. Sei $\dim(\overline{b}/K) = m'$. Wenn wir die Indices richtig umordnen, ist $b_1, \ldots, b_{m'}$ eine Basis von $b_1, \ldots, b_n$ über $K$. Weil alle Gleichungen mit Koeffizienten aus $K$, die zwischen den $a_i$ gelten, auch zwischen den $b_i$ gelten, sind auch $a_1, \ldots, a_{m'}$ algebraisch unabhängig über $K$. Also ist $m' \leq m$.

Behauptung 2: Wenn $\overline{b}$ den Rang $m$ über $K$ hat, dann hat $\overline{b}$ über $K$ denselben Typ wie $\overline{a}$.

Beweis: Durch Induktion über $n$. Wenn $m = n$, sind $\overline{a}$ und $\overline{b}$ beide algebraisch unabhängig über $K$, haben also denselben quantorenfreien Typ und also denselben Typ über $K$. Sonst schreiben wir nach eventueller Umordnung der Indices $\overline{a} = \overline{a}'a$ und $\overline{b} = \overline{b}'b$ für $\overline{a}'$ und $\overline{b}'$ aus $\mathbb{C}^{n-1}$, und $a$ bzw. $b$ algebraisch über $K(\overline{a}')$ bzw. $K(\overline{b}')$. Wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, daß $\overline{a}'$ und $\overline{b}'$ denselben Typ über K haben. Der $K$-Isomorphismus von $K(\overline{a}')$ nach $K(\overline{b}')$, der $\overline{a}'$ nach $\overline{b}'$ abbildet, bildet das Minimalpolynom von $a$ über $K(\overline{a}')$ auf das Minimalpolynom von $b$ über $K(\overline{b}')$ ab. Also sind $K(\overline{a})$ und $K(\overline{b})$ über $K$ isomorph.

Wir schreiben $V_p$ für $V$, wenn $p$ der Typ von $a$ über $K$ ist. Aus Behauptung 1 folgt, daß $V_p$ den Rang $m$ hat, aus Behauptung 2 folgt, daß $p$ der einzige Typ über $K$ vom Rang $m$ ist, der $V_p$ enthält. Wenn $p_1, \ldots, p_d$ alle Typen über $K$ vom Rang $m$ sind, die $X$ enthalten, dann gilt für $V' = V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_d}$: $\mathrm{R}(X \Delta V') < m$. Nach Induktionsvoraussetzung hat der Zariski–Abschluß $W$ von $X \setminus V'$ kleineren Rang als $m$. $V = V' \cup W$ ist dann eine abgeschlossene Obermenge von $X$ mit $\mathrm{R}(V \setminus X) < m$. □

Ein nicht–leerer topologischer Raum $X$ heißt *irreduzibel*, wenn $X$ nur in trivialer Weise als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann. Man zeigt leicht, daß ein noetherscher Raum $X$ in eindeutiger Weise Vereinigung von endlich vielen unvergleichbaren irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen ist: den *Komponenten* von $X$.

**Folgerung 2** *Irreduzible abgeschlossene Teilmengen einer Prävarietät haben Morley–Grad 1.*

Beweis:
Sei $V$ abgeschlossen, irreduzibel und vom Rang $m$. Wenn $V = X \cup Y$ eine Zerlegung in zwei disjunkte definierbare Mengen ist, ist $V$ Vereinigung der Abschlüsse von $X$ und $Y$. Es ist also z.B. $V = \overline{X}$. Dann ist aber $\mathrm{R}(V \setminus X) < m$. Also hat $Y$ kleineren Rang als $m$. □

In der algebraischen Geometrie definiert man die Dimension einer irreduziblen affinen Varietät $V \subset \mathbb{C}^n$ als den Transzendenzgrad des rationalen Funktionenkörpers von $V$ über $\mathbb{C}$. Man sieht leicht, daß das der Transzendenzgrad des von einem über $\mathbb{C}$ generischen Element von $V$ (in einer genügend saturierten elementaren Erweiterung von $\mathbb{C}$) erzeugten Erweiterungskörpers ist. Die Dimension ist also nach 4.10 gleich dem Morleyrang. Ein Satz der algebraischen Geometrie sagt, daß die Dimension von $V$ eine topologische Eigenschaft ist: Sie ist gleich der maximalen Länge einer Kette von abgeschlossenen, irreduziblen echten Teilmengen von $V$. Hier folgt das leicht aus unseren beiden letzten Sätzen: Der Morleyrang von $V$ ist gleich der maximalen Länge einer Kette von abgeschlossenen, irreduziblen echten Teilmengen von $V$. Denn eine echte abgeschlossene Teilmenge $W$ von $V$ hat kleineren Morleyrang als $V$ ($V \setminus W$ ist dicht in $V$); umgekehrt gibt es – wenn $\mathrm{R}V = n > 0$ – irreduzible abgeschlossene Teilmengen von $V$ vom Rang $n-1$ (wähle $X$ konstruktibel in $V$ vom Rang $n-1$, eine Komponente von $\overline{X}$ hat dann den Rang $n$).

**Folgerung 3** *Jede konstruktible Teilmenge einer Prävarietät enthält eine lokalabgeschlossene Teilmenge von gleichem Rang und Grad.*

Beweis:
Sei $X$ konstruktibel und $V$ der Zariski-Abschluß von $X$. Die gesuchte Menge ist $V \setminus \overline{(V \setminus X)}$. □

**Satz 4** *Die Charakteristik von $\mathbb{C}$ sei 0. $V$ und $W$ seien Prävarietäten und $f : V \to W$ eine definierbare Abbildung. Dann ist die Menge der Punkte, an denen $f$ regulär ist eine offene Teilmenge von $V$, deren Komplement kleineren Rang hat als $V$.*[3]

Für Charakteristik $p$ ist der Satz falsch! : Betrachte $V = W = \mathbb{C}, f(x) = x^{p^{-1}}$.

Beweis:
Man sieht leicht, daß es genügt, für $V$ eine irreduzible affine Varietät und für $W$ den Körper $\mathbb{C}$ selbst zu betrachten. Seien nun $V$ und $f$ über dem Körper $K$ definiert und $\overline{a} \in V$ generisch über $K$. Weil $(f\overline{a}) \in \mathbb{C}$ über $K(\overline{a})$ definierbar ist - und also von allen $K(\overline{a})$–Automorphismen des algebraischen Abschlusses von $K(\overline{a})$ festgelassen wird - muß $f(\overline{a}) \in K(\overline{a})$ sein. (Wenn die Charakteristik von $\mathbb{C}$ $p$ ist, erhält man nur $f(\overline{a})^{p^n} \in K(\overline{a})$ für ein $n$.) Sei also $f(\overline{a}) = g(\overline{a})$ für eine rationale Funktion $g(\overline{x})$ mit Koeffizienten in $K$. Die $K$-definierbare Menge $X$ aller $\overline{b} \in V$, für die $g(\overline{b})$ definiert ist und mit $f(\overline{b})$ übereinstimmt, enthält $\overline{a}$ und hat darum den gleichen Rang – sagen wir $m$ – wie $V$. Weil also $\mathrm{R}(V \setminus X) < m$, ist $\overline{a}$ auch in der offenen Menge $V \setminus \overline{(V \setminus X)}$ enthalten. $f$ ist also regulär bei $\overline{a}$.
□

Wenn $f$ nur auf einer Teilmenge von $V$ definiert ist, deren Komplement kleineren Rang hat als $V$, gilt der Satz entsprechend: „regulär bei a“ bedeutet dann auch „definiert in einer Umgebung von a“. Wenn $f$ injektiv ist, enthält man durch zweimalige Anwendung des Satzes, daß die Menge aller $v \in V$, für die $f(v)$ definiert ist, $f$ regulär bei $v$ und $f^{-1}$ regulär bei $f(v)$ ist, offen ist mit Komplement von kleinerem Rang.

**Folgerung 5**
*1) Konstruktible Untergruppen von algebraischen Gruppen sind abgeschlossen.*

*2) Wenn die Charakteristik von $\mathbb{C}$ Null ist, sind definierbare Homomorphismen von algebraischen Gruppen regulär.*

Beweis:
Für Elemente $a$ einer Gruppe $G$ bezeichnen wir mit $\lambda_a$ die Links- und mit $\mu_a$ die Rechtsmultiplikation mit $a$.

Beweis von 1): Sei $H$ eine Untergruppe der algebraischen Gruppe $G$.

Hilfssatz: Der Zariski-Abschluß $\overline{H}$ ist eine Untergruppe von $G$.
Beweis: Für alle $a \in H$ ist $H \subset \lambda_a(\overline{H})$. Also ist $\overline{H} \subset \lambda_a(\overline{H})$. Das ist äquivalent zu $H \subset \lambda_b(\overline{H}^{-1})$ für alle $b \in \overline{H}$. Also ist $\overline{H} \subset \lambda_b(\overline{H}^{-1})$.

Wenn nun $H$ konstruktibel ist, ist die Gruppe $\overline{H}$ disjunkte Vereinigung von Nebenklassen von $H$, die alle den selben Rang und Grad haben wie $H$. Das ist aber nach Satz 1 nur möglich, wenn $H = \overline{H}$.

Beweis von 2) : $f : G \to H$ sei regulär in einer Umgebung von $a$. $b$ sei ein beliebiges Element von $G$. Dann zeigt die Darstellung

$$f = \lambda_{f(ba^{-1})} \circ f \circ \lambda_{ab^{-1}},$$

[3] Wenn $V$ irreduzibel ist, heißt das, daß die Menge der regulären Punkte offen und dicht ist.

daß $f$ auch regulär bei $b$ ist. $\square$

Für Gruppen dehnen wir den Begriff der generischen Elemente auf Mengen von beliebigen Morleygrad aus:

**Definition** *Sei $G$ eine total-transzendente Gruppe. Ein Element $g$ heißt* generisch *über $B$, wenn $\mathrm{R}(g/B) = \mathrm{R}(g)$. Eine definierbare Teilmenge $X$ von $G$ heißt* generisch*, wenn $\mathrm{R}(X) = \mathrm{R}(G)$.*

Wir nehmen hier an, daß die Gruppenstruktur zur Sprache gehört. Wenn $G$ eine in einer anderen Struktur definierte Gruppe ist, müssen wir annehmen, daß $B$ die zur Definition der Gruppe benötigten Parameter enthält.

Wenn wir aus einer konstruktiblen Gruppe $G$ eine algebraische Gruppe machen, müssen wir $G$ mit endlich vielen affinen Mengen überdecken. Dazu werden wir den ersten Teil des folgenden Lemmas verwenden. Im zweiten Teil ist die wesentliche Rechenregel für generische Elemente aufgeführt.

**Lemma 6** *1) $X$ ist genau dann generisch in $G$, wenn sich $G$ durch endlich viele Translate $h_i X$ von $X$ überdecken läßt.*

*2) $g$ ist genau dann generisch über $B$, wenn für alle $h \in G$*

$$g \underset{B}{\perp} h \Rightarrow gh \underset{B}{\perp} h.$$

*$gh$ ist dann ebenfalls generisch über $B$.*

Beweis:
1):
Wir stellen uns $G$ als das Monstermodell vor. Sei $H$ eine kleine elementare Unterstruktur von $G$. Nach Lemma 3.4 2) enthält jedes Translat $gX^{-1}(g \in G)$ ein Element $h$ von $H$, d.h. $g \in hX$. Aus Kompaktheitsgründen genügen endlich viele $h$.

2):
Sei $m$ der Rang von $G$. Wenn $g$ generisch über $B$ ist und $g \perp_B h$, haben wir $\mathrm{R}(g/B \cup \{h\}) = m$. Nach Folgerung 3.18 ist dann auch $\mathrm{R}(gh/B \cup \{h\}) = m$. Daraus folgt $gh \perp_B h$ und daß $gh$ generisch über $B$.

Sei umgekehrt die Bedingung für $g$ erfüllt. Wähle für $h$ ein $B \cup \{g\}$-generisches Element. Nach dem eben bewiesenen - man vertausche rechts und links - ist $gh$ generisch über $B$. Nach Voraussetzung ist $gh \perp_B h$. Also ergibt sich: $\mathrm{R}(g/B) \geq \mathrm{R}(g/B \cup \{h\}) = \mathrm{R}(gh/B \cup \{h\}) = \mathrm{R}(gh/B) = m$. Also ist $g$ generisch über $B$. $\square$

Nun zum Hauptresultat dieses Kapitels:

**Satz 7** *Konstruktible Gruppen sind algebraisch. Wenn die Charakteristik von $\mathbb{C}$ Null ist, ist die Prävarietätsstruktur eindeutig bestimmt.*

Konstruktible Gruppen sind in $\mathbb{C}^n$ definierte Gruppen. Der Satz sagt, daß man konstruktible Gruppen so mit einer Prävarietätsstruktur versehen kann, daß die Bedingungen gelten, die von der Interpretation einer Prävarietät gefordert werden (siehe die Definition in Paragraph 2).

Wir beweisen den Satz nur für die Charakteristik Null. Im Charakteristik $p$ Fall liefert der Beweis nur die Struktur einer quasialgebraischen Gruppe, „einer Gruppe in der Kategorie der Quasiprävarietäten“, die definiert sind wie Prävarietäten, wobei aber rationale Funktionen in den Variablen $x_i^{p^{-1}}$ als quasi-regulär Funktionen der $x_i$ zugelassen sind. Daß quasialgebraische Gruppen algebraisch sind, ist ein Satz von Serre[4].

Beweis:
Sei also $G$ eine konstruktible Gruppe vom Rang $m$. Für eine Parametermenge $A$ ist $G$ eine $A$-definierbare Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ mit $A$-definierbaren Gruppenoperationen. (Daß es höchstens eine Weise gibt, $G$ zu einer algebraischen Gruppe zu machen, folgt sofort aus Folgerung 5, 2).)

*Wir nehmen zunächst an, daß $G$ den Grad 1 hat.*

Behauptung 1:
Es gibt eine in $A$-definierbare, in $\mathbb{C}^n$ lokal-abgeschlossene und in $G$ generische Menge $V$, sodaß für alle $v \in V$ und alle $g \in G$, die über $Av$ generisch sind

a) $\lambda_g$ ist als auf $V$ definierte partielle Funktion regulär bei $v$.

b) $\lambda_g^{-1}$ ist als auf $V$ definierte partielle Funktion regulär bei $gv$.

Beweis:
Sei $W$ eine $A$-definierbare lokal-abgeschlossene generische Teilmenge von $G$ wie in Folgerung 3. Auf $W$ wird dann von $\mathbb{C}^n$ eine Varietätsstruktur induziert. Für jedes $g \in G$ betrachte $\lambda_g$ als partielle Funktion von $W$ nach $W$. $U(g)$ sei die Menge aller $v \in W$, die – wenn man $V$ durch $W$ ersetzt – a) und b) erfüllen. Nach Satz 4 und der dort folgenden Bemerkung ist $U(g)$ eine offene generische Teilmenge von $W$. $U(g)$ ist $Ag$-definierbar. Wenn wir uns auf Elemente $g$ beschränken, die generisch über $A$ sind (und die daher alle denselben Typ über $A$ haben), ist $x \in U(g)$ definierbar durch eine $L(A)$–Formel $U(x, g)$. Setze

$$U = \{v \in W \mid v \in U(g) \text{ für alle über } Av \text{ generischen } g\}.$$

Mit Satz 3.5 sieht man, daß $U$ $A$-definierbar ist:

$$v \in U \text{ gdw. } \{g \mid U(v, g)\} =_m G.$$

Für ein $g$, das generisch über $A$ ist, wähle ein $v$ aus $U(g)$, das generisch über $Ag$ ist. Dann gehört $v$ zu $U$ (wegen Forkingsymmetrie (Satz 3.9)) und wir sehen, daß $U$ generisch ist. $V$ ist das Zariski-Innere von $U$. Wenn $v \in V$ und $g$ generisch über $Av$ ist, sind aber nach Lemma 6 $gv$ und $vg$ generisch über $A$ und gehören folglich zu $V$ (weil $G$ den Grad 1 hat). Der Rest der Eigenschaften a) und b) ist klar.

[4] J.P.Serre, *Groupes pro-algébriques*, Pub.Math I.H.E.S, n° 7, Paris

Wir übertragen nun die Prävarietätsstruktur von $V$ auf die Translate $aV$ vermöge der Bijektion $\lambda_a : V \to aV$. (Die Struktur hängt zunächst von $a$ und nicht nur von $aV$ ab!) Wir wollen $G$ so zu einer Prävarietät machen, daß die $aV$ offene Untervarietäten sind. Klar ist, daß die Prävarietätsstruktur von $G$ dadurch eindeutig bestimmt ist. Außerdem ist klar, daß die Prävarietätsstruktur von $G$ im Sinn von Paragraph 3 auf diese Weise definierbar sein wird. Man sieht leicht, daß man die $aV$ genau dann zu einer Prävarietät zusammenkleben kann, wenn drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $(aV \cap bV)$ ist offen in $aV$.

b) $aV$ und $bV$ induzieren dieselbe Prävarietätsstruktur auf $(aV \cap bV)$.

c) $G$ wird von endlich vielen der $aV$ überdeckt.

Bedingung c) ist wegen der Generizität von $V$ erfüllt (Lemma 6). Die beiden anderen Bedingungen folgen sofort aus der folgenden Behauptung:

Behauptung 2:
Sei $a \in G$. Dann gilt

a) $V_a = \{v \in V \mid av \in V\}$ ist offen in $V$.

b) $\lambda_a : V_a \to V_{a^{-1}}$ ist regulär.

Beweis:
Sei $v \in V_a$. Wähle $g$ generisch über $A \cup \{v, a\}$. Setze $b = gv, c = av$ und $h = ga^{-1}$. Dann ist nach Lemma 6 und Forkingrechnung

$g$ generisch über $Av$ und $b$ generisch über $A$ (also $b \in V$)

$h$ generisch über $A \cup \{v, a\}$ und also auch generisch über $Ac$.

Nun ist $\lambda_g(v) = b = \lambda_h(c)$. Wegen Eigenschaft a) von $V$ ist $\lambda_g$ regulär bei $v$ und wegen Eigenschaft b) ist $\lambda_h^{-1}$ regulär bei $b$. Also ist $\lambda_a = \lambda_{h^{-1}} \circ \lambda_g$ regulär bei $v$. Insbesondere ist $\lambda_a$ auf einer ganzen Umgebung von $v$ (als Abbildung nach $V$) definiert.

$G$ ist jetzt eine Prävarietät, in der alle $\lambda_a$ regulär sind. Das nächste Lemma gilt auch, wenn $G$ größeren Grad als 1 hat; die Charakteristik muß aber weiterhin Null sein:

**Lemma 8** *Eine Prävarietät mit konstruktibler Gruppenstruktur, in der alle $\lambda_a$ regulär sind, ist eine algebraische Gruppe.*

Beweis:
Sei $b \in G$. Nach Satz 4 gibt es ein $f$, bei dem $\mu_b$ regulär ist. Die Darstellung $\mu_b = \lambda_{af^{-1}} \circ \mu_b \circ \lambda_{fa^{-1}}$ zeigt, daß $\mu_b$ auch bei $a$ regulär ist. Wir schließen, daß alle $\mu_b$ regulär sind.

Die Multiplikation $\cdot$ sei regulär bei $(f, g) \in G \times G$. Dann ist $\cdot$ auch regulär bei $(a, b)$. Es ist nämlich für $c = f \cdot a^{-1}$ und $d = b^{-1} \cdot g$

$$x \cdot y = \lambda_{c^{-1}}\Big(\mu_{d^{-1}}\big((\lambda_c(x) \cdot \mu_d(y))\big)\Big).$$

Die Inversion sei regulär bei $f$. Dann ist die Inversion auch regulär bei $a$, denn für $c = f \circ a^{-1}$ ist $x^{-1} = \mu_c\big((\lambda_c(x))^{-1}\big)$. $\square$

*Schluß des Beweises von Satz 7:*

Sei $d$ der Grad von $G$. Nach Folgerung 6.6 im nächsten Kapitel gibt es einen definierbaren Normalteiler $N$ von $G$ mit dem Grad 1 und vom Index $d$ in $G$. Wir haben eben bewiesen, daß wir $N$ die Struktur einer algebraischen Gruppe geben können. Seien $g_1N, \ldots, g_dN$ die Nebenklassen von $N$. Wir machen $G$ zu einer Prävarietät, indem wir die Prävarietätsstruktur von $N$ via $\lambda_{g_i}$ auf die $g_iN$ übertragen. Man überprüft leicht, daß alle $\lambda_a$ regulär sind. Nach Lemma 8 ist also $G$ eine algebraische Gruppe geworden. $\square$

Konstruktible Gruppen sind Gruppen, die in einem reinen (d.h. ohne Zusatzstruktur) algebraisch abgeschlossenen Körper $K$ *definierbar* sind. Das heißt, daß das Universum der Gruppe eine definierbare Teilmenge des $K^n$ ist, und die Gruppenoperation in $K$ definierbar ist. Eine allgemeinere Methode, Gruppen von endlichem Morleyrang aus $K$ zu gewinnen, wäre Gruppen in $K$ zu *interpretieren*. Das heißt, daß der Grundbereich der Gruppe die Menge der Äquivalenzklassen einer definierbaren Äquivalenzrelation auf einer definierbaren Teilmenge von $K^n$ ist und die Gruppenoperation definierbar ist. Weil man die Äquivalenzklassen durch ihre kanonischen Parameter ersetzen kann, sieht man, daß Interpretierbarkeit in $\mathbb{C}$ das gleiche bedeutet wie Definierbarkeit in $\mathbb{C}^{eq}$. Wir zeigen jetzt, daß für algebraisch abgeschlossene Körper diese beiden Begriffe übereinstimmen.

**Definition** $T$ eliminiert die Imaginären *wenn jede* 0*-definierbare Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{C}^n$ *die Faserung einer* 0*-definierbaren Funktion* $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *ist.*

Das folgende Lemma zeigt, daß, wenn $T$ die Imaginären eliminiert, und $A$ eine Menge von Parametern ist, jede $A$-definierbare Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^n$ die Faserung einer $A$-definierbaren Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist.

**Lemma 9** *$T$ eliminiert genau dann die Imaginären, wenn jedes Element von $\mathbb{C}^{eq}$ mit einem Element von $\mathbb{C}^m$ interdefinierbar ist.*

Beweis:
Sei $a \in V^{eq}$ Klasse der 0-definierbaren Äquivalenzrelation $E$ auf $\mathbb{C}^n$. Wenn $E$ die Faserung der 0-definierbaren Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist, ist $f(a) \in \mathbb{C}^m$ wohldefiniert. $a$ und $f(a)$ sind interdefinierbar.

Sei umgekehrt $S = \mathbb{C}^n/E$ eine Sorte von $\mathbb{C}^{eq}$. Nach Voraussetzung ist jedes $s \in S$ interdefinierbar mit einem $a \in \mathbb{C}^m$. Aus Kompaktheitsgründen genügen für alle $s$ endliche viele $m$, also ein $m$. Wenn $a$ definierbar über $s$ ist, gibt es eine 0-definierbare partielle Funktion $f$ mit $f(s) = a$. Wenn $a$ und $s$ interdefinierbar sind, gibt es umgekehrt auch eine partielle Funktion $g$ mit $g(a) = s$. Schränkt man $f$ ein auf die 0-definierbare Menge $\{x \mid gf(x) = x\}$, wird $f$ injektiv. Wir können also annehmen, daß alle $f$ injektiv sind. Weil die Definitionsbereiche der $f$ ganz $S$ überdecken, müssen (Kompaktheit) schon endlich viele $f$ genügen : $f_1, \ldots, f_k$. Wenn wir $m$ nötigenfalls etwas vergrößern, können wir (wie im

Beweis von 2.7) aus den $f_i$ *eine* injektive Abbildung $f$ von $S$ nach $\mathbb{C}^m$ basteln. Dieses $f$ (zurückgezogen auf $\mathbb{C}^n$) ist unsere gesuchte Abbildung. $\square$

**Satz 10** *Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper fester Charakteristik eliminiert die Imaginären.*

BEWEIS:
Sei $F$ Äquivalenzklasse einer 0-definierbaren Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^n$, und $\overline{F}$ ihr Zariski–Abschluß.

(1) $F$ und $\overline{F}$ sind interdefinierbar.

Beweis: Es ist damit gemeint, daß $F$ als Element von $\mathbb{C}^eq$ und der kanonische Parameter von $\overline{F}$ (siehe Seite 13) interdefinierbar sind. Das ist gleichbedeutend damit, daß $F$ und $\overline{F}$ von denselben Automorphismen von $\mathbb{C}$ in sich überführt werden. Natürlich fixiert jeder Automorphismus, der $F$ fixiert, auch $\overline{F}$. Ein Automorphismus der $F$ nicht fixiert, überführt $F$ in eine andere Äquivalenzklasse, also in eine Menge, die disjunkt zu $F$ ist. Aus Satz 1 folgt, daß disjunkte konstruktible Mengen, die nicht-leer sind, nicht den gleichen Zariski–Abschluß haben können. Also hält unser Automorphismus auch $\overline{F}$ nicht fest.

Sei $I \leq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ das Verschwindungsideal von $\overline{F}$. Dann ist $\overline{F}$ die Nullstellenmenge von $I$. Also sind (im Automorphismen-Sinn) $\overline{F}$ und $I$ interdefinierbar. Sei $R \cong \mathbb{C}^N$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome, deren Grad kleiner ist als eine gewisse Schranke. Wir wählen die Schranke groß genug, sodaß $R$ ein Erzeugendensystem von $I$ enthält. Es ist wieder klar, daß $I$ und $V = R \cap I$ interdefinierbar sind. Der Satz folgt nun aus unserer letzten Behauptung:

(2) Jeder Untervektorraum von $\mathbb{C}^N$ ist interdefinierbar mit einem Tupel von Elementen von $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei $V$ der Unterraum, $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^N$. Für $a \in \mathbb{C}^N$ bezeichnen wir mit $\overline{a}$ die Nebenklasse $a + V$. Aus den $\overline{e}_i$ wählen wir eine Basis $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_k$ von $\mathbb{C}^N/V$. Jedes $\overline{e}_i$ läßt sich dann in eindeutiger Weise in dieser Basis ausdrücken:

$$\overline{e}_i = \sum_{l=1}^{k} a_i^l \overline{e}_l$$

$V$ ist jetzt interdefinierbar mit diesem Tupel der $a_i^l$ ($i = 1, \dots, N$; $l = 1, \dots, k$). Denn die $a_i^l$ berechnen sich eindeutig aus $V$. Umgekehrt wird $V$ erzeugt von den $e_i - \sum_{l=1}^{k} a_i^l e_i$. Denn diese Vektoren liegen alle in $V$ und ihr Erzeugnis hat höchstens die Kodimension $k$ in $\mathbb{C}^N$. $\square$

# 6 Die Sätze von Macintyre

**Satz 1 (Macintyre)** *Die totaltranszendenten abelschen Gruppen sind die Gruppen der Form*

$$D \oplus B,$$

*wobei $D$ divisibel ist und $B$ beschränkt.*

Man beachte, daß die Umkehrung des Satzes natürlich falsch ist, wenn die betrachteten Gruppen Zusatzstruktur tragen.

Zum Beweis brauchen wir ein Lemma:

**Lemma 2** *Sei $G$ eine totaltranszendente Gruppe und $H$ eine definierbare Untergruppe. Dann gilt*

*1)* $\mathrm{R}(H) = \mathrm{R}(G)$ *gdw. $H$ endlichen Index in $G$ hat.*

*2) Wenn $H$ in $G$ den endlichen Index $i$ hat, ist*

$$\mathrm{d}(G) = i \cdot \mathrm{d}(H).$$

Beweis:
$G$ ist disjunkte Vereinigung von Index–vielen Nebenklassen von $H$. Die Nebenklassen von $H$ haben nach Lemma 3.11 denselben Rang und denselben Grad wie $H$. □

**Folgerung 3** *In totaltranszendenten Gruppen erfüllen die definierbaren Untergruppen die absteigende Kettenbedingung (englisch die descending chain condition (DCC)): Jede absteigende Kette von definierbaren Untergruppen bricht ab.*

Beweis von Satz 1 (Fortsetzung): Sei $A$ eine totaltranszendente abelsche Gruppe. Die absteigende Folge von Untergruppen $1!A \supset 2!A \supset 3!A \supset ..$ wird stationär. Also ist für ein $N$

$$N!A = m!A \text{ für alle } m \geq N.$$

Für $n = N!$ ist also $D = nA$ divisibel. Wir verwenden:

**Lemma** *Divisible Untergruppen von abelschen Gruppen sind direkte Summanden.* □

Es ist also $A = D \oplus B$, wobei $nB = 0$.

Die Umkehrung ist natürlich so zu verstehen, daß jede *reine* abelsche Gruppe der angegebenen Form totaltranszendent ist. Zunächst brauchen einige Lemmas:

**Lemma 4** *Das cartesische Produkt von zwei totaltranszendenten Strukturen (von endlichem Morleyrang) ist wieder totaltranszendent (und von endlichem Morleyrang.)*

Beweis:
$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien zwei $L$-Strukturen. Wir bilden die dreisortige Struktur $\mathcal{M} = (A \times B, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \pi_1, \pi_2)$, die aus der Struktur $\mathcal{A}$, der Struktur $\mathcal{B}$, dem Produkt der Universen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und den beiden Projektionen von $A \times B$ auf die Faktoren besteht. Weil man jeden Automorphismus von $\mathcal{A}$ zu einem Automorphismus von $\mathcal{M}$ fortsetzen kann, der $\mathcal{B}$ elementweise festläßt, sind in $\mathcal{M}$ nicht mehr Relationen

auf $\mathcal{A}$ definierbar, als in der (alten) Struktur $\mathcal{A}$ selbst. Also haben definierbare Relationen auf $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$ denselben Morleyrang, wie in der alten Struktur $\mathcal{A}$. Aus der Dimensionsformel 3.17 folgt, daß dann auch $A \times B$ in $\mathcal{M}$ Morleyrang hat, der endlich ist, wenn die Morleyränge von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endlich sind. $\square$

**Lemma** *Divisible Gruppen haben Quantorenelimination.*

Beweis:
Wir verwenden aus der Algebra:

**Lemma** *Jede abelsche Gruppe $A$ hat eine eindeutig bestimmte* divisible Hülle *$H$: $H$ ist divisibel und* rational *über $A$, d.h. für jedes $h \neq 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nh \neq 0$ und $nh \in A$. $H$ ist in jeder divisiblen Erweiterung von $A$ enthalten.* $\square$

Die divisible Hülle von $\mathbb{Z}$ ist die additive Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die divisiblen Hüllen der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}(p^n)(p \text{ prim})$ sind die *Prüfergruppen*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{Z}(p^i).$$

**Lemma** *Jede divisible Gruppe $D$ hat die Form*

$$\mathbb{Q}^{(\alpha)} \oplus \left(\oplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)}\right).$$

*Die Kardinalzahlen $\alpha, \beta_p$ sind eindeutig bestimmt.* $\square$

Weil die $\beta_p$ die Dimension des $\mathbb{F}_p$–Vektorraums $D[p] = \{d \in D \mid pd = 0\}$ ist, läßt sich $\beta_p$ elementar beschreiben, wobei natürlich unendliche Kardinalzahlen nicht voneinander unterschieden werden können.

Seien nun $D_1$ und $D_2$ zwei elementar-äquivalente divisible Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe $A$. Zu zeigen ist, daß $D_1$ und $D_2$ über $A$ elementar äquivalent sind. Dabei können wir annehmen, daß $A$ abzählbar ist und daß die Invarianten $\alpha, \beta_p$ von $D_1$ und $D_2$ gleich $\omega_1$ oder endlich sind[5]; und nach unserem ersten Lemma können wir weiter annehmen, daß $A$ divisibel ist. $A$ ist direkter Summand in den $D_i$:

$$D_i = A \oplus B_i.$$

Die $B_i$ haben aber dieselben Invarianten. Also sind $D_1$ und $D_2$ über $A$ isomorph. $\square$

Beweis von Satz 1 (Fortsetzung): Wir wollen zeigen, daß divisible Gruppen totaltranszendent sind. Dazu bemerken wir zunächst, daß in einer divisiblen Gruppe $D$ jede Formel $\phi(x)$ in einer freien Variablen $x$ äquivalent zu einer booleschen Kombination von Formeln der Form $nx = d$ ist, die Nebenklassen von $D[n]$

[5] Man sieht leicht, daß jede abzählbare divisible Gruppe eine elementare Erweiterung mit dieser Eigenschaft hat. Wenn die Gruppe nicht trivial ist, kann man immer erreichen, daß $\alpha = \omega_1$.

beschreiben $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ . Die Gruppen der Form $D[n]$ sind unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen[6] und erfüllen die DCC. Denn, wenn $D[m] \subset D[n]$, ist $D[m] = D[m']$ für einen Teiler $m'$ von $n$.

Sei $A$ eine abzählbare elementare Unterstruktur von $D$ und $b$ ein Element von $D$. Der Typ $p = \mathrm{tp}(b/A)$ wird bestimmt durch die Nebenklassen

$$N = D[n] + a$$

$(a \in A)$, zu denen $b$ gehört. Es gibt immer eine kleinste Menge der Form $N$, zu der $b$ gehört, und $p$ wird durch $N$ bestimmt. Es folgt, daß über $A$ nur abzählbar viele verschiedene Typen realisiert werden. Das bedeutet, daß $D$ totaltranszendent ist.[7]

Es bleibt noch zu zeigen, daß Gruppen mit beschränktem Exponenten totaltranszendent sind:

**Lemma (Kurosch)** *Jede abelsche Gruppe von beschränktem Exponenten ist direkte Summe von zyklischen Gruppen.* $\square$

Jede Gruppe von beschränktem Exponenten ist also direkte Summe von endlich vielen Gruppen der Form $\mathbb{Z}(p^i)^{(\beta)}$. Diese Gruppen sind aber in der divisiblen Gruppe $D = \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta)}$ als $D[p^i]$ definierbar, also totaltranszendent. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Für den zweiten Satz von Macintyre, daß nämlich totaltranszendente Körper algebraisch abgeschlossen sind, brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

**Definition** *Eine Gruppe $G$ heißt* zusammenhängend*, wenn $G$ keine echten definierbaren Untergruppen von endlichem Index besitzt. Wenn $G$ totaltranszendent ist, hat $G$ eine kleinste definierbare Gruppe $G^0$ von endlichem Index: Die* Zusammenhangskomponente *von $G$.*

Die Existenz von $G^0$ sieht man so ein: Nach Folgerung 3 gibt es eine minimale definierbare Untergruppe $G^0$ von endlichen Index. Schneidet man $G^0$ mit einer beliebigen Gruppe $H$ von endlichem Index, erhält man wieder eine Untergruppe von endlichem Index, die gleich $G^0$ sein muß. $G^0$ ist also in $H$ enthalten.

$G^0$ wird auch dadurch charakterisiert, zusammenhängend und von endlichem Index zu sein.

Nach Lemma 2 sind totaltranszendente Gruppen vom Morleygrad 1 zusammenhängend. Die Umkehrung ist weniger trivial.

**Satz 5** *Zusammenhängende totaltranszendente Gruppen haben Morleygrad 1.*

Beweis:
Sei $\alpha$ der Rang der Gruppe $G$ und $d$ ihr Grad. $G$ operiert auf der $d$-elementigen Menge $X = \{E \bmod \alpha \mid E \text{ generisch, definierbar}, E \subset G\}$ vermöge

$$g(E \bmod \alpha) = (gE) \bmod \alpha.$$

[6] $D[m] \cap D[n] = D[\mathrm{kgV}(m, n)]$
[7] Einen Beweis findet man in jedem einführenden Modelltheorietext.

$D$ sei eine generische definierbare Teilmenge von $G$ von Grad 1. Nach Lemma 5.6 (1) ist jedes Element von $X$ von der Form $(hD) \bmod \alpha$ für ein $h \in G$. $G$ operiert also transitiv auf $X$. Der Stabilisator von $D \bmod \alpha$ hat also Index $d$ in $G$ und ist definierbar nach Satz 3.5. Wenn $G$ zusammenhängend ist, muß also $d = 1$ sein. □

**Folgerung 6** *Für totaltranszendente Gruppen $G$ gilt die Formel*

$$\mathrm{d}(G) = (G : G^0).$$

**Satz 7 (Macintyre)** *Unendliche totaltranszendente Körper sind algebraisch abgeschlossen.*

Beweis:
Sei $K$ ein unendlicher totaltranszendenter Körper.

Behauptung 1: $\mathrm{d}(K) = 1$.

Beweis: Sei $K^0$ die Zusammenhangskomponente der additiven Gruppe von $K$. Weil die Multiplikation mit Elementen $\neq 0$ ein definierbarer Automorphismus von $(K, +)$ ist, ist $K^0$ invariant unter allen diesen Multiplikationen. Weil $K$ unendlich ist, ist $K^0$ nicht Null und also gleich $K$. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 5

Bemerkung:
Der Beweis macht keinen Gebrauch davon, daß $K$ ein reiner Körper ist (also keine Zusatzstruktur trägt): Alle totaltranszendenten Körper mit Zusatzstruktur haben Morleygrad 1.

Behauptung 2: Alle Gleichungen $x^n = a$ $(a \in K)$ sind in $K$ lösbar.

Beweis: Die Abbildung $x \mapsto x^n$ hat endliche Fasern und bildet die multiplikative Gruppe $K^\bullet$ auf eine Untergruppe von $K^\bullet$ ab, die nach Satz 3.17 denselben Rang wie $K^\bullet$ hat. Die Abbildung ist also, nach Behauptung 1, surjektiv.

Behauptung 3: Wenn $K$ die endliche Charakteristik $p$ ist sind alle Gleichungen $x^p - x = a$ $(a \in K)$ in $K$ lösbar.

Beweis: Die Abbildung $x \mapsto x^p - x$ ist ein additiver Homomorphismus mit endlichen Fasern.

Behauptung 4: Jede endliche Körpererweiterung von $K$ ist totaltranszendent.

Beweis: Jede (auch nicht-assoziative) endlich-dimensionale $K$-Algebra $\mathcal{A}$ ist in $K$ interpretierbar. Wenn $\mathcal{A}$ die Dimension $n$ über $K$ hat, wählt man eine Basis $a_1, \ldots, a_n$ und identifiziert die Elemente von $\mathcal{A}$ mit ihren Koordinaten in $K^n$. Die Multiplikation ist dann eine mit den Strukturkonstanten von $\mathcal{A}$ als Parametern definierbare Abbildung von $K^{2n}$ nach $K^n$. Es folgt, daß sogar jede endlich-dimensionale $K$-Algebra totaltranszendent ist.

Der Satz folgt nun aus dem

Hilfssatz : In allen endlichen Körpererweiterungen $F$ des Körpers $K$ seien alle Gleichungen $x^n = a \quad (a \in F)$ und $x^p - x = a$ ($a \in F$, $p$ die (endliche) Charakteristik von $K$) lösbar. Dann ist $K$ algebraisch abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen, daß $K$ keine Erweiterung vom Grad $n > 1$ haben kann, durch Induktion über $n$. Sei also $F$ eine Erweiterung vom Grad $n > 1$. Sei $F$ in einer normalen endlichen Erweiterung $F'$ von $K$ enthalten. Weil $K$ nach Voraussetzung perfekt ist, ist $F'$ galoissch über $K$. Weil $n$ die Ordnung $(F' : K)$ der Galoisgruppe $G$ von $F'$ über $K$ teilt, gibt es zu jedem Primteiler $q$ von $n$ eine Untergruppe von $G$ der Ordnung $q$, also einen Zwischenkörper $K'$, über dem $F'$ den Grad $q$ hat. Das ist nach Induktionsvoraussetzung unmöglich, wenn $q < n$. Wir können also annehmen, daß $n$ prim und $F$ galoissch über $K$ ist. Weil jede $n$-te Einheitswurzel höchstens den Grad $n - 1$ über $K$ hat, enthält nach Induktionsvoraussetzung $K$ alle $n$-ten Einheitswurzeln. Wenn $n$ prim zur Charakteristik von $K$ ist, folgt, daß $F$ eine Radikalerweiterung von $K$ ist, also $F = K(\alpha)$, wobei das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$ die Form $x^n = a$ hat. Das ist aber nach Voraussetzung unmöglich.
Andererseits, wenn $p$ die Charakteristik von $K$ ist, ist jede galoissche Erweiterung $F$ von Grad $p$ eine Artin-Schreier-Erweiterung, also von der Form $K(\alpha)$, wobei das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$ die Form $x^p - x = a$ hat. Das ist unmöglich. $\square$

Mit dem folgenden Argument können wir Macintyres Satz auf Integritätsbereiche ausdehnen:

**Lemma 8** *Ein Monoid mit Linkskürzung ist eine Gruppe oder hat die Ordnungseigenschaft.*

BEWEIS:
Sei $a$ ein beliebiges Element. Für alle $i \leq j$ gilt $a^i | a^j$, wobei $x|y = \exists z\, xz \doteq v$. Wenn das Monoid nicht die Ordnungseigenschaft hat, gibt es ein Paar $i > j$ mit $a^i | a^j$ . Es ist dann $a^i b = a^j$ für ein $b$. Also $a^j(a(a^{(i-j-1)}b)) = a^j 1$. Wegen Linkskürzung ist $a(a^{(j-i-1)}b) = 1$. $a$ hat also ein Rechtsinverses. $\square$

**Folgerung 9** *Ein totaltranszendenter unendlicher Integritätsbereich ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.* $\square$

# 7 Der Satz von Zilber

Sei $X_i$ $(i \in I)$ eine Familie von konstruktiblen irreduziblen Teilmengen einer algebraischen Gruppe, die alle das Einselement der Gruppe enthalten. Dann ist die von der Vereinigung der $X_i$ erzeugte Untergruppe $H$ abgeschlossen und irreduzibel. Außerdem kann man $H$ als Produkt von endlich vielen der $X_i$ und ihrer Inversen schreiben. Der Satz von Zilber verallgemeinert dieses klassische Ergebnis auf Gruppen von endlichem Morleyrang. Zunächst braucht man ein verallgemeinerungsfähiges Substitut für die Irreduzibilität von Varietäten.

In diesem Abschnitt sei $G$ eine (unendliche) Gruppe von endlichem Morleyrang.

**Definition** *Eine nicht-leere definierbare Teilmenge $X$ von $G$ heißt* unzerlegbar*, wenn für jede definierbare Untergruppe $H$ von $G$ $\quad X/H$ unendlich ist oder aus genau einer $H$-Nebenklasse besteht. Dabei ist $X/H = \{xH \mid x \in X\}$.*

Eine äquivalente Formulierung ist: Wenn $X \subset g_1H \cup \dots g_nH$, dann ist schon $X \subset g_iH$ für ein $i$.

Man beachte, daß wir eigentlich *rechts-unzerlegbar* definiert haben; *links-unzerlegbar* wäre ein anderer Begriff. Man sieht aber leicht, daß Untergruppen $X$ genau dann unzerlegbar sind, wenn sie zusammenhängend sind. Weil in algebraischen Gruppen definierbare Gruppen abgeschlossen sind (5.5 (2)), sind irreduzible Mengen unzerlegbar.

**Satz 1 (Zilber)** *Sei $(S_i)_{i\in I}$ eine Familie von unzerlegbaren Mengen, die das Einselement enthalten. Dann ist die von der Vereinigung der $S_i$ erzeugte Untergruppe $H$ definierbar und zusammenhängend; es gilt sogar*

$$H = S_{i_1}^{\epsilon_1} S_{i_2}^{\epsilon_2} \dots S_{i_n}^{\epsilon_n},$$

*für $i_1, \dots, i_n \in I$ und $\epsilon, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$.*

Beweis:
Wähle $i_1, \dots, i_n \in I$ so, daß $S = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n}$ den größtmöglichen Morleyrang $m$ hat. Wir betrachten die definierbare Gruppe $H' = \{g \mid gS =_m S\}$.

Behauptung 1:
$H'$ enthält alle $S_i$.

Beweis:
Sei $i \in I$. $S_iS$ ist die Vereinigung aller $gS$ $(g \in S_i)$. Weil $S_iS$ wegen der Maximalität ebenfalls den Rang $m$ hat, gibt es nur endlich viele $gS$ mod $m$ $\quad (g \in S_i)$. Wir haben aber

$$g_1S =_m g_2S \quad \text{gdw.} \quad g_2^{-1}g_1S =_m S \quad \text{gdw.} \quad g_2^{-1}g_1 \in H' \quad \text{gdw.} \quad g_1H' = g_2H'.$$

Also ist $S_i/H'$ endlich. Weil $S_i$ unzerlegbar ist, sind also alle $gS$ $(g \in S_i)$ modulo $m$ äquivalent. Weil $1 \in S_i$, liegen also alle $g \in S_i$ in $H'$.

Folgerung: $H \subset H'$.

Behauptung 2:
$H' \subset S \cdot S^{-1}$.

Beweis;
Wenn $g \in H'$, also $gS =_m S$, haben $gS$ und $S$ nicht-leeren Durchschnitt. Wir haben also $gs = s'$ für $s, s' \in S$. Daraus folgt $g \in S \cdot S^{-1}$.

Folgerung: $H = H'$.

Wir müssen nur noch zeigen, daß $H$ zusammenhängend ist: Wenn $F$ endlichen Index in $H$ hat, sind aber alle $S_i/F$ endlich, haben also nur ein Element: $F$;

denn die $S_i$ enthalten die 1. Also sind alle $S_i$ in $F$ enthalten; wir haben $F = H$. $\square$

Keine der Voraussetzungen von Zilbers Satz kann weggelassen werden. Endliche Mengen erzeugen im Allgemeinen keine definierbaren Untergruppen (Beispiel: die additive Gruppe der rationalen Zahlen), also kann man auf die Irreduzibilität nicht verzichten. Führt man in einem unendlich-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ein Prädikat $P$ für einen echten Unterraum $\neq 0$ ein, so ist $a + P$ unzerlegbar für jedes $a$. Wenn $a$ nicht in $P$ liegt, ist aber die von $a + P$ erzeugte Gruppe nicht definierbar. Also ist auch die Voraussetzung, daß $S_i$ die 1 enthalten, notwendig.

Wenn die $S_i$ unzerlegbar und unendlich sind aber nicht notwendig die 1 enthalten, kann man immerhin schließen, daß ihr Erzeugnis eine unendliche definierbare Gruppe enthält: Man wählt $s_i \in S_i$ und wendet den Satz auf die $s_i^{-1} S_i$ an. Das werden wir später verwenden.

Die explizite Darstellung von $H$ folgt übrigens allein aus der Definierbarkeit von $H$ mit einem leichten Kompaktheitsargument. (Wir müssen dazu annehmen, daß $G$ genügend saturiert ist.)

Die Unzerlegbarkeit vieler Mengen läßt sich leicht mit dem folgenden Lemma zeigen:

**Lemma 2** *Für jede definierbare Menge $X$ gibt es eine kleinste definierbare Untergruppe $H$ von $G$ für die $X/H$ endlich ist. Wir schreiben $X^0 = H$.*

Beweis:
Wegen der DCC für definierbare Untergruppen gibt es eine minimale definierbare Untergruppe $H$, für die $X/H$ endlich ist. Wenn $X/F$ endlich ist, ist auch $X/(H \cap F)$ endlich. $H$ ist also die kleinste solcher Gruppen. $\square$

**Folgerung 3** *Sei $\mathbb{G}$ eine Gruppe von definierbaren Automorphismen von $G$ und $X$ sei $\mathbb{G}$-invariant. Dann ist $X$ genau dann unzerlegbar, wenn für alle $\mathbb{G}$-invarianten definierbaren Untergruppen $H$ von $G$ $X/H$ unendlich ist oder aus genau einer $H$-Nebenklasse besteht.*

Beweis:
Wenn $X\mathbb{G}$-invariant ist, ist auch $X^0$ $\mathbb{G}$-invariant. $\square$

**Lemma 4** *$F$ sei eine zusammenhängende Untergruppe und $g$ ein Element von $G$. Dann sind die beiden Mengen $g^F$ und $[g, F] = \big\{[g, h] \mid h \in F\big\}$ unzerlegbar.*

Beweis:
Die Elemente von $F$ operieren durch Konjugation auf $G$. Weil $g^F$ $F$-invariant ist, genügt es die Unzerlegbarkeit von $g^F$ für $F$-invariante $H$ zu zeigen. Wenn $H$ $F$-invariant ist, operiert aber $F$ auch durch Konjugation auf der Menge $G/H$ der Rechtsnebenklassen von $H$. $g^F/H$ ist der Orbit von $gH$ unter dieser Operation. Eine zusammenhängende Gruppe kann aber nicht in definierbarer Weise transitiv auf einer endlichen Menge operieren, die mehr als ein Element besitzt:

Die Stabilisatorgruppen wären echte definierbare Untergruppen von endlichem Index.

Wenn $X$ unzerlegbar ist, ist auch $g^{-1}X$ unzerlegbar. Es ist aber $[g, F] = g^{-1}g^F$. □

**Folgerung 5** *Wenn $G$ zusammenhängend ist, sind auch alle derivierten Gruppen und die Gruppen der absteigenden Zentralreihe definierbar und zusammenhängend.*

Beweis:
Aus dem Satz von Zilber folgt, daß für eine beliebige Menge $A$ und jede zusammenhängende Untergruppe $H[A, H]$ – die von allen $[a, H](a \in A)$ erzeugte Untergruppe – definierbar und zusammenhängend ist. Die Folge der Derivierten von $G$ ist definiert als $G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$; die absteigende Zentralreihe als $\zeta^{(0)}(G) = G$, $\zeta^{(i+1)}(G) = [G, \zeta^{(i)}(G)]$. □

**Satz 6** *$G$ sei nicht-abelsch. Dann ist $G$ genau dann einfach, wenn $G$ keinen echten, nicht—trivialen definierbaren Normalteiler hat.*

Beweis:
Wenn $N$ ein Normalteiler von $G$ ist, ist $[N, G]$ ein definierbarer Normalteiler, der in $N$ enthalten ist. Wenn $[N, G] = G$, ist $N = G$. Wenn $[N, G] = 1$, so ist $N$ im Zentrum von $G$ enthalten. Weil das Zentrum ein echter definierbarer Normalteiler ist, ist dann $N = 1$. □

Für abelsche Gruppen ist dieser Satz natürlich falsch: In der Gruppe der rationalen Zahlen zum Beispiel ist keine echte nicht-triviale Untergruppe definierbar.

Der Satz von Zilber erlaubt es, in vielen Fällen algebraisch abgeschlossene Körper in Gruppen von endlichem Morleyrang zu konstruieren:

**Satz 7** *In einer Struktur $M$ von endlichem Morleyrang seien folgende Dinge definiert:*

*a) Eine (additive geschriebene) abelsche Gruppe $A$*

*b) Eine abelsche (multiplikativ geschriebene) zusammenhängende nicht-triviale Gruppe $B$ von Automorphismen von $A$ (d.h. $B$ und eine Operation von $B$ auf $A$ sind in $M$ definiert und jedes $b \in B$ ist durch seine Wirkung auf $A$ eindeutig bestimmt.)*

*Wenn wir voraussetzen, daß $A$ ein minimaler $B$-Modul ist – wenn $A$ also keine echten definierbaren $B$-invarianten unendlichen Untergruppen hat –, dann läßt sich in $M^{eq}$ ein Körper $K$ definieren, der $B$ als multiplikative Untergruppe enthält, und die Operation von $B$ auf $A$ läßt sich so zu einer definierbaren Operation von $K$ auf $A$ fortsetzen, daß $A$ zu einem 1–dimensionalen Vektorraum wird.*

Beweis:
Der Durchschnitt aller Zentralisatoren

$$\mathrm{C}(A_0) = \{b \in B \mid ba = a \text{ für alle } a \in A_0\}$$

für alle endlichen Teilmengen $A_0$ von $A$ ist trivial. Wegen der DCC gibt es also ein $A_0$ mit trivialem Zentralisator. Dann ist jedes $b \in B$ bestimmt durch die Wirkung von $b$ auf die Elemente von $A_0$. Weil $B$ unendlich ist, muß also, für ein $a_0 \in A_0$, $Ba_0$ unendlich sein. Mit Hilfe der Folgerung 3 sieht man, daß wegen der $B$-Minimalität von $A$ jede unendliche $B$-invariante definierbare Menge $X$ unzerlegbar ist. Das Erzeugnis von $X$ enthält eine unendliche zusammenhängende definierbare Gruppe $G$ (siehe die Bemerkungen vor Lemma 2). Das Erzeugnis der $bG$ ($b \in B$) ist nach Zilbers Satz definierbar, im Erzeugnis von $X$ enthalten und $B$-invariant. Also wird $A$ von $X$ erzeugt.

Wir folgern, daß $A$ von $Ba_0$ erzeugt wird. $a_0$ ist also Erzeugendes des $B$-Moduls $A$. $K$ sei der von den $b \in B$ erzeugte Ring von Endomorphismen von $A$. Weil $K$ kommutativ ist, wird jedes $\phi \in K$ eindeutig durch $\phi(a_0)$ bestimmt. Es gibt eine Schranke $N$, sodaß sich jedes Element von $A$ als Summe von höchstens $N$ vielen Elementen $\pm ba_0 (b \in B)$ schreiben läßt. Man kann also die Elemente von $K$ kodieren durch Folgen von $b_i'$s und von Vorzeichen von höchstens der Länge $N$. Daraus ergibt sich leicht die Definierbarkeit von $K$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $K$ ein Körper ist. Das folgt aber aus 6.9, weil $K$ ein Integritätsbereich ist. Denn, wenn $\phi \in K$ ungleich Null ist, ist $\operatorname{Ker}\phi$ eine echte $B$-invariante Untergruppe von $A$ und muß daher endlich sein. $\operatorname{Im}\phi$ ist also unendlich und daher gleich $A$. $\phi$ kann also kein Nullteiler sein. □

**Folgerung 8** *In einer zusammenhängenden auflösbaren Gruppe von endlichem Morleyrang, die nicht nilpotent ist, ist ein algebraisch abgeschlossener Körper interpretierbar.*

Beweis:
Wir verwenden den Satz von Hall:
„Wenn $N \lhd G$ und wenn $N$ und $G/N'$ ($N'$ ist die Kommutatorgruppe) nilpotent sind, dann ist auch $G$ nilpotent.“

Daraus folgt, daß es in der Folge der Derivierten von $G$ drei aufeinander folgende Gruppen $G^{(i)} \leq G^{(i+1)} \leq G^{(i+2)}$ gibt, für die $G^{(i+2)}/G^{(i)}$ nicht nilpotent ist. Wir haben also zwei definierbare Normalteiler $N \lhd L$ von $G$ gefunden, für die $H = L/N$ zusammenhängend und nicht nilpotent ist, aber $H'' = 1$. Wir nehmen nun an, daß $N, L$ so gewählt sind, daß $\mathrm{R}(H)$ minimal ist. (Wir haben hier vom nächsten Lemma Gebrauch gemacht: Wenn $G$ zusammenhängend ist, und $N$ ein definierbarer Normalteiler von $G$, dann ist auch $G/N$ zusammenhängend.)

Das Zentrum $Z$ von $H$ muß endlich sein, denn sonst hätte $H/Z$ die gleichen Eigenschaften wie $H$, hätte aber einen kleineren Rang. (Um das zu sehen, wendet man 3.11 auf die Projektion $H \to H/Z$ an.) Aus demselben Grund ist auch das Zentrum $\zeta_2(H)/Z$ von $H/Z$ endlich. $\zeta_2(H)$ ist also ein endlicher Normalteiler von $H$. $H$ operiert durch Konjugation auf $\zeta_2(H)$, weil $H$ zusammenhängend ist, muß diese Operation trivial sein: $\zeta_2(H)$ liegt im Zentrum von $H$, d.h. $H/Z$ hat triviales Zentrum.

Wenn wir nun $H$ durch $H/Z$ ersetzen, haben wir folgende Situation:

a) $H$ ist zusammenhängend

b) $H'' = 1$

c) $\mathrm{Z}(H) = 1$.

$H/H'$ ist eine zusammenhängende abelsche Gruppe, die auf der abelschen Gruppe $H'$ (durch Konjugation) operiert. Sei nun $A$ eine minimale Untergruppe von $H'$, die unter dieser Operation invariant ist – $A$ ist einfach ein minimaler Normalteiler von $H$. Wegen c) ist die Operation von $H/H'$ auf $A$ nicht-trivial. Wenn wir $B = H/C(A)$ setzen, wird jedes $b$ durch seine Wirkung auf $A$ eindeutig bestimmt und wir können Satz 7 anwenden. □

**Lemma 9** *$G$ sei eine totaltranszendente Gruppe und $N$ ein definierbarer Normalteiler von $G$. Wenn $G$ zusammenhängend ist, ist auch $G/N$ zusammenhängend. Wenn $N$ zusammenhängend ist, gilt auch die Umkehrung.*

Beweis:
Die definierbaren Untergruppen von $G/N$ entsprechen via $H \mapsto H/N$ gerade den definierbaren Gruppen zwischen $N$ und $G$. Der Index von $H$ in $G$ und der Index von $H/N$ in $G/N$ ist der gleiche. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. Wenn $N$ zusammenhängend ist, muß jede Untergruppe $H$ von endlichem Index $N$ enthalten. Daraus folgt die Umkehrung. □

# 8 Die Cherlinsche Vermutung

Unsere einzigen Beispiele für Gruppen von endlichem Morleyrang sind bis jetzt abelsche Gruppen von endlichem Morleyrang wie in Paragraph 6 beschrieben, algebraische Gruppen und endliche Produkte dieser Beispiele. Daß es im wesentlichen keine anderen Beispiele gibt, ist Inhalt der *Vermutung von Cherlin*: Einfache Gruppen von endlichem Morleyrang sind algebraisch. Diese Vermutung hat eine starke und eine schwache Version:

Die starke Version behauptet, daß jede einfache Gruppe $G$ von endlichem Morleyrang *stark isomorph* zu einer algebraischen Gruppe $H$ ist. Das bedeutet, daß es zwischen $G$ und $H$ einen Isomorphismus gibt, der die definierbaren Relationen von $G$ gerade in die definierbaren Relationen von $H$ überführt. (Eine algebraische Gruppe trägt ja via ihrer Interpretation in einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine Zusatzstruktur. Wir werden übrigens später sehen, daß in einfachen algebraischen Gruppen diese Zusatzstruktur sich schon aus der reinen Gruppenstruktur definieren läßt). Zwei Gruppen, die beide in einer Struktur $M$ interpretierbar sind und definierbar isomorph sind, sind natürlich stark isomorph; in Abschnitt 5 haben wir also bewiesen, daß konstruktible Gruppen stark isomorph zu algebraischen Gruppen sind. In dieser Form wurde Cherlins Vermutung von Hrushovski widerlegt: Es gibt streng minimale Körper mit echter Zusatzstruktur, Körper also, die definierbare Relationen tragen, die in der einen Körperstruktur (auch mit Parametern) nicht definierbar sind. Einfache algebraische Gruppen, die über einem solchen Körper definierbar sind, sind nicht stark isomorph zu einer algebraischen Gruppe. Das werden wir am Ende des Kapitels sehen. Die schwache Version behauptet nur die „gruppentheoretische" Isomorphie von $G$ mit einer algebraischen Gruppe $H$. Nach der oben gemachten Bemerkung muß der Isomorphismus aber immerhin definierbare Relationen von $H$ in definierbare Relationen von $G$ übertragen. Diese Vermutung ist (so viel ich weiß) noch offen.

Im folgenden soll *einfach* immer auch *unendlich* bedeuten. (Endliche Gruppen sind trivialerweise algebraisch, über jedem Grundkörper.)

**Satz 1 (Lascar)** *Einfache Gruppen von endlichem Morleyrang sind $\omega_1$-kategorisch.*

BEWEIS:
Sei $G$ einfach von endlichem Morleyrang. Wir nehmen an, daß $G$ das Monstermodell von $\mathrm{Th}(G)$ ist.

Hier ist die folgende Bemerkung am Platze: Viele wichtige Eigenschaften von Gruppen $G$ von endlichem Morleyrang ändern sich nicht beim Übergang zu elementaren Erweiterungen $H$. Zum Beispiel ist $G$ genau dann einfach, wenn $H$ einfach ist: $G$ (oder $H$) ist nach Satz 7.6 nämlich genau dann einfach, wenn für jede Formel $\phi(x, \overline{y})$ in $G$ die elementare Aussage „für alle $\overline{a}$, wenn $\phi(x, \overline{a})$ einen Normalteiler definiert, ist $\phi(x, \overline{a})$ leer oder das ganze Universum" gilt. (Wir können annehmen, daß $G$ und $H$ nicht-abelsch sind.)

$H$ sei nun eine minimale unendliche definierbare Untergruppe, $D$ sei eine streng–minimale Teilklasse von $H$. Es ist klar, daß dann $D$ unzerlegbar ist.

Weil $G$ einfach ist, wird $G$ von den $D^g$ $(g \in G)$ erzeugt. Nach dem Satz von Zilber (siehe auch die Bemerkung vor 7.2) ist

$$G = D^{\epsilon_1 g_1} D^{\epsilon_2 g_2} \dots D^{\epsilon_n g_n} \quad (\epsilon_i = \pm 1,\ g_i \in G)$$

$G$ ist also algebraisch (sogar definierbar!) über $D \cup \{g_1, \dots, g_n\}$, also über einer streng minimalen Menge und endlich vielen Parametern. Daraus folgt, daß $G$ $\omega_1$-kategorisch ist: Sei $A$ eine Menge von Parametern. Dann genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{Th}(G_A)$ $\omega_1$-kategorisch ist. Wenn $A$ die Parameter von $D$ und die $g_i$ enthält, ist aber jedes Modell $M$ der algebraische Abschluß von $D(M)$. ($D(M)$ ist durch seine Dimension (das ist im Überabzählbaren die Mächtigkeit von $M$) eindeutig bestimmt. □

**Satz 2** *Jede Gruppe $G$ von endlichem Morleyrang hat nur* endlich viele Dimensionen. *Das heißt: es gibt eine endliche Parametermenge $A$ und endlich viele $A$-definierbare streng minimale Mengen $D_i$ (in $G^{eq}$), so daß jeder nicht-algebraische Typ über einem Modell (von* $\mathrm{Th}(G)$*), das $A$ enthält, nicht-orthogonal zu einem der $D_i$ ist.*

BEWEIS:
Wir nennen für einen Augenblick eine unendliche Gruppe $H$ von endlichem

Morleyrang ohne echte definierbare unendliche Normalteiler *fast einfach*. Weil endliche definierbare Normalteiler im Zentrum $Z$ liegen, ist $H/Z$ einfach. Weil $Z$ endlich ist, ist $H$ algebraisch über $H/Z$. Es folgt, daß fast einfache Gruppen von endlichem Morleyrang $\omega_1$-kategorisch sind.

Wir arbeiten mit dem Monstermodell $\mathbb{G}$ der Theorie von $G$. Sei

$$1 = \mathbb{G}_0 \triangleleft \ldots \triangleleft \mathbb{G}_n = \mathbb{G}$$

eine maximale Normalreihe von zusammenhängenden definierbaren Untergruppen. (Man beachte, daß $n \leq \mathrm{R}\mathbb{G}$). Dann sind die Quotienten $\mathbb{H}_i = \mathbb{G}_{i+1}/\mathbb{G}_i$ fast einfach und also $\omega_1$-kategorisch. Wir wählen in jedem $\mathbb{H}_i$ eine streng minimale Menge $\mathbb{D}_i(x)$. Die Parametermenge $A$ enthalte die Parameter der $\mathbb{G}_i$ und der $\mathbb{D}_i(x)$.

Sei $G$ eine elementare Unterstruktur von $\mathbb{G}$, die $A$ enthält, und $a \in \mathbb{G}_i \setminus G$. Wir zeigen durch Induktion über $i$, daß $\mathrm{tp}(a/G)$ nicht–orthogonal zu einem der $\mathbb{D}_j(x)$ ist:

Sei $a \in \mathbb{G}_{i+1} \setminus G$.

1.Fall: $a\mathbb{G}_i \notin H_i = \mathbb{H}_i(G)$
Dann ist nach Satz 4.2 $\mathrm{tp}(a\mathbb{G}_i/H_i)$ und damit auch $\mathrm{tp}(a\mathbb{G}_i/G)$ nicht–orthogonal zu $\mathbb{D}_i(x)$. Weil $a\mathbb{G}_i$ algebraisch über $A \cup \{a\}$ ist, ist auch $\mathrm{tp}(a/G)$ nicht–orthogonal zu $\mathbb{D}_i(x)$.

2.Fall: $a\mathbb{G}_i \in H_i$
Dann ist $a = ga'$ für ein $g \in G$ und ein $a' \in \mathbb{G}_i$. Weil $a$ nicht zu $G$ gehört, gehört auch $a'$ nicht zu $G$. Induktion ergibt, daß $\mathrm{tp}(a'/G)$ nicht–orthogonal zu einem der $\mathbb{D}_j(x)$ ist. Weil $a'$ algebraisch über $G \cup \{a\}$ ist, ist auch $\mathrm{tp}(a/G)$ nicht–orthogonal zu $\mathbb{D}_j(x)$. $\square$

**Folgerung 3** *In Gruppen von endlichem Morleyrang gelten wie für $\omega_1$-kategorische Theorien die Dimensionsgleichungen von Abschnitt 4. Insbesondere gilt für definierbare Untergruppen $H$:*

$$\mathrm{R}G = \mathrm{R}H + \mathrm{R}(G/H).$$

Beweis:
Die Beweise von Paragraph 4 gehen für endliche viele streng minimale Mengen ebenso durch. $\square$

**Definition** $\mathbb{E}$ *und* $\mathbb{F}$ *seien definierbare Teilklassen von* $\mathbb{C}$. $\mathbb{E}$ *heißt* $\mathbb{F}$–intern, *wenn es eine Parametermenge $A$ gibt, sodaß jedes Element von $\mathbb{E}$ mit Parametern aus $\mathbb{F}$ und $A$ definierbar ist:* $\mathbb{E} \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F} \cup A)$.

**Lemma 4** $\mathbb{E}$ *ist genau dann $\mathbb{F}$–intern, wenn $\mathbb{E}$ endlich ist, oder wenn es für ein $n$ eine definierbare Surjektion $\mathbb{H} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{E}$ gibt.*

Beweis:
Sei die Bedingung des Lemmas erfüllt. Wenn $\mathbb{E}$ endlich ist, setzt man $A = \mathbb{E}$, sonst wählt man für $A$ die Parameter von $\mathbb{H}$.

Sei umgekehrt $\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$–intern mit Parametermenge $A$. Wenn $e \in \mathbb{E}$, gibt es eine $L(A)$-Formel $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ und $f_i \in \mathbb{F}$, sodaß $\phi(\mathbb{C}, f_1, \ldots, f_n) = \{e\}$. Setzt man

$$\mathbb{D}_\phi = \left\{\overline{f} \in \mathbb{F}^n \mid \exists! x \in \mathbb{E}\ \phi(x, \overline{f})\right\},$$

so liefert $\phi$ eine $A$-definierbare Funktion $\mathbb{H}_\phi$ von $\mathbb{D}_\phi$ nach $\mathbb{E}$, in deren Bild $e$ liegt. Ein Kompaktheitsschluß zeigt, daß man mit insgesamt endlich vielen Funktionen $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_m$ für alle $e \in \mathbb{E}$ auskommt. Durch Einführen von dummy–Variablen kann man erreichen, daß alle $\mathbb{H}_i$ dieselbe Stelligkeit $n$ haben. Schließlich bemerken wir noch, daß, weil $\mathbb{E}$ unendlich ist, auch $\mathbb{F}$ unendlich sein muß. (Denn der definierbare Abschluß einer Menge kann keine unendliche Klasse sein.) Die gesuchte Surjektion $\mathbb{H} : \mathbb{F}^{n+m} \to \mathbb{E}$ wird definiert durch

$$\mathbb{H}(\overline{f}, g_1, \ldots, g_m) = \mathbb{H}_i(\overline{f}), \text{ wobei } i = \min\{j \mid g_m = g_j\}.$$

□

Im Beweis von Satz 1 haben wir gesehen, daß eine einfache Gruppe von endlichem Morleyrang $\mathbb{D}$–intern für eine geeignete streng minimale Menge ist. Eine leichte Modifikation des Beweises zeigt, daß $G$ $D$–intern für jede unendliche definierbare Teilmenge von $G$ ist (man muß nur zeigen, daß $D$ eine unendliche unzerlegbare Menge enthält). Es gilt aber sogar:

**Satz 5 (Hrushovski)** *Eine einfache Gruppe $G$ von endlichem Morleyrang ist $\mathbb{F}$–intern in jeder unendlichen definierbaren Teilmenge $F$ von $G^{eq}$.*

Beweis:
Wir beginnen mit Vorbetrachtungen:

Aus der Bemerkung nach 3.16 folgt, daß ein Typ $p$ über dem Modell $N$, der $\phi(y)$ enthält, über $\phi(N)$ definierbar ist. Wenn andererseits $p$ nicht über $M$ forkt, ist $p$ über $M$ definierbar. Das folgende Lemma kombiniert diese beiden Phänomene:

**Lemma 6** *Sei $N$ eine elementare Erweiterung von $M$. Wenn $a \perp_M N$ und $b$ die $L(N)$-Formel $\phi$ erfüllt, dann ist $\mathrm{tp}(a, b/N)$ über $M \cup \phi(N)$ definierbar.*

Beweis von Lemma 6:
Sei $\psi(x, y, n) \in \mathrm{tp}(a, b/N)$. Wir wollen zeigen, daß $\psi$ in $M \cup \phi(N)$ erfüllbar ist. Dazu können wir annehmen, daß $T \vdash \psi \to \phi(y)$. Weil $\mathrm{tp}(a/Mn)$ endlich erfüllbar in $M$ ist, gibt es ein $a'$ in $M$ mit $\models \exists y \psi(a', y, n)$. Wir finden also ein $b'$ in $N$ mit $\models \psi(a', b', n)$. $b'$ liegt in $\phi(N)$. □

Sei nun $G$ eine Gruppe von endlichem Morleyrang und $G \prec \mathbb{G}$ das Monstermodell von $\mathrm{Th}(G)$. Sei $b$ ein beliebiges Element von $\mathbb{G}^{eq}$. Wir betrachten die Menge

$$P = \{\mathrm{tp}(a, b/G) \mid a \in \mathbb{G},\ a \text{ generisch über } G\}.$$

$G$ operiert auf $P$ durch $g\mathrm{tp}(a, b/G) = \mathrm{tp}(ga, b/G)$, denn $\mathrm{tp}(ga, b/G)$ hängt nur von $\mathrm{tp}(a, b/G)$ ab.

**Lemma 7** *$q_1$ und $q_2$ seien zwei Elemente von $P$, die über $A$ definierbar sind. Dann ist $\{g \in G \mid gq_1 = q_2\}$ $A$-definierbar.*

Beweis von Lemma 7:
Sei $q_1$ bestimmt durch die $L(A)$-Formel $\phi(x, y)$. Dann wird $gq_1$ bestimmt durch $\phi(g^{-1}x, y)$. $g$ überführt also genau dann $q_1$ in $q_2$, wenn $\phi(g^{-1}x, y)$ zu $q_2$ gehört. Das ist aber eine $A$-definierbare Eigenschaft von $g$, weil $q_2$ $A$-definierbar ist. □

**Lemma 8** *Sei $G$ $\omega_1$-saturiert, $\phi$ eine $L(G)$-Formel und $b \in \phi(\mathbb{G}^{eq})$. Dann gilt:*

*1) $N = \{g \in G \mid g$ operiert trivial auf $P\}$ ist ein definierbarer Normalteiler von $G$.*

*2) $G/N$ ist $\phi$–intern.*

*3) Wenn es ein $G$-generisches $a$ gibt mit $a \not\perp_G b$ ist $N \neq G$.*

Beweis von Lemma 8:
1): $N$ ist trivialerweise ein Normalteiler. Daß $N$ definierbar ist, sieht man so: Nach Lemma 7 sind alle Stabilisatoren $\mathrm{Stab}(q)$ $(q \in P)$ definierbar. $N$ ist der Durchschnitt aller Stabilisatoren. Wegen der DCC genügen dabei endlich viele: $N = \{g \in G \mid gq_1 = q_1, \ldots, gq_n = q_n\}$.

2): $M \prec G$ sei abzählbar. Wegen der Saturiertheit von $G$ genügt es zu zeigen, daß jedes $g_0N$ $(g_0 \in G)$ mit Parametern aus $M \cup \phi(G^{eq})$ definierbar ist. Wenn $g_0q_i = q_i'$, ist $g_0N = \{g \in G \mid gq_1 = q_1', \ldots gq_n = q_n'\}$. Wegen Lemma 7 genügt es zu zeigen, daß alle $\mathrm{tp}(a, b/G) \in P$ über $M \cup \phi(G^{eq})$ definierbar sind. Weil $a$ generisch über $G$ ist, ist aber $a \perp_M G$. Die Behauptung folgt also aus Lemma 6.

3): Wähle ein endliches $B$ in $G$ mit $G \perp_B a, b$, und ein $B$-generisches $g$ aus $G$. Aus $a \not\perp_G b$ folgt leicht $a \not\perp_B b$. Weil $g$ generisch über $B, a, b$ ist, ist nach Lemma 5.6 auch $ga$ generisch über $B, a, b$. Insbesondere ist $ga \perp_B b$, also $g \notin N$. □

Jetzt können wir den Beweis von Satz 5 beenden: Wir können annehmen, daß $G$ $\omega_1$–saturiert ist und daß $F$ streng minimal ist. Weil $G$ $\omega_1$–kategorisch ist, gibt nach 4.2 zu jedem $G$-generischen $a$ ein $b$ aus $F(\mathbb{G})$ mit $a \not\perp_G b$. Der Normalteiler $N$ von Lemma 8 ist demnach echt, also gleich 1. $G = G/1$ ist also $F$–intern. □

In der Theorie der algebraischen Gruppen spielen die Borelgruppen eine wichtige Rolle. Der Begriff macht Sinn für beliebige Gruppen von endlichem Morleyrang:

**Definition** *Sei $G$ eine Gruppe von endlichem Morleyrang. Eine* Borelgruppe *von $G$ ist eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe von $G$.*

Das folgende entnimmt man Chapter VII von [H]: Wenn $G$ eine zusammenhängende, affine algebraische Gruppe ist, sind alle Boreluntergruppen von $G$ konjugiert. Wenn eine (alle) Borelgruppe $B$ nilpotent ist, ist $G = B$. Daraus können wir schließen, daß einfache algebraische Gruppen keine nilpotenten

Boreluntergruppen haben. Denn nach dem Satz von Chevalley (siehe Serre „Algebraic Groups and Class Fields“ Springer (1988) p 40) hat jede zusammenhängende algebraische Gruppe $G$ einen zusammenhängenden, abgeschlossenen, affinen Normalteiler $N$, dessen Quotient $G/N$ projektiv - und also abelsch (!) - ist. Wenn $G$ einfach ist, muß $G$ also linear sein. Ist eine Boreluntergruppe nilpotent, so ist $G$ auflösbar, kann also nicht einfach sein. Einfache algebraische Gruppen sind also *gut* in dem folgenden Sinn:

**Definition** *Eine einfache Gruppe von endlichem Morleyrang heißt* schlecht, *wenn alle Boreluntergruppen nilpotent sind.*

Ob es schlechte Gruppen gibt, ist ein offenes Problem. Wir werden weiter unten sehen, daß es keine schlechten Gruppen geben kann, wenn die Cherlinsche Vermutung in ihrer schwachen Form stimmt.

Gute Gruppen sind fast algebraisch:

**Satz 9** *Sei $G$ eine gute einfache Gruppe von endlichem Morleyrang. Dann ist in $G$ ein algebraisch abgeschlossener Körper $K$ interpretierbar, und $G$ ist definierbar isomorph zu einer in $K$ interpretierbaren Gruppe.*

Wenn der Körper $K$ ein reiner Körper ist, ist demnach $G$ eine algebraische Gruppe über $K$ (Abschnitt 5) $G$ erfüllt also dann die Cherlinsche Vermutung im starken Sinn.

Beweis:
Nach 7.8 ist in $G$ ein algebraisch abgeschlossener Körper interpretierbar. Satz 5 zeigt, daß $G$ $K$–intern ist. Nach Lemma 4 gibt es also eine definierbare Surjektion von $K^n$ auf $G$. Das ist aber gerade die Behauptung. □

Um zu sehen, daß einfache algebraische Gruppen über einem Körper mit Zusatzstruktur nicht schlecht sein können, brauchen wir das folgende Lemma:

**Lemma 10** *Sei $G$ eine Gruppe von endlichem Morleyrang und $H$ eine möglicherweise nicht definierbare Untergruppe. $\overline{H}$ sei der* definierbare Abschluß *von $H$: die kleinste definierbare Untergruppe, die $H$ enthält. Wenn $H$ abelsch (nilpotent, auflösbar) ist, dann ist auch $\overline{H}$ abelsch (nilpotent, auflösbar). Wenn $H$ zusammenhängend ist in dem Sinn, daß $(H : H \cap N)$ endlich $\rightarrow H \subset N$ für jede definierbare Untergruppe $N$, dann ist auch $\overline{H}$ zusammenhängend. Wenn $H$ ein Normalteiler ist, dann auch $\overline{H}$.*

Beweis:
$\overline{H}$ existiert wegen der DCC. Der Zentralisator $\mathrm{C}(H)$ ist – als Durchschnitt aller $C(h)$ $(h \in H)$ – definierbar.

Wenn $H$ abelsch ist liegt $H$ im Zentrum von $\mathrm{C}(H)$. Also liegt auch $\overline{H}$ im Zentrum und muß abelsch sein.

Sei $H$ nilpotent der Klasse $n$ und $Z$ das Zentrum von $H$. $H$ liegt im Zentralisator $C$ von $Z$. $H/Z$ ist eine Untergruppe von $C/Z$, nilpotent der Klasse $n-1$. Sei $Z \subset Z'$ das Zentrum von $C$. Dann ist immer noch $H/Z \subset C/Z'$. Weil $C/Z'$

definierbar ist, ist nach Induktion ist $H/Z$ in einer definierbaren, nilpotenten Untergruppe $A/Z'$ von $C/Z'$ enthalten. Weil $Z$ im Zentrum von $A$ liegt, ist $A$ und damit auch $\overline{H}$ nilpotent.

Sei $H$ auflösbar der Klasse $n$. $H'$ ist dann auflösbar der Klasse $n-1$. Nach Induktion ist der definierbare Abschluß $L$ von $H'$ auflösbar. Weil $H$ $H'$ normalisiert, normalisiert $H$ auch $L$. $N$ sei der Normalisator von $L$. Dann ist $LH/L$ eine abelsche Untergruppe von $N/L$. Es gibt also eine definierbare abelsche Untergruppe $A/L$ von $N/L$, die $LH/L$ enthält. $A$ ist eine definierbare auflösbare Gruppe, die $H$ und also auch $\overline{H}$ enthält.

Wenn $H$ zusammenhängend ist und $N$ endlichen Index in $\overline{H}$ hat, dann hat $H \cap N$ auch endlichen Index in $H$. $N$ enthält also $H$ und wir haben $\overline{H} = N$.

Wenn $H$ ein Normalteiler ist, ist $H$ und damit auch $\overline{H}$ in allen $H^g$ enthalten. Das zeigt, daß auch $\overline{H}$ ein Normalteiler ist. □

**Bemerkung 11** *Einfache algebraische Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper mit Zusatzstruktur sind gut.*

Beweis:
Sei $\mathfrak{G}$ eine einfache algebraische Gruppe über dem Körper $\mathfrak{K}$, der eventuell noch Zusatzstruktur trägt. Mit $K$ bezeichnen wir den Körper $\mathfrak{K}$ ohne Zusatzstruktur und mit $G$ die Gruppe $\mathfrak{G}$, aber nur mit Zusatzstruktur, die sich in $K$ definieren läßt. Sei $\mathfrak{B}$ eine Boreluntergruppe von $\mathfrak{G}$ und $B$ der definierbare Abschluß von $\mathfrak{B}$ in $G$. Nach Lemma 10 ist $B$ auflösbar und zusammenhängend (in G). $B$ muß nun Boreluntergruppe von $G$ sein, denn sonst hätte $\mathfrak{B}$ (und also auch $B$!) unendlichen Index in einer $G$-definierbaren auflösbaren Untergruppe, was nicht sein kann. Nach dem obigen ist $B$ nicht nilpotent, also ist auch $\mathfrak{B}$ nicht nilpotent.
□

Um Hrushovskis Widerlegung der starken Cherlinschen Vermutung zu verstehen brauchen wir noch einen Satz:

**Satz 12 (Poizat)** *Sei $K$ ein (reiner) algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist jeder in $K$ definierbare unendliche Körper definierbar isomorph zu $K$.*

Beweis:
Wir zeigen den Satz nur für den Fall, daß $K$ die Charakteristik 0 hat. Den allgemeinen Fall findet man in [P].

Sei also $F$ in $K$ definierbar. Die multiplikative Gruppe $F^\bullet$ von $F$ operiert auf der additiven Gruppe $F^+$. Sei $G$ das entsprechende semidirekte Produkt $F^+ \rtimes F^\bullet$. $G$ ist in $F$ definierbar: Das Universum von $G$ ist $F^+ \times F^\bullet$. Die Multiplikation ist definiert durch $(d,c)(b,a) = (d + cb, ca)$. $G$ ist also eine konstruktible Gruppe, also algebraisch über $K$. Wir haben im Kapitel 6 gesehen, daß totaltranszendente Körper Morleygrad 1 haben. Also sind $F^+$ und $F^\bullet$ zusammenhängend und nach 7.9 auch $G$. Wir können jetzt einen Satz von Rosenlicht anwenden: Zusammenhängende algebraische Gruppen ohne Zentrum sind linear. (In der Charakteristik 0 ist das (mehr oder weniger) klar: Die adjungierte

Darstellung von $G$ auf der Liealgebra von $G$ ist treu, wenn $G$ kein Zentrum hat.) $G$, und damit $F^+$ ist also eine lineare algebraische Gruppe über $K$.

In [H] wird bewiesen, daß jede kommutative lineare algebraische Gruppe direktes Produkt von zwei Gruppen $S$ (dem semisimplen Teil) und $U$ (dem unipotenten Teil) ist ($p$ 100). $S$ ist – in $\mathrm{GL}(n, K)$ – konjugiert zu einer Untergruppe von $\mathrm{D}(n, K)$($p$ 101). $U$ besteht aus *unipotenten* Matrizen, das sind Matrizen der Form $U = 1 + M$, wobei $M$ nilpotent ist.

Wenn $K$ die Charakteristik 0 hat, liefert $\log(U) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}M^i$ eine Bijektion zwischen der Menge der unipotenten Matrizen und der Menge der nilpotenten Matrizen. Wenn $U$ und $V$ vertauschen gilt $\log(UV) = \log(U) + \log(V)$. Weil $U$ kommutativ ist, ist $U$ also isomorph zu einer additiven Untergruppe von $\mathrm{M}(n, K)$.

Zunächst zeigen wir, daß in der Darstellung $F^+ = S \rtimes U$ $S$ trivial sein muß. Wir fassen $S$ als Untergruppe von $\mathrm{D}(n, K)$ auf. Die Abbildung $\pi_i$, die jedem Element von $F$ das $i$-te Diagonalelement seiner $S$-Komponente zuordnet ist ein Homomorphismus von $F^+$ nach $K^\bullet$. Ein solcher Homomorphismus muß aber trivial sein. Denn sonst kann, weil $F^+$ zusammenhängend ist, das Bild von $\pi_i$ nicht endlich sein. Weil $K$ streng minimal ist, wäre $\pi_i$ also surjektiv. Wenn $K$ die Charakteristik $p$ hat, hätte $K^\bullet$ dann den Exponenten $p$, was nicht sein kann. Wenn $F$ die Charakteristik 0 hat, wäre nach dem nächsten Lemma der Kern von $\pi_i$ trivial. $F^+$ und $K^\bullet$ wären isomorph, was auch nicht sein kann.

**Lemma 13** *Sei $F$ ein Körper der Charakteristik* 0 *von endlichem Morleyrang, der eventuell Zusatzstruktur besitzt. Dann gilt*

*1) Jede echte definierbare Untergruppe von $F^+$ ist trivial.*

*2) Jede Untergruppe von $(F^+)^n$ ist ein $F$-Untervektorraum.*

*3) Jeder Endomorphismus von $(F^+)^m$ ist $F$-linear.*

Beweis von Lemma 13:
1) und 3) folgen aus 2).
Sei $U$ eine Untergruppe von $(F^+)^n$. Dann ist $R = \{a \in F \mid aU \subset U\}$ ein Teilring von $F$, der $\mathbb{Z}$ enthält. Nach 6.9 ist $R$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wenn $R$ von $F$ verschieden wäre, hätte $F$ unendliche Dimension über $R$. Wenn $a_i \in F$ ($i \in \mathbb{N}$) linear unabhängig über $R$ sind, ist aber $Ra_0 \subset Ra_0 + Ra_1 \subset \dots$ eine unendlich aufsteigende Kette von definierbaren Untergruppen von $F^+$, die unendliche Index in einander hätten. Dann müßte der Morleyrang unendlich sein. □

Nun weiter im Beweis von Satz 12: Wir wissen jetzt, daß $F^+ = U$ definierbar isomorph ist zu einer Untergruppe $V$ von $(K^+)^m$ sein muß. $F$ hat also die Charakteristik 0 und keine nicht-trivialen echten definierbaren Untergruppen. Also muß der $K$-Vektorraum $V$ die Dimension 1 haben. $F^+$ ist also isomorph zu $K^+$ und wir können $F$ und $K$ so identifizieren, daß $K$ und $F$ dieselbe Addition und dieselbe 1 haben. Das folgende Argument zeigt, daß $F$ und $K$ auch dieselbe Multiplikation haben müssen, und wir sind fertig.

Sei $\odot$ die Multiplikation von $F$. Für jedes $a$ ist $a\odot$ ein Endomorphismus von $K^+$. Nach Lemma 13 ist $a \odot$ $K$-linear für alle $a$ und folglich ist $\odot$ $K$-bilinear. Wir haben also

$$a \odot b = (a1) \odot (b1) = ab(1 \odot 1) = ab1 = ab.$$

□

Sei nun $\mathfrak{K}$ ein Körper von endlichem Morleyrang mit echter Zusatzstruktur (die also auch mit Parametern im unterliegenden reinen Körper $K$ nicht definierbar ist). $G$ sei eine einfache, über $K$ definierte, algebraische Gruppe (z.B. $\mathrm{PGL}(2, K)$). Dann ist $G = \mathrm{PGL}(2, K)$ eine gute Gruppe und interpretiert einen Körper, der nach Satz 12 definierbar isomorph zu $K$ sein muß. In $\mathfrak{G} = \mathrm{PGL}(2, \mathfrak{K})$ ist also der Körper $\mathfrak{K}$ interpretierbar. Wenn nun $\mathfrak{G}$ stark isomorph zu einer algebraischen Gruppe über einem reinen algebraisch abgeschlossenen Körper $F$ wäre, wäre $K$ wieder nach Satz 12 $F$-definierbar isomorph zu $F$. $\mathfrak{K}$ müßte also selbst ein reiner Körper sein.

# 9 Gruppen von kleinem Morleyrang

Wir diskutieren zusammenhängende Gruppen bis zum Morleyrang 3.

**Satz 1** *Die zusammenhängenden Gruppen von Morleyrang* 1 *sind:*

1. *Direkte Summen von Kopien der rationalen Zahlen und von Prüfergruppen $\mathbb{Z}(p^\infty)$, wobei jede Primzahl $p$ nur endlich oft vorkommt.*
2. *$p$-elementare abelsche Gruppen - also $\mathbb{F}_p$-Vektorräume.*

Beweis:
Nach dem Satz von Reineke ist $G$ abelsch. Nach Abschnitt 6 ist $G = D \oplus B$, wobei $D$ divisibel und $B$ von beschränktem Exponenten ist. Wenn $B$ den Exponenten $n$ hat, ist $nG = D$. Weil $G$ keine echte unendlichen Untergruppen hat, muß $G = D$ oder $G = B$ sein. Sei $G = D$. Die Gruppen $D[p]$ müssen endlich sein, also kommt jedes $p$ nur endlich oft in $G$ vor. Wenn $G = B$ ist, ist $B$ eine Summe von Kopien von Gruppen $\mathbb{Z}(p^i)^{(\beta)}$, wobei jedes $p$ nur endlich oft vorkommt. Eines der $(\beta)$ muß unendlich sein. Nehmen wir also an, daß $G = \mathbb{Z}(p^i)^{(\beta)} \oplus H$ und daß $p$ den Exponenten $m$ von $H$ nicht teilt. Dann ist $nG = \mathbb{Z}(p^i)^{(\beta)}$ und wir schließen $G = \mathbb{Z}(p^i)^{(\beta)}$. Schließlich folgt aus $G[p] = \mathbb{Z}(p)^{(\beta)}$, daß $G = \mathbb{Z}(p)^{(\beta)}$.

Daß umgekehrt die angegebenen Gruppen streng minimal sind, ist im Fall der elementar-abelschen $p$-Gruppen elementar und folgt im Fall der divisiblen Gruppen $G$ mit den Methoden von Paragraph 10 ([8]) daraus, daß alle $G[n]$ endlich sind. □

Beispiele sind die additive und multiplikative Gruppe algebraisch abgeschlossener Körper $K$. $K^+$ ist eine Summe von Kopien von $\mathbb{Q}$ oder elementar abelsch, je nachdem, ob $K$ die Charakteristik 0 oder endliche Charakteristik hat. $K^\bullet$

[8] *Moduln* (Nicht ausgeführt.)

ist direkte Summe von Kopien von $\mathbb{Q}$ und Prüfergruppen, wobei jede Primzahl genau einmal vorkommt; in der Charakteristik $p$ fehlt allerdings $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

**Satz 2** *Zusammenhängende Gruppen vom Morleyrang 2 sind auflösbar.*

Beweis:
Sei $G$ eine Gruppe vom Morleyrang 2. Sei $Z$ das Zentrum von $G$. Es genügt zu zeigen, daß $G/Z$ auflösbar ist. Wenn $G/Z$ höchstens den Rang 1 hat, ist $G/Z$ abelsch nach Satz 1 (oder natürlich nach 1.) Wenn $G/Z$ den Rang 2 hat, ist $Z$ endlich, und das Zentrum von $G/Z$ muß trivial sein. Wir können also annehmen, daß das Zentrum von $G$ trivial ist.

Wir geben hier noch einmal die Quintessenz des *Reinekearguments* von Abschnitt 1 in einem Hilfssatz:

**Lemma 3** *Sei $G$ eine zusammenhängende totaltranszendente Gruppe und $N$ ein definierbarer Normalteiler, der mindestens den Index 3 hat. Dann enthält $G \setminus N$ ein Element mit unendlichem Zentralisator.*

Beweisvon Lemma 3:
Sonst ist $\mathrm{C}(a)$ endlich für alle $a \in G/N$. Die Fasern der Surjektion $g \mapsto a^g$ von $G$ auf $a^G$ sind dann endlich und nach 3.17 hat $a^G$ denselben Rang wie $G$. Weil $G$ Grad 1 hat, müssen sich alle diese Konjugationsklassen schneiden; alle $a \in G/N$ sind also konjugiert. Außerdem haben alle $a \in G/N$ endliche Ordnung. Daraus folgt wie in Abschnitt 1, daß $G/N$ höchstens die Ordnung 2 hat. □

Lemma 3 (für $N = 1$) gibt uns jetzt ein $a_0 \neq 1$ mit unendlichem Zentralisator. Weil $G$ kein Zentrum hat, muß $\mathrm{C}(a_0)$ den Rang 1 haben. Wir setzen $A = \mathrm{C}(a_0)^0$ und $N = \mathrm{N}(A)$ – der Normalisator von $A$. Wenn wir annehmen, daß $G$ nicht auflösbar ist, ist $N \neq G$.

Behauptung 1:
$A$ hat mit jeder anderen definierbaren, zusammenhängenden Untergruppe vom Rang 1 trivialen Durchschnitt.

Beweis:
$B$ sei eine Untergruppe wie in der Behauptung. Der Durchschnitt $D$ von $A$ und $B$ muß endlich sein. Dann hat aber das Produkt $AB$ den Rang 2. (Denn $AB$ ist die disjunkte Vereinigung der Nebenklassen $Ab$ ($b \in B$) und es gibt soviele Nebenklassen $Ab$ wie es Nebenklassen $Db$ gibt, also unendlich viele.) Für alle $a \in D$ liegt aber $AB$ in $\mathrm{C}(a)$. $\mathrm{C}(a)$ hat also Rang 2 und $a$ liegt im Zentrum, d.h. $a = 1$.

Behauptung 2:
$G = N \cup AgA$ für alle $g \notin N$.

Beweis:
$G$ ist disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen $AhA$ ($h \in G$). Wenn $h \notin N$, hat $AhA$ den Rang 2 ($A^h$ und $A$ haben endlichen Durchschnitt. Im Beweis der letzten Behauptung haben wir gesehen, daß dann $A^hA$ den Rang 2 hat. $AhA$ hat aber denselben Rang wie $A^hA$.) Es gibt also außer den in $N$ enthaltenen Doppelnebenklassen $AhA$ ($h \in N$) nur noch die eine Klasse $AgA$.

Behauptung 3:
$G \setminus N$ enthält eine Involution.

Beweis:
Sei $g \notin N$. Nach der letzten Behauptung können wir $g^{-1}$ in der Form $a_1ga_2$ für $a_i \in A$ schreiben. $w = ga_1$ ist unsere Involution. Denn $w^2 = a_2^{-1}a_1$ liegt in $A$. Andererseits liegt $w^2 = (w^2)^w$ auch in $A^w$. $w^2$ muß also 1 sein.

Behauptung 4:
Wir können $a_0$ so wählen, daß $A \neq N$.

Beweis:
Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $a_0$ irgendein Element mit unendlichem Zentralisator. Aus $A = N$ folgt $A = \mathrm{C}(a_0)$, also $a_0 \in A$. Außerdem hat $A$ dann unendlich viele Konjugierte, die nach Behauptung 1 paarweise disjunkt sind. $A^G$ – die Vereinigung der Konjugierten – hat also Rang 2. Um zu zeigen, daß $A^G = G$ ist, nehmen wir ein beliebiges Element $a_1 \notin A^G$. Weil $a_1^G$ disjunkt zu $A^G$ ist, hat $a_1^G$ höchstens den Rang 1. $\mathrm{C}(a_1)$ ist also unendlich. Jetzt gilt das bisherige auch für $A_1 = \mathrm{C}(a_1)$. Die Vereinigung der Konjugierten von $A_1$ hat Rang 2 und muß also nicht– leeren Schnitt mit $A^G$ haben. Wegen Behauptung 1 ist das nur möglich, wenn $A$ und $A_1$ konjugiert sind. Es ist also $a_1 \in A_1 \subset A^G$. Das widerspricht der Wahl von $a_1$. $G$ ist also Vereinigung der Konjugierten von $A$. Jetzt erhalten wir leicht den Widerspruch. Mit Behauptung 3 finden wir zuerst eine Involution $u$, und dann, wenn $u$ in der $A$-Konjugierten $B$ liegt, eine Involution $w$ außerhalb von $B$. Das Produkt $uw$ muß in einer $A$-Konjugierten $C$ liegen, die weder $u$ noch $w$ enthält. Dann liegt aber $(wu)^w = (wu)^{-1}$ in $C^w \cap C$, was aber wegen $w \notin C = \mathrm{N}(C)$ und Behauptung 1 nicht sein kann.

Jetzt können wir zeigen, daß $G$ auflösbar ist: Wähle eine Involution $w$ außerhalb von $N$ und ein $n \in N \setminus A$. Nach Behauptung 2 ist $nw = a_1wa_2$ für $a_i \in A$. Dann ist $a_2 \neq 1$. Weil $a_2^w = a_1^{-1}n \in N$ und $G = N \cup AwA$ ist $a_2^G \subset N$. Die definierbare Hülle $H$ von $a_2^G$ ist ein definierbarer Normalteiler, der in $N$ enthalten ist. $H$ kann nicht endlich sein, weil $G$ kein Zentrum hat. Wenn $H$ den Rang 1 hat, ist $1 \lhd H^0 \lhd G$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Sonst ist $G = H$ und $1 \lhd A \lhd G$ die gesuchte Normalreihe. □

**Satz 4** *Sei $G$ eine zusammenhängende Gruppe vom Morleyrang 2 ohne Zentrum. Dann ist in $G$ ein algebraisch abgeschlossener Körper $K$ definierbar und $G$ ist definierbar isomorph zu $K^+ \rtimes K^\bullet$.*

Beweis:
$G$ ist auflösbar. Sei $N$ ein zusammenhängender Normalteiler vom Rang 1. Wie in 7.7 sieht man, daß man einen Körper $K$ interpretieren kann und eine Operation von $K$ auf $N$, sodaß $N$ ein 1-dimensionaler Vektorraum wird und $G/\mathrm{C}(N)$ so mit einer Untergruppe von $K^\bullet$ identifiziert wird, daß auf $N$ die Konjugation mit Elementen von $G$ der Skalarmultiplikation mit dem Körperelement entspricht.

Wenn wir Lemma 3 auf $G$ und $\mathrm{C}(N)$ anwenden, erhalten wir ein $a \in G \setminus \mathrm{C}(N)$ mit unendlichem Zentralisator. $F = \mathrm{C}(a)^0$ hat trivialen Schnitt mit $N$. Also hat $NF$ den Rang 2 und ist gleich $G$. Weil die Elemente von $F \cap \mathrm{C}(N)$ mit den Elementen von $F$ und $N$ vertauschen, liegt $F \cap \mathrm{C}(N)$ im Zentrum von $G$ und muß trivial sein. Daraus folgt $N = \mathrm{C}(N)$. $F$ kann also als eine

Untergruppe von $K^\bullet$ aufgefaßt werden und konjugiert die Elemente von $N$ wie die Skalarmultiplikation. Weil $K^\bullet$ wie $N$ den Rang 1 hat und nach dem Beweis von 6.7 zusammenhängend ist, muß $F = K^\bullet$ sein. Daraus folgt $G = N \rtimes F = K^+ \rtimes K^\bullet$. □

Zur Untersuchung der einfachen Gruppen vom Rang 3 brauchen wir den folgenden Satz, der auf Hrushovski zurückgeht. Der Beweis ist aus [P].

Zur Notation: Für einen $K$-Vektorraum $V$ ist $\mathbb{P}(V)$ – die Menge der 1-dimensionalen Unterräume von $V$ – der zugehörige projektive Raum. Die von den Automorphismen von $V$ induzierten Permutationen von $\mathbb{P}(V)$ bilden *projektive* Gruppe $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/K^\bullet$. Ist $V = K^n$, schreibt man $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ und $\mathrm{PGL}(n, K)$.

Die Elemente von $\mathbb{P}(K)$ werden gegeben durch *homogenen* Koordinaten $(a, b) \neq (0, 0)$, die den gleichen Punkt bezeichnen, wie alle ihren skalaren Vielfache. Man kann bis auf den Punkt $\infty = (a, 0)$ die Punkte von $(a, b)$ von $\mathbb{P}(K)$ mit den $ab^{-1} \in K$ identifizieren. Also

$$\mathbb{P}(K) = K \cup \{\infty\}.$$

Eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, K)$$

operiert auf $K \cup \{\infty\}$ durch

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d},$$

wobei z.B.

$$\frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c}$$

gerechnet werden muß. Die Elemente von $\mathrm{PGL}(2, K)$, die $\infty$ festlassen, werden durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Auf $K \cup \{\infty\}$ operieren sie durch $x \mapsto ax + b$. Diese Matrizen bilden die Gruppe der affinen Transformationen der *affinen Geraden* $K$. Man sieht leicht, daß diese Gruppen kanonisch zu $K^+ \rtimes K^\bullet$ isomorph ist.

**Satz 5** *In einer Struktur von endlichem Morleyrang sei eine transitive Gruppe $G$ von Permutationen einer streng minimalen Menge $A$ definiert. Dann hat $G$ höchstens den Rang 3.*

*Wenn $G$ den Rang 1 hat, ist $G^0$ abelsch und operiert regulär auf $A$. Sonst ist in $G$ ein algebraisch abgeschlossener Körper $K$ definierbar und $(G, A)$ ist definierbar isomorph zu $(K^+ \rtimes K^\bullet, K)$ wenn der Rang von $G$ 2 ist, und isomorph zu $\big(\mathrm{PGL}(2), \mathbb{P}(K)\big)$, wenn der Rang 3 ist.*

Beweis:
Zwei Vorbemerkungen:

Jeder unendliche definierbare Normalteiler $N$ von $G$ operiert transitiv. Denn die $N^0$-Orbits werden von $G$ permutiert. Weil $A$ streng minimal ist, gibt es also nur einen Orbit oder alle $N^0$-Orbits sind endlich. Dieser Fall kann aber nur eintreten wenn $N^0 = 1$ ist, denn eine zusammenhängende Gruppe kann nur einelementige endliche Orbits haben.

$\mathrm{R}(\mathrm{Stab}(a)) = \mathrm{R}G - 1$. Denn zwischen $A$ und $G/\mathrm{Stab}(a)$ gibt es eine definierbare Bijektion und $\mathrm{R}(G/\mathrm{Stab}(a)) = \mathrm{R}G - 1$ folgt aus 8.3.

1. Fall: $\mathrm{R}(G) = 1$
Wir verwenden nur, daß $G^0$ abelsch ist. Nach der ersten Vorbemerkung ist $G^0$ transitiv. Wir betrachten nur noch die Operation von $G^0$ auf $A$. Wegen der Transitivität sind die Stabilisatoren aller Elemente von $A$ konjugiert. Weil $G^0$ aber abelsch ist, sind alle Stabilisatoren gleich. Also sind alle Stabilisatoren trivial[9], und $G^0$ operiert regulär.

2. Fall $\mathrm{R}(G) = 2$
$N$ sei die Kommutatorgruppe von $G^0$. $N$ ist ein definierbarer zusammenhängender Normalteiler von $G$. Weil $G^0$ auflösbar ist, hat $N$ höchstens den Rang 1. Wäre $G^0$ abelsch, würde $G^0$ regulär auf $A$ operieren und hätte so Rang 1. Also hat $N$ den Rang 1. Nach der Vorbemerkung ist $N$ transitiv.

Wir fixieren ein Element 0 von $A$ und nennen den Stabilisator von 0 $F$. Weil $N$ transitiv ist, ist $G = NF$. Der Fall 1 zeigt, daß $N$ regulär operiert. Wenn man nun $N$ und $A$ vermöge $n \mapsto n0$ identifiziert, entspricht der Operation von $f \in F$ auf $A$ der Konjugation von $N$ mit $f$: $fn0 = fnf^{-1}0$. Wenn wir 7.7 auf $(F^0, N)$ anwenden, erhalten wir einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K$ mit $K^\bullet = F^0$, sodaß die Konjugation $N$ mit Elementen von $F^0N$ zu einem eindimensionalen $K$-Vektorraum macht (siehe Beweis von Satz 4).

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, daß $F^0 = F$. Dazu brauchen wir ein Lemma:

**Lemma 6** *Eine Gruppe von Automorphismen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers, die in einer Struktur von endlichem Morleyrang definiert ist, ist trivial.*

Beweis von Lemma 6:
Sei $G$ die Gruppe und $K$ der Körper. Wenn $s \in G \setminus 1$, ist $\mathrm{R} = \mathrm{Fix}(s)$ ein echter Unterkörper von $K$. Der Beweis von 8.13 zeigt, daß $R$ endlich sein muß. $s$ hat also unendliche Ordnung. $\mathrm{Fix}(s^n)$ ist eine Erweiterung von $R$ vom Grad $n$. Wenn unsere Struktur $\omega$-saturiert ist - was wir annehmen können - finden wir nun leicht ein $t \in G$ dessen Fixkörper unendlich ist, aber verschieden von $K$. Widerspruch. □

Nun weiter im Beweis von 5, Fall 2:
Sei $g$ ein Element von $F$. Dann gibt die Konjugation mit $g$ einen Automorphismus der Vektorraumstruktur $(F^0, N)$. Nach Lemma 6 operiert $g$ trivial auf $F^0 = K^\bullet$. Also operiert $g$ auf $N$ $K$-linear, das heißt wie ein Element $f$ von $F$. $g$ und $f$ operieren also auch auf $A$ gleich, daher $g = f$.

[9] Beachte, daß $G$ treu operiert.

3. Fall $\mathrm{R}G = 3$
Wir schreiben für $\mathrm{Stab}(a)^0$ kurz $\mathrm{S}a$. $\mathrm{S}a$ hat Rang 2. Weil $A$ streng minimal und $\mathrm{Stab}(a)$ nichttrivial ist, zerlegt sich $A$ in eine endliche Menge $E$ und einen unendlichen Orbit $O$ von $\mathrm{Stab}(a)$. $\mathrm{S}a$ operiert trivial auf $E$, also treu auf $O$ und daher nach Fall 2 wie $K^+ \rtimes K^\bullet$ auf $K$, folglich scharf 2-fach transitiv. Darum haben alle $o \in O$ entweder alle gleiches $\mathrm{S}o$ oder alle verschiedenes $\mathrm{S}o$. Der erste Fall kann nicht eintreten, weil es dann zu *jedem* $b \in A$ unendlich viele $b'$ mit $\mathrm{S}b' = \mathrm{S}b$ geben müßte. Also sind alle $\mathrm{S}o$ ($o \in O$) verschieden und damit auch alle $\mathrm{S}b$ ($b \in A$). Für die $e \in E$ ist aber $\mathrm{S}e = \mathrm{S}a$. Es folgt $E = \{a\}$. $\mathrm{Stab}(a)$ operiert also auch treu auf $O$ und nach Fall 2 ist $\mathrm{Stab}(a) = \mathrm{S}a$. $G$ operiert also scharf 3-transitiv auf $A$.

Wir fixieren ein Element $\infty$ von $A$. $\mathrm{Stab}(\infty)$ operiert auf $A \setminus \{\infty\}$ wie $K^+ \rtimes K^\bullet$ auf $K$. Wir identifizieren $A$ mit $K \cup \{\infty\}$. $\mathrm{Stab}(\infty, 0)$ ist isomorph zu $K^\bullet$. Bei diesem Isomorphismus operiert jedes $g$, das $K^\bullet$ in sich abbildet und 1 fixiert, auf $K^\bullet$ wie durch Konjugation auf $\mathrm{Stab}(\infty, o)$. Sei nun $\tau$ ein Element von $G$, das 1 fixiert und 0 und $\infty$ vertauscht. $\tau$ ist dann ein Automorphismus von $K^\bullet$ der Ordnung 2 (denn $\tau^2$ fixiert drei Punkte, muß also $= 1$ sein.)

Ein definierbarer Automorphismus $t$ der Ordnung 2 einer minimalen abelschen Gruppe $H$ ist aber die Identität oder die Inversion. Der Ring der definierbaren Endomorphismen ist nämlich nullteilerfrei (siehe den Beweis von 7.7). Also folgt aus $(t+1)(t-1) = t^2 = 1$, daß $t = -1$ oder $t = 1$.

$\tau$ kann aber nicht identisch auf $K^\bullet$ operieren. Denn dann wäre $\tau$ eine Transposition von $A$. $G$ enthielte alle Transpositionen, folglich alle endlichen Permutationen und wäre nicht scharf 3–fach transitiv. Also operiert $\tau$ auf $K^\bullet$ als Inversion. Weil $\mathrm{PGL}(2, K)$ als Permutationsgruppe von $K \cup \{\infty\}$ von den affinen Transformationen aus $K^+ \rtimes K^\bullet$ und der Inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ erzeugt wird, ist $\mathrm{PGL}(2, K) \subset G$. Weil beide Gruppen scharf 3–transitiv sind, müssen sie gleich sein.

4. Fall $\mathrm{R}G > 3$
Wir wollen zeigen, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Wenn $a \in A$, operiert $\mathrm{Stab}(a)$ treu und transitiv auf einer koendlichen Teilmenge von $A$. Der Rang von $G$ ist dabei um eins kleiner geworden. Dieses Verfahren zeigt, daß wir $\mathrm{R}G = 4$ annehmen können.

Das gleiche Argument wie im Fall 3 (man verwendet jetzt Fall 3 statt Fall 2) zeigt, daß für jedes $a \in A$ $\mathrm{Stab}(a)$ auf $A \setminus \{a\}$ wie $\mathrm{PGL}(2, K)$ auf $\mathbb{P}(K)$ operiert. $G$ operiert also scharf 4–transitiv. Wir zerlegen $A$ als $K \cup \{\infty_1, \infty_2\}$. Wir wählen ein $\tau \in G$, das $0, 1$ fixiert und $\infty_1$ und $\infty_2$ vertauscht. Wie oben sieht man, daß $\tau$ eine Involution ist, die sowohl auf $K^+$ als auch auf $K^\bullet$ wie ein Automorphismus operiert, das ist nach Lemma 6 unmöglich. $\square$

**Satz 7** *Sei $G$ eine einfache Gruppe vom Rang 3. Wenn $G$ eine definierbare Untergruppe vom Rang 2 hat, ist in $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper definierbar und $G$ ist definierbar isomorph zu* $\mathrm{PGL}(2, K)$. *Sonst ist $G$ eine schlechte Gruppe.*

Beweis:
Sei $U$ eine definierbare Untergruppe vom Rang 2. Dann ist $A = G/U$ streng mi-

nimal und $G$ operiert durch Linksmultiplikation transitiv auf $A$. Wenn $g$ trivial auf $A$ operiert, liegt $g$ in allen Konjugierten von $U$. Weil $G$ einfach ist, operiert $G$ also treu und wir können Satz 5 anwenden.

Wenn es keine definierbare Untergruppen vom Rang 2 gibt, sind alle Borelgruppen von $G$ abelsch. □

**Bemerkung 8** *Jede unendliche Gruppe von endlichem Morleyrang enthält eine unendliche, abelsche definierbare Untergruppe.*

Beweis:
Wir können annehmen, daß $G$ zusammenhängend ist. Wenn das Zentrum $Z$ von $G^0$ unendlich sind, haben wir unsere Untergruppe gefunden. Sonst liefert Lemma 3 ein $a \in G \setminus Z$ mit unendlichem Zentralisator $\mathrm{C}(a)$. $\mathrm{C}(a)$ ist eine Gruppe von kleinerem Rang, die per Induktion eine unendliche, definierbare abelsche Untergruppe enthält. □

# Index

## Änderungen

Version 1: Frühjahr 91 (ChiWriter)

Version 2: April 97 (TEX)[10]. Es wurden kleinere Druckfehler beseitigt.

Version 3: 16. August 1997. Kleinere Druckfehler beseitigt. Layout verbessert.

Version 4: 7. August 1998. Die Definition einer affinen Varietät wurde korrigiert, Druckfehler verbessert und Formulierungen geändert. Ein Fehler im Beweis von Satz 5.7 wurde beseitigt. Auf Seite 32 wurde ein Beweis ausgeführt.

Dazu haben im Sommersemester 1998 die Teilnehmer unseres Seminars beigetragen: Christine Altseimer, Susanna Balfego, Matthias Clasen, Immanuel Herrmann, Bernhard Herwig, Bernd Kapp, Paul Koether, Ullrich Schmidt und Lars Stieber.

Version 5: 14. Februar 2002. Kleinere Druckfehler.

Version 6: 13. November 2003. J. Corredor hat mich auf eine Reihe von Druckfehlern aufmerksam gemacht.

Version 7: 15. Februar 2005. Kleine Druckfehler.

Version 8: 14. November 2006. Umformulierung der Summenformeln in 3.3 und davor nach einer Bemerkung von B. Link.

[10] Die ChiWriter Version ist wunderschön, das neue TEX-Kleid ist praktischer