Stabilitätstheorie

Freiburger Vorlesung gehalten von

Martin Ziegler

im Wintersemester 1988/1989

ausgearbeitet von Urs Kuenzi

revidiert von den Freiburger Modelltheoretikern
zuletzt im Juni 1993
letzte Änderung 1.7.96

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Das Monstermodell

T sei immer eine vollständige Theorie ohne endliche Modelle in einer Sprache erster Stufe L. Wir nehmen an, daß ein saturiertes Modell $\mathfrak{C}$ existiert, dessen zugrundeliegendes Universum eine echte Klasse ist. $\mathfrak{C}$ heißt *Monstermodell* für T; es hat folgende Eigenschaften:

(i) Jedes (Mengen–)Modell von T läßt sich elementar in $\mathfrak{C}$ einbetten.

(ii) Sind M und N Modelle von T mit $N \prec M$ und $N \prec \mathfrak{C}$, so läßt sich M elementar über N in $\mathfrak{C}$ einbetten.

(iii) Sei A eine Teilmenge von $\mathfrak{C}$, und seien a^I und b^I Folgen aus $\mathfrak{C}$ mit $\mathrm{tp}(a^I/A) = \mathrm{tp}(b^I/A)$, so existiert ein Automorphismus f von $\mathfrak{C}$ über A mit $f(a^I) = b^I$.

Aus diesen Eigenschaften folgt, daß wir nur noch Modelle betrachten müssen, die elementare Substrukturen von $\mathfrak{C}$ sind; ebenfalls brauchen wir als Parametermengen nur noch Teilmengen von $\mathfrak{C}$ zu betrachten. Wir können damit verschiedene Sachverhalte einfacher formulieren. Beispielsweise werden Primerweiterungen klassisch wie folgt definiert:

Das Modell M ist prim über $A \subset M$, wenn sich jede partielle elementare Einbettung $f_o : A \to N$ zu einer elementaren Einbettung $f : M \to N$ fortsetzen läßt.

Die $\mathfrak{C}$–Definition lautet wie folgt:

Das Modell M ist prim über $A \subset M$, wenn für alle $N \prec \mathfrak{C}$ mit $A \subset N$ ein A–Automorphismus f von $\mathfrak{C}$ existiert mit $f(M) \subset N$.

Das Monstermodell $\mathfrak{C}$ dient zur Vereinfachung der Formulierung der Sätze; es wird aber nicht wirklich gebraucht; in der Regel kann es durch ein ausreichend stark saturiertes Modell ersetzt werden. Mengentheoretisch kann $\mathfrak{C}$ in der Mengenlehre von Gödel–Bernays mit universeller Auswahl realisiert werden als Vereinigung einer elementaren Kette von (stark saturierten) Mengenmodellen. Diese Mengenlehre ist eine konservative Erweiterung von ZFC (siehe [2]). Eine andere Möglichkeit, das Monstermodell zu realisieren, besteht darin, die Existenz einer stark unerreichbaren Kardinalzahl $\kappa > |L|$ anzunehmen und dann für $\mathfrak{C}$ ein saturiertes Modell dieser Kardinalität zu nehmen.

Wenn nichts anderes vereinbart wird, so stehen M, N immer für Modelle, die elementare Substrukturen von $\mathfrak{C}$ sind, A,B,C für Teilmengen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$,$\mathfrak{E}$ für Teilklassen von $\mathfrak{C}^n$. Eine Teilklasse $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}^n$ heißt *definierbar* über der Parametermenge A (oder einfach A–definierbar), wenn es eine $L(A)$–Formel $\varphi(x_1, ..., x_n)$ gibt mit $\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{C}^n) := \{\overline{a} \in \mathfrak{C}^n \mid \varphi(\overline{a})\}$.

Falls A und B Parametermengen sind, so schreibt man AB statt $A \cup B$; ebenso schreibt man $A\overline{c}$ für $A \cup \{c_1, ..., c_n\}$, falls $\overline{c} = (c_1, ..., c_n)$.

Lemma 1.1 *Sei $\mathfrak{D}$ eine definierbare Teilklasse von $\mathfrak{C}^n$. $\mathfrak{D}$ ist genau dann A–definierbar, wenn jeder A–Automorphismus von $\mathfrak{C}$ die Klasse $\mathfrak{D}$ invariant läßt.*

Beweis A–definierbare Klassen sind trivialerweise invariant unter A–Automorphismen. Umgekehrt sei $\mathfrak{D}$ invariant unter A–Automorphismen und definierbar durch die Formel $\varphi(\overline{x}; \overline{b})$. Die Einschränkungsabbildung $r : S(A\overline{b}) \to S(A)$ ist stetig und surjektiv. Sei D die Menge aller Typen aus $S(A\overline{b})$, die die Formel $\varphi(\overline{x}; \overline{b})$ enthalten. Da $\mathfrak{D}$ unter A–Automorphismen invariant ist, sind

$r(D)$ und $r(S(A\overline{b}) \setminus D)$ disjunkt und somit clopen; folglich gibt es eine $L(A)$–Formel $\psi(\overline{x};\overline{a})$ mit $r(D) = \{p \in S(A) \mid \psi(\overline{x};\overline{a}) \in p\}$. Da $r(D)$ und $r(S(A\overline{b}) \setminus D)$ disjunkt sind, gilt dann auch $D = \{p \in S(A\overline{b}) \mid \psi(\overline{x};\overline{a}) \in p\}$, und somit wird $\mathfrak{D}$ durch $\psi(\overline{x};\overline{a})$ definiert. □

Ein Tupel $\overline{a}$ heißt *algebraisch* über A, wenn eine $L(A)$–Formel $\varphi(\overline{x})$ existiert, für die $\varphi(\overline{a})$ gilt und $\varphi(\mathfrak{C})$ endlich ist (φ ist *algebraisch*); $\overline{a}$ heißt *definierbar* über A, wenn $\{\overline{a}\}$ definierbar über A ist. Die Menge aller algebraischen Elemente über A heißt *algebraischer Abschluß* von A ($\mathrm{acl}(A)$), die Menge aller A–definierbaren Elemente heißt *definierbarer Abschluß* von A ($\mathrm{dcl}(A)$).

Lemma 1.2

(i) $\overline{a}$ ist genau dann algebraisch über A, wenn die Bahn von $\overline{a}$ unter $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ *endlich ist.*

(ii) $\overline{a}$ ist genau dann definierbar über A, wenn $\overline{a}$ invariant unter $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ *ist.*

Beweis (i) Daß die Bahnen algebraischer Elemente endlich sind, ist klar. Sei nun umgekehrt $\{\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n\}$ die Bahn von $\overline{a}$. Da endliche Mengen immer definierbar sind, ist diese Menge nach Lemma 1.1 definierbar über A.
(ii) wird genau gleich bewiesen. □

Eine Theorie läßt *Imaginärenelimination* zu, wenn alle $\emptyset$–definierbaren Äquivalenzrelationen E auf $\mathfrak{C}^n$ von der Form $\overline{x}E\overline{y} \leftrightarrow f_1(\overline{x}) = f_1(\overline{y}) \wedge ... \wedge f_m(\overline{x}) = f_m(\overline{y})$ sind, wo die f_i $\emptyset$–definierbare Funktionen sind. Die folgende Konstruktion ordnet einer beliebigen vollständigen Theorie eine Theorie in einer erweiterten mehrsortigen Sprache zu, die Imaginärenelimination zuläßt.

Sei R die Menge aller $\emptyset$–definierbarer Äquivalenzrelationen auf den $\mathfrak{C}^n$; für $E \in R$ sei $n(E)$ die Stelligkeit von E. $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ sei dann die mehrsortige Struktur $(\mathfrak{C}, (\mathfrak{C}^{n(E)}/E)_{E \in R})$, wobei $\mathfrak{C}^{n(E)}/E$ die Klasse aller Äquivalenzklassen von $\mathfrak{C}^{n(E)}$ bezüglich der Äquivalenzrelation E sei. Die dazugehörige Sprache L^{eq} bestehe aus der alten Sprache L, deren Symbole die erste Sorte betreffen und dort wie in $\mathfrak{C}$ interpretiert werden, sowie aus Funktionszeichen für die Projektionsabbildungen $\pi_E : \mathfrak{C}^{n(E)} \to \mathfrak{C}^{n(E)}/E$. Die L^{eq}–Theorie von $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ sei T^{eq}. Die Theorie T^{eq} bringt nichts wirklich Neues: die Modelle von T und von T^{eq} sind gegenseitig ineinander interpretierbar. Viele modelltheoretische Eigenschaften von T übertragen sich auf T^{eq}, z.B. Modellvollständigkeit, Kategorizität oder Stabilität.

T^{eq} läßt Imaginärenelimination zu: Sei E eine $\emptyset$–definierbare Äquivalenzrelation auf

$$\mathfrak{C}^n \times \mathfrak{C}^{n(E_1)}/E_1 \times ... \times \mathfrak{C}^{n(E_m)}/E_m;$$

dann ist auf $\mathfrak{C}^s$,wobei $s := n + n(E_1) + ... + n(E_m)$, die Äquivalenzrelation

$$(\overline{x}, \overline{x}_1, .., \overline{x}_m)E'(\overline{y}, \overline{y}_1, .., \overline{y}_m) :\Longleftrightarrow (\overline{x}, \pi_{E_1}(\overline{x}_1), .., \pi_{E_m}(\overline{x}_m))E(\overline{y}, \pi_{E_1}(\overline{y}_1), .., \pi_{E_m}(\overline{y}_m))$$

in $\mathfrak{C}$ $\emptyset$–definierbar, und somit gibt es eine in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ $\emptyset$–definierbare Abbildung

$$f : \mathfrak{C}^n \times \mathfrak{C}^{n(E_1)}/E_1 \times ... \times \mathfrak{C}^{n(E_m)}/E_m \to \mathfrak{C}^s/E',$$

so daß die Fasern dieser Abbildung gerade die Äquivalenzklassen von E sind.

Lemma 1.3 *Läßt eine Theorie Imaginärenelimination zu, so gibt es zu jeder definierbaren Klasse $\mathfrak{D}$ ein Tupel $\overline{a}$, für welches* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\overline{a})$ *gerade die Klasse aller Automorphismen ist, die $\mathfrak{D}$ auf sich abbilden. Dieses $\overline{a}$ heißt* kanonischer Parameter *für $\mathfrak{D}$ und ist bis auf Interdefinierbarkeit eindeutig bestimmt, das heißt, wenn $\overline{b}$ ein weiterer kanonischer Parameter ist, so gilt $\overline{a} \in \mathrm{dcl}(\overline{b})$ und $\overline{b} \in \mathrm{dcl}(\overline{a})$.*

Beweis Wenn $\overline{a}$ und $\overline{b}$ kanonische Parameter für $\mathfrak{D}$ sind, so gilt $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\overline{a}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\overline{b})$, $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind folglich nach Lemma 1.2 (ii) interdefinierbar.

Sei nun $\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{C}^n, \overline{c})$; durch $\overline{x}E\overline{y} :\Longleftrightarrow \forall \overline{z}(\varphi(\overline{z}, \overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{z}, \overline{y}))$ wird eine Äquivalenzrelation definiert über der leeren Menge, und es gibt folglich $\emptyset$–definierbare Funktionen $f_1, ..., f_m$ mit $\overline{x}E\overline{y} \leftrightarrow f_1(\overline{x}) = f_1(\overline{y}) \wedge ... \wedge f_m(\overline{x}) = f_m(\overline{y})$; $\overline{a} := (f_1(\overline{c}), ..., f_m(\overline{c}))$ ist dann der gesuchte Parameter, denn ein Automorphismus α von $\mathfrak{C}$ bildet $\mathfrak{D}$ genau dann auf sich ab, wenn $\overline{c}E\,\alpha(\overline{c})$. □

Es ist klar, daß man für kanonische Parameter in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ mit Elementen auskommt und keine Tupel benötigt.

Kapitel 2

Stabilität

Sei $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ eine Formel, und sei A eine Menge. Ein *partieller φ–Typ über A* ist eine Menge von Formeln der Form $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ oder $\neg\varphi(\overline{x};\overline{a})$ mit $\overline{a} \in A$. Ein *φ–Typ über A* ist ein maximaler konsistenter partieller φ–Typ über A. Die Menge aller φ–Typen über A wird mit $S_\varphi(A)$ bezeichnet. $S_\varphi(A)$ sei immer mit der booleschen Topologie versehen, in der die clopen Mengen gerade die Mengen der Form $\{p \in S_\varphi(A) \mid \psi(\overline{x}) \in p\}$ sind, wobei $\psi(\overline{x})$ eine boolesche Kombination von Formeln der Art $\varphi(x;\overline{a})$ sei $(\overline{a} \in A)$.

Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. T heißt *λ–stabil*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle Parametermengen A mit $|A| \leq \lambda$ auch $|S^n(A)| \leq \lambda$ gilt; T heißt *stabil*, wenn T λ–stabil für ein λ ist. T heißt *λ–stabil in $\varphi(\overline{x};\overline{y})$*, wenn für alle Para $|A| \leq \lambda$ auch $|S_\varphi(A)| \leq \lambda$ gilt; ebenso heißt T *stabil in φ*, wenn T λ–stabil in φ für ein λ ist. Ein φ -Typ $p \in S_\varphi(A)$ heißt *definierbar über C*, wenn eine Formel $d_p\overline{x}\,\varphi(\overline{x},\overline{y})$ mit Parametern aus C und freien Variablen $\overline{y}$ existiert, so daß für $\overline{a} \in A$ die Formel $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ genau dann zu p gehört, wenn $d_p\overline{x}\,\varphi(\overline{x},\overline{a})$ gilt; p heißt *definierbar*, wenn p über A definierbar ist.

Übung 2.1 Ist λ eine unendliche Kardinalzahl mit $|S^1(A)| \leq \lambda$ für alle Parametermengen A mit $|A| \leq \lambda$, so ist T λ–stabil.

Für eine Ordinalzahl α sei $\Gamma_\varphi(\alpha)$ die Menge $\{\varphi^{\eta(n)}(\overline{x}_\eta;\overline{y}_{\eta\restriction n}) \mid \eta \in {}^\alpha 2 \wedge n \in \alpha\}$, wobei $\varphi^0 := \varphi$ und $\varphi^1 := \neg\varphi$.

Lemma 2.1 *Für eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(i) T ist stabil in φ.

(ii) T ist λ–stabil in φ für alle unendlichen Kardinalzahlen λ.

(iii) $\Gamma_\varphi(\omega)$ ist inkonsistent.

(iv) Für jede Parametermenge A ist jeder φ–Typ aus $S_\varphi(A)$ definierbar, und zwar durch eine Formel der Form $\exists x_1 ... \exists x_r \Delta$, wobei Δ für eine boolesche Kombination von Formeln $\varphi(\overline{x}_i;\overline{y})$ und $\varphi(\overline{x}_i;\overline{a}_i)$ mit $\overline{a}_i \in A$ steht.

Beweis (ii)$\Rightarrow$(i) ist trivial.

(i)$\Rightarrow$(iii): Sei λ eine unendliche Kardinalzahl, und μ sei minimal mit $2^\mu > \lambda$. Falls $\Gamma_\varphi(\omega)$ konsistent ist, so ist aus Kompaktheitsgründen $\Gamma_\varphi(\mu)$ ebenfalls konsistent und könnte realisiert werden durch Tupel $\overline{a}_\eta (\eta \in {}^\mu 2)$ und $\overline{b}_\xi (\xi \in {}^{<\mu}2)$. Die Kardinalität der Menge $A := \{\overline{b}_\xi \mid \xi \in {}^{<\mu}2\}$ ist dann höchstens gleich λ. Da die φ–Typen der $\overline{a}_\eta$ über A paarweise verschieden sind, ist T folglich nicht λ–stabil in φ.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Sei $p \in S_\varphi(A)$. Da $\Gamma_\varphi(\omega)$ inkonsistent ist, existiert ein kleinstes $k < \omega$, für welches $G(k,p) := \Gamma_\varphi(k) \cup [\cup\{p(\overline{x}_\eta) \mid \eta \in {}^k 2\}]$ inkonsistent ist. Es gibt dann einen endlichen partiellen Typ $q \subset p$, für den $G(k,q)$ ebenfalls inkonsistent ist. Sei nun $\varphi(\overline{x};\overline{a}) \in p$; dann gilt $G(k-1, q \cup \{\varphi(\overline{x};\overline{a})\}) \subset G(k-1,p)$, und somit ist $G(k-1, q \cup \{\varphi(\overline{x};\overline{a})\})$ konsistent. Falls $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ nicht zu p gehört, so ist $G(k-1, q \cup \{\neg\varphi(\overline{x};\overline{a})\})$ konsistent; dann kann $G(k-1, q \cup \{\varphi(\overline{x};\overline{a})\})$ nicht ebenfalls konsistent sein, denn sonst wäre auch $G(k,q)$ konsistent. $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ gehört also genau dann zu p, wenn $G(k-1, q \cup \{\varphi(\overline{x},\overline{a})\})$ konsistent ist.

(iv)$\Rightarrow$(ii) ist klar, denn über einer unendlichen Menge A gibt es höchstens $|A|$ viele Möglichkeiten, einen φ–Typ in der in (iv) vorgeschriebenen Weise zu definieren. $\square$

Eine andere instruktive Möglichkeit, in Lemma 2.1 die Richtung (iii)$\Rightarrow$(ii) zu beweisen, geht wie folgt:

Sei T nicht λ–stabil in φ, und sei A eine Menge mit $|S_\varphi(A)| > \lambda \geq |A|$. Ein endlicher partieller φ–Typ q über A heißt groß, wenn die Kardinalität der Menge $q' := \{p \in S_\varphi(A) \mid q \subset p\}$ größer ist als λ. Sei K die Vereinigung aller q', wobei q alle endlichen partiellen φ–Typen über A durchlaufe, die nicht groß sind. Die Kardinalität von K ist höchstens λ; es gibt folglich zu jedem großen endlichen partiellen φ–Typ q Vervollständigungen q_1 und $q_2 \in S_\varphi(A)$, die nicht in K liegen. Es gibt dann ein Tupel $\overline{b}$ aus A mit $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in q_1$ und $\neg\varphi(\overline{x},\overline{b}) \in q_2$ (oder umgekehrt); folglich sind also sowohl $q \cup \{\varphi(\overline{x};\overline{b})\}$ als auch $q \cup \{\neg\varphi(\overline{x};\overline{b})\}$ groß. Daher lassen sich rekursiv über n solche Mengen $\{\overline{a}_\eta \mid \eta \in {}^n2\}$ von Tupeln aus A konstruieren, daß die Mengen $\{\varphi^{\eta(i)}(\overline{x};\overline{a}_{\eta\restriction i}) \mid i \leq n\}$ für alle $\eta \in {}^{n+1}2$ große endliche partielle φ–Typen sind. $\Gamma_\varphi(\omega)$ ist folglich konsistent. $\square$

Lemma 2.2 *T ist genau dann stabil, wenn T in allen Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$* (bzw $\varphi(x;\overline{y})$)

Beweis Ist T λ–stabil, so gilt für jede Menge A mit $|A| \leq \lambda$ auch $|S_\varphi(A)| \leq |S(A)| \leq \lambda$. Falls T λ–stabil ist in allen $\varphi(x;\overline{y})$, so gilt $|S(A)| \leq |\prod_\varphi S_\varphi(A)| \leq |A|^{|T|}$; T ist also λ–stabil für alle λ mit $\lambda = \lambda^{|T|}$. $\square$

Die Lemmas 2.1 und 2.2 besagen unter anderem, daß man Stabilität einer Theorie definieren kann, ohne Bezug auf Kardinalzahlen zu nehmen.

Für eine totalgeordnete Menge I sei $Ord_\varphi(I)$ die Menge $\{\varphi^{i<j}(\overline{x}_i;\overline{y}_j) \mid i,j \in I\}$, wobei $\varphi^{i<j} := \varphi$ für $i < j$ und $\varphi^{i<j} := \neg\varphi$ für $i \geq j$. Eine Formel φ besitze die *Ordnungseigenschaft* genau dann, wenn $Ord_\varphi(\omega)$ konsistent sei. $\tilde{\varphi}(\overline{x};\overline{y})$ sei $\varphi(\overline{y};\overline{x})$, die Rolle der beiden Parametertupel $\overline{x}$ und $\overline{y}$ soll also vertauscht werden.

Satz 2.3 *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

(i) T ist stabil in $\varphi(\overline{x};\overline{y})$

(ii) φ hat die Ordnungseigenschaft nicht.

(iii) T ist stabil in $\tilde{\varphi}(\overline{x};\overline{y})$.

Beweis Eine Formel φ besitzt aus Kompaktheitsgründen die Ordnungseigenschaft genau dann, wenn $Ord_\varphi(I)$ für eine beliebige unendliche geordnete Menge konsistent ist. Da $Ord_{\tilde{\varphi}}(\omega)$ genau dann konsistent ist, wenn $Ord_\varphi(\omega^*)$ konsistent ist, genügt es, die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen.

(i)$\Rightarrow$(ii): φ besitze die Ordnungseigenschaft; dann ist $Ord_\varphi(\mathbb{Q})$ konsistent und kann durch Tupel $\overline{a}_s, \overline{b}_s$ (wobei $s \in \mathbb{Q}$) realisiert werden. Über $A := \{\overline{b}_s \mid s \in \mathbb{Q}\}$ gibt es dann $2^{\aleph_0}$ viele verschiedene φ–Typen, denn die partiellen φ -Typen $p_r := \{\varphi^{r<s}(\overline{x};\overline{b}_s) \mid s \in \mathbb{Q}\}$ (wobei $r \in \mathbb{R}$) sind konsistent, aber paarweise inkonsistent.

(ii)$\Rightarrow$(i): Wenn T nicht stabil ist in φ, so existiert eine unendliche Menge A mit $|S_\varphi(A)| > |A|$; es gibt dann eine Menge C mit $|C| = |A|$, in der alle endlichen konsistenten partiellen φ–Typen über A realisiert sind. Aus Kardinalitätsgründen gibt es einen φ–Typ p aus $S_\varphi(A)$, der nicht definierbar ist durch eine boolesche Kombination von Formeln der Art $\varphi(\overline{c};\overline{y})$, wobei $\overline{c} \in C$. Es lassen sich dann rekursiv drei Folgen $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}A$, $(\overline{b}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}A$ und $(\overline{c}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}C$ wie folgt konstruieren:

Für $j < i$ seien $\overline{a}_j$, $\overline{b}_j$ und $\overline{c}_j$ schon definiert. Da p nicht definierbar ist durch boolesche Kombinationen von Formeln der Art $\varphi(\overline{c}_j;\overline{y})$ (wobei $j < i$), gibt es Tupel $\overline{a}_i \in A$ und $\overline{b}_i \in A$ mit $\varphi(\overline{x},\overline{a}_i) \in p$, $\neg\varphi(\overline{x},\overline{b}_i) \in p$ und

(#) $\varphi(\overline{c}_j;\overline{a}_i) \leftrightarrow \varphi(\overline{c}_j;\overline{b}_i)$ für $j < i$

Dann wähle man für $\overline{c}_i$ eine Realisierung von $p \restriction \{\overline{a}_0, \overline{b}_0, ..., \overline{a}_i, \overline{b}_i\}$.

Für $i \geq j$ gelten dann immer $\varphi(\overline{c}_i, \overline{a}_j)$ und $\neg\varphi(\overline{c}_i, \overline{b}_j)$. Für $i < j$ gilt $\varphi(\overline{c}_i, \overline{a}_j) \leftrightarrow \varphi(\overline{c}_i, \overline{b}_j)$. Aus dem Satz von Ramsey folgt, daß man o.B.d.A. annehmen kann, daß $\models \varphi(\overline{c}_i, \overline{a}_j)$ für $i < j$ immer wahr oder immer falsch ist. Im ersten Falle folgt $i < j \iff \models \varphi(\overline{c}_i, \overline{b}_j)$, und somit wird $Ord_\varphi(\omega)$ realisiert, im zweiten Falle folgt $i > j \iff \models \varphi(\overline{c}_i, \overline{a}_{j+1})$, und somit wird $Ord_\varphi(\omega^*)$ realisiert. □

Es folgt nun auch, daß eine Theorie T genau dann nicht stabil ist, wenn eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ und eine Folge $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren mit $\varphi(\overline{a}_i, \overline{a}_j) \iff i < j$.

Übung 2.2 Sei T stabil in $\varphi(\overline{x},\overline{y})$; jeder endliche partielle φ–Typ über A werde in C realisiert. Dann läßt sich jeder φ–Typ über A definieren durch eine positive boolesche Kombination von Formeln der Form $\varphi(\overline{c};\overline{y})$, $\overline{c} \in C$. (Hinweis: Ohne die Forderung „positiv" wurde das im obigen Beweis gezeigt; um Definierbarkeit durch positive boolesche Kombinationen zu erhalten, ersetze man in diesem Beweis die Forderung (#) durch $\varphi(\overline{c}_j;\overline{a}_i) \to \varphi(\overline{c}_j;\overline{b}_i)$ für $j < i$ und verwende das folgende kombinatorische Lemma: S ist genau dann eine positive boolesche Kombination aus den Mengen $A_1, ..., A_n$, wenn gilt: $\forall s \in S \forall t\, [\forall i \leq n\, (s \in A_i \to t \in A_i) \to t \in S]$.)

Übung 2.3 (Satz von Erdös–Makkai, ([1])) Sei $S \subset \mathcal{P}(A)$ mit $\aleph_1 \leq |A| < |S|$. Dann gibt es eine Teilmenge A_0 von A, für die $S \restriction A_0$ eine unendliche durch Inklusion totalgeordnete Menge enthält. (Hinweis: Analoger Beweis wie in Satz 2.3.)

Übung 2.4 Sei T stabil; dann gibt es zu jeder Menge A und zu jeder Formel $\varphi(x;\overline{b})$ (mit $\overline{b} \in \mathfrak{C}$) eine Formel $\psi(x;\overline{a})$ mit $\overline{a} \in A$ und $\varphi(A;\overline{b}) = \psi(A;\overline{a})$.

Übung 2.5 Sei T stabil, $p \in S(M)$ und $\varphi(\overline{x};\overline{m}) \in p$. Dann ist p die einzige Fortsetzung von $p \restriction (\varphi(M;\overline{m}) \cup \{\overline{m}\})$ auf M.

Satz 2.4 *T ist genau dann stabil, wenn jede unendliche Folge von Ordnungsindiscernibles eine Menge von totalen Indiscernibles ist*

Beweis Wenn T nicht stabil ist, so existieren eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ und eine Folge $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi(\overline{a}_i, \overline{a}_j) \iff i < j$; die Folge $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kann indiscernible gewählt werden, ist aber keine Menge von totalen Indiscernibles.

Sei nun $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ eine Folge von Ordnungsindiscernibles, die keine Menge von totalen Indiscernibles ist. Es gibt dann eine Formel $\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ und eine Permutation π von $\{1, ..., n\}$ mit $\models \varphi(\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n)$ und $\models \neg\varphi(\overline{a}_{\pi(1)}, ..., \overline{a}_{\pi(n)})$. Da die Permutationsgruppe von $\{1, ..., n\}$ erzeugt wird durch Vertauschungen benachbarter Zahlen, kann man o.B.d.A. annehmen, daß es ein i gibt mit $\models \neg\varphi(\overline{a}_1, ...\overline{a}_{i-1}, \overline{a}_{i+1}, \overline{a}_i, \overline{a}_{i+2}, ..., \overline{a}_n)$. Sei nun $I \subset \mathbb{Q}$ das Intervall $(i-1, i+2)$, sei $\overline{c}_s$ das Tupel $(\overline{a}_1, ..., \overline{a}_{i-1}, \overline{a}_s, \overline{a}_{i+2}, ..., \overline{a}_n)$ und sei $\psi(\overline{x};\overline{y}_1, ..., \overline{y}_{n-1})$ die Formel $\overline{x} \neq \overline{y}_i \wedge \varphi(\overline{y}_1, ..., \overline{y}_{i-1}, \overline{x}, \overline{y}_i, ..., \overline{y}_{n-1})$, so gilt für s, t aus I $s < t$ genau dann, wenn $\models \psi(\overline{a}_s;\overline{c}_t)$. Die Formel ψ hat daher die Ordnungseigenschaft, und somit ist T unstabil. □

Eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ hat die *starke Ordnungseigenschaft*, wenn es eine Folge $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\varphi(\mathfrak{C};\overline{a}_i) \subsetneq \varphi(\mathfrak{C};\overline{a}_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ hat die *Unabhängigkeitseigenschaft*, wenn es zwei Familien $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\overline{b}_j)_{j\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ gibt mit $\varphi(\overline{a}_i;\overline{b}_j) \iff i \in j$. Eine Theorie T hat die *starke Ordnungseigenschaft* beziehungsweise die *Unabhängigkeitseigenschaft*, wenn T eine Formel besitzt, die die starke Ordnungseigenschaft beziehungsweise die Unabhängigkeitseigenschaft hat. Falls T die starke Ordnungseigenschaft hat, so existiert eine Formel $\varphi(x;\overline{y})$ (x ist dabei eine einfache Variable und kein Tupel), die die starke Ordnungseigenschaft hat ([4]). Hat T die Unabhängigkeitseigenschaft, so existiert eine Formel $\varphi(x;\overline{y})$, die die Unabhängigkeitseigenschaft hat ([5]).

Übung 2.6 Die Theorie der randlosen dichten Ordnungen hat die strenge Ordnungseigenschaft, aber nicht die Unabhängigkeitseigenschaft.
(Hinweis: Man zeige, daß es zu einer Formel $\varphi(x_1, ...x_n;\overline{y})$ und zu einer endlichen Menge A höchstens $(2|A|+1)(2|A|+3)...(2|A|+2n-1)$ viele Typen gibt.)

Übung 2.7 (Shelah) L bestehe aus den beiden einstelligen Relationssymbolen U und M sowie aus dem zweistelligen Relationssymbol E. Die Theorie T werde axiomatisiert durch

$(A0)$ „es existieren unendlich viele Elemente"

$(A1)$ $\forall x(U(x) \leftrightarrow \neg M(x))$

(A2) $\forall x \forall y (xEy \to (U(x) \wedge M(y))$

$(A3_n)$ $\forall x_0..\forall x_n \forall y_0..\forall y_n[(\bigwedge_{i\leq n}(U(x_i) \wedge U(y_i)) \wedge \bigwedge_{i,j\leq n} x_i \neq y_j) \to \exists z \bigwedge_{i\leq n}(x_i E z \wedge \neg y_i E z)]$

$(A3'_n)$ $\forall x_0..\forall x_n \forall y_0..\forall y_n[(\bigwedge_{i\leq n}(M(x_i) \wedge M(y_i)) \wedge \bigwedge_{i,j\leq n} x_i \neq y_j) \to \exists z \bigwedge_{i\leq n}(z E x_i \wedge \neg z E y_i)]$.

T ist konsistent, vollständig, $\aleph_0$–kategorisch und läßt Quantorenelimination zu; T besitzt die Unabhängigkeitseigenschaft, aber nicht die starke Ordnungseigenschaft.

Übung 2.8 Die Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ besitzt die Unabhängigkeitseigenschaft genau dann, wenn $\tilde{\varphi}(\overline{x};\overline{y})$ die Unabhängigkeitseigenschaft besitzt. (Hinweis: Identifiziere $\mathbb{N}$ mit der Menge der Hauptultrafilter von $\mathbb{N}$.)

Satz 2.5 *T ist genau dann unstabil, wenn T die Unabhängigkeitseigenschaft oder die starke Ordnungseigenschaft hat.*

Beweis Sowohl aus der Unabhängigkeitseigenschaft als auch aus der starken Ordnungseigenschaft folgt unmittelbar, daß T nicht stabil ist.

Sei T nicht stabil; dann existiert eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ und Folgen $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ und $(\overline{b}_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ mit

$$\varphi(\overline{a}_i;\overline{b}_j) \iff i<j;$$

diese Folge kann indiscernible gewählt werden. Es soll nun angenommen werden, daß T die Unabhängigkeitseigenschaft nicht hat. Dann existieren aus Kompaktheitsgründen eine natürliche Zahl n und eine Menge $S\subset\{0,...,n-1\}$, so daß kein Tupel $\overline{b}$ existiert mit $\varphi(\overline{a}_i;\overline{b}) \iff i\in S$ für $i=0,...,n-1$. Aus der Wahl von φ folgt, daß S kein Anfangsstück von $\mathbb{N}$ ist. Es gibt dann eine Folge $S_0, S_1, .., S_r = S$ von Teilmengen von $\{0,...,n-1\}$, wobei S_0 ein Anfangsstück von $\mathbb{N}$ ist, alle S_j gleichviele Elemente besitzen und S_{j+1} aus S_j entsteht, indem man ein $m\in S_j$ durch $m+1$ ersetzt. Man wähle nun j so, daß ein $\overline{b}$ existiert mit $\varphi(\overline{a}_i;\overline{b}) \iff i\in S_j$, aber daß kein $\overline{b}$ existiert mit $\varphi(\overline{a}_i;\overline{b}) \iff i\in S_{j+1}$. Sei nun

$$U := S_j\cap S_{j+1}\ ,\ V:=\{0,1,...,n-1\}\setminus(S_j\cup S_{j+1}),$$

$$S_j = U\cup\{m\}\ ,\ S_{j+1} = U\cup\{m+1\}$$

und

$$\psi(\overline{y}) := \bigwedge_{i\in U}\varphi(\overline{a}_i;\overline{y}) \wedge \bigwedge_{i\in V}\neg\varphi(\overline{a}_i;\overline{y});$$

aus der Konstruktion von S und j folgt dann $\models \exists\overline{y}(\psi(\overline{y})\wedge\varphi(\overline{a}_m;\overline{y})\wedge\neg\varphi(\overline{a}_{m+1};\overline{y}))$ und $\models\neg\exists\overline{y}(\psi(\overline{y})\wedge\neg\varphi(\overline{a}_m;\overline{y})\wedge\varphi(\overline{a}_{m+1};\overline{y}))$. Für $\chi(\overline{x};\overline{y}) := \psi(\overline{y})\wedge\varphi(\overline{x};\overline{y})$ folgt daraus $\chi(\overline{a}_m;\mathfrak{C}) \supsetneqq \chi(\overline{a}_{m+1};\mathfrak{C})$. Da die Familie $(\overline{a}_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ indiscernible ist, gilt $\chi(\mathfrak{C};\overline{a}_i)\supsetneqq\chi(\mathfrak{C};\overline{a}_j)$ für beliebige i,j aus $\mathbb{Q}$ mit $m\leq i<j\leq m+1$. $\square$

Kapitel 3

Forking

Sei X ein kompakter, total unzusammenhängender topologischer Raum; die Mengen X_α (3)werden rekursiv für alle Ordinalzahlen wie folgt definiert:

$X_0 := X$

$X_{\alpha+1}$ sei die Menge aller Häufungspunkte von X_α.

$X_\lambda := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, falls λ eine Limesordinalzahl ist.

Der Cantor–Bendixon–Rang $CBR_X(x)$ von $x \in X$ ist die kleinste Ordinalzahl α mit $x \notin X_{\alpha+1}$, falls ein solches α existiert; falls so ein α nicht existiert, so setze man $CBR_X(x) := \infty$. Die X_α sind abgeschlossene Teilmengen von X. Sei U eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge von X; dann existiert $CBR_X(U) := Max\{CBR_X(x) \mid x \in U\}$ und wird Cantor–Bendixon–Rang von U genannt; der Cantor–Bendixon–Rang der leeren Menge sei –1. Der Cantor–Bendixon–Rang eines Elementes x ist gleich dem Minimum der Cantor–Bendixon–Ränge der clopen Mengen, die x enthalten.

Der Cantor–Bendixon–Grad einer abgeschlossenen Menge U mit $CBR_X(U) < \infty$ sei die Anzahl der Elemente von U mit maximalem Cantor–Bendixon–Rang und werde mit $CBD_X(U)$ bezeichnet. Es gilt dann $1 \leq CBD_X(U) < \aleph_0$ (falls $U \neq \emptyset$); für $CBR_X(U) = \infty$ setze man $CBD_X(U) := \infty$. $CBRD_X(U)$ sei das Paar $(CBR_X(U), CBD_X(U))$, wobei diese Paare lexikographisch angeordnet werden.

Der Cantor–Bendixon–Rang von clopen Mengen kann in der booleschen Algebra aller clopen Mengen bestimmt werden durch:

$CBR_X(A) \geq 0$, falls $A \neq \emptyset$;

$CBR_X(A) \geq \alpha+1$, falls eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten clopen nichtleeren Teilmengen von A existiert mit $CBR_X(A_i) \geq \alpha$;

für Limeszahlen λ gilt $CBR_X(A) \geq \lambda$, falls $CBR_X(A) \geq \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.

Ebenso ist der Cantor–Bendixon–Grad einer clopen Menge A die größte natürliche Zahl n, für welche es eine Partition von A in n clopen Teilmengen gibt, die alle den selben Cantor–Bendixon–Rang wie A haben.

Für beliebige abgeschlossene Teilmengen gibt es keine analoge Beschreibung des Cantor–Bendixon–Ranges; z.B. können einelementige Mengen durchaus einen Cantor–Bendixon–Rang haben, der größer als Null ist, obwohl sich diese Mengen nicht spalten lassen.

Die Berechnung des Cantor–Bendixon–Ranges und Grades einer abgeschlossenen Menge kann jedoch wie folgt auf clopen Mengen zurückgeführt werden: Sei U eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $CBR_X(U) = \alpha$; es gilt dann $U \cap X_{\alpha+1} = \emptyset$ und somit läßt sich U durch clopen Teilmengen von $X \setminus X_{\alpha+1}$ überdecken; aus der Kompaktheit von X folgt dann, daß es schon eine clopen Menge A gibt mit $U \subset A \subset X \setminus X_{\alpha+1}$. Es gilt dann natürlich $CBR_X(U) = CBR_X(A)$; $B_0 := (A \setminus U) \cap X_\alpha$ ist endlich, und es existiert folglich eine clopen Menge B mit $B_0 \subset B$ und $B \cap U = \emptyset$; $A \setminus B$ ist dann also eine clopen Obermenge von U mit $CBRD_X(U) = CBRD_X(A \setminus B)$.

X heißt *zerstreut*, wenn für alle $x \in X$ der Cantor–Bendixon–Rang kleiner als unendlich ist.

Lemma 3.1 *Ein Raum X ist genau dann zerstreut, wenn es keinen Binärbaum $\{X_\nu \mid \nu \in {}^{<\omega}2\}$ gibt, wobei die X_ν nichtleere clopen Teilmengen von X sind mit $X_\nu = X_{\nu 0} \dot\cup X_{\nu 1}$.*

Beweis Sei $\{X_\nu \mid \nu \in {}^{<\omega}2\}$ ein Binärbaum von clopen Mengen. Wäre dann $CBR_X(X_\emptyset) \neq \infty$, so gäbe es ein $\nu \in {}^{\omega}2$, so daß für jedes $n < \omega$ $CBRD_X(X_{\nu\restriction n}) > CBRD_X(X_{\nu\restriction n+1})$ gölte, was aber unmöglich ist.

Umgekehrt läßt sich jede clopen Menge mit unendlichem Rang in zwei clopen Teile zerlegen, die ebenfalls unendlichen Rang haben. □

Der *Morleyrang* $MR(p)$ eines partiellen Typs p wird definiert als Cantor–Bendixon–Rang der abgeschlossenen Teilklasse $\{\mathfrak{p} \in S^n(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{p} \supset p\}$ von $S^n(\mathfrak{C})$, der Morleygrad $MD(p)$ als Cantor–Bendixon–Grad von $\{\mathfrak{p} \in S^n(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{p} \supset p\}$; das Paar (MR(p),MD(p)) wird mit $MRD(p)$ bezeichnet. Falls $MR(p) < \infty$, so sagt man, daß der Morleyrang von p existiert. Da die Klassen der Form $\{\mathfrak{p} \in S^n(\mathfrak{C}) \mid \varphi \in \mathfrak{p}\}$ gerade die clopen Teilklassen von $S^n(\mathfrak{C})$ sind, gelten für einen Typ p und für eine $L(A)$–Formel $\psi(\overline{x})$ die Gleichungen $MRD(p) = \min(\{MRD(\varphi) \mid \varphi \in p\})$ und $MR(\psi(\overline{x})) = \max(\{MR(q) \mid \psi \in q \wedge q \in S^n(A)\})$. Für eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ hängt $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a}))$ nur vom Typ von $\overline{a}$ über der leeren Menge ab; die mengentheoretischen Schwierigkeiten bei der Definition von Morleyrängen und Morleygraden lassen sich so vermeiden.

Das folgende Lemma ist eine Übersetzung von Lemma 3.1 für Morleyränge.

Lemma 3.2 *Der Morleyrang einer $L(\mathfrak{C})$–Formel $\varphi(\overline{x})$ ist genau dann kleiner als ∞, wenn es keine Menge $\{\psi_\nu(\overline{x};\overline{y}) \mid \nu \in {}^{<\omega}2\}$ von Formeln gibt, für welche das System*

$$\{\varphi(\overline{x})\} \cup \{\psi_{\nu\restriction n}^{\nu(n)}(\overline{x};\overline{y}) \mid \nu \in {}^{\omega}2 \wedge n < \omega\}$$

konsistent ist; dabei sei $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ ein festes Variablentupel, $\overline{y}$ hingegen hänge von der Formel $\psi_\nu(\overline{x};\overline{y})$ ab, in der es steht. (Wie in Kapitel 2 sei $\psi^0 := \psi$ und $\psi^1 := \neg\psi$.)

□

Satz 3.3 *([3]) Existiert der Morleyrang einer Formel φ (oder eines Typs), so ist er kleiner als $|T|^+$.*

Beweis Sei $MR(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \geq |T|^+$; es sollen Formeln $\psi_\nu\ (\overline{x};\overline{y})(\nu \in {}^{<\omega}2)$ konstruiert werden, so daß für alle $k < \omega$ und für alle $\alpha < |T|^+$ Parameter $\overline{a}_\nu$ existieren mit

$$MR\left(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \bigwedge_{i<k} \psi_{\nu\restriction i}^{\nu(i)}(\overline{x};\overline{a}_{\nu\restriction i})\right) \geq \alpha$$

für alle $\nu \in {}^{k+1}2$. Seien die $\psi_\nu(\overline{x};\overline{y})$ für $\nu \in {}^{<k}2$ schon konstruiert. Für jedes $\alpha < |T|^+$ und für jedes $\mu \in {}^{k}2$ existieren dann Formeln $\chi_{\alpha,\mu}(\overline{x};\overline{y})$ und Parameter $\overline{a}_\mu$ mit $MR(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \bigwedge_{i<k} \psi_{\nu\restriction i}^{\nu(i)}(\overline{x};\overline{a}_{\nu\restriction i}) \wedge \chi_{\alpha,\nu\restriction k}^{\nu(k)}(\overline{x};\overline{a}_{\nu\restriction k})) \geq \alpha$ für alle $\nu \in {}^{k+1}2$. Man findet Formeln $\psi_\mu(\overline{x};\overline{y})$, für welche die Menge aller α mit $\psi_\mu(\overline{x};\overline{y}) = \chi_{\alpha,\mu}(\overline{x};\overline{y})$ kofinal in $|T|^+$ ist. Für diese Formeln gilt die Induktionsbedingung ebenfalls, und aus Lemma 3.2 folgt somit $MR(\varphi(\overline{x};\overline{a})) = \infty$. □

Eine Theorie heißt *total transzendent*, wenn der Morleyrang aller Formeln existiert. Für abzählbare Theorien besagt der folgende Satz, daß eine Theorie genau dann total transzendent ist, wenn sie ω–stabil ist.

Satz 3.4

(i) Sei T total transzendent; dann ist T λ–stabil für alle $\lambda \geq |T|$.

(ii) Falls T ω–stabil ist, so ist T total transzendent.

Beweis Sei $p \in S^n(A)$ ein Typ und $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ eine Formel aus p mit $MRD(p) = MRD(\varphi)$; dann ist eine $L(A)$–Formel $\psi(\overline{x})$ genau dann in p, wenn $MRD(\psi(\overline{x}) \wedge \varphi(\overline{x};\overline{a})) = MRD(p)$. Eine Abbildung, die jedem $p \in S^n(A)$ eine Formel $\varphi(\overline{x})$ aus p mit $MRD(p) = MRD(\varphi(\overline{x}))$ zuordnet, ist also eine Injektion von $S^n(A)$ in die Menge der $L(A)$–Formeln, und somit gilt $|S^n(A)| \leq |A| + |T|$.

Damit ist (i) gezeigt, und (ii) folgt unmittelbar aus Lemma 3.2. □

Übung 3.1 Man zeige, daß es zu jeder Kardinalzahl κ und zu jeder Ordinalzahl $\lambda < \kappa^+$ eine total transzendente Theorie gibt mit $|T| = \kappa$ und $MR(x = x) = \lambda$. (Hinweis: L enthalte für jede Ordinalzahl $\alpha < \omega^\lambda$ ein einstelliges Prädikat P_α; T werde axiomatisiert durch $\forall x \neg P_0(x)$, $\forall x(P_\alpha(x) \to P_\beta(x))$ und $\exists! x(P_{\alpha+1}(x) \wedge \neg P_\alpha(x))$ für alle $\alpha < \beta < \omega^\lambda$.)

Übung 3.2 Man zeige, daß es zu jeder Kardinalzahl κ eine Theorie T gibt mit $|T| = \kappa$, und zu jeder Ordinalzahl $\lambda < |T|^+$ existiert eine Formel mit Morleyrang λ. (Hinweis: T sei die Theorie einer Struktur, die durch disjunkte Vereinigung von Strukturen aus Übung 3.1 entsteht.)

Übung 3.3 Eine Theorie T ist genau dann total transzendent, wenn alle Redukte von T auf abzählbare Teilsprachen total transzendent sind.

Übung 3.4 Falls $S^1(\mathfrak{C})$ zerstreut ist, so ist T total transzendent. (Hinweis: Man verwende Satz 3.4 und Übung 3.3.)

Sei $p \in S(A)$ und $B \supset A$; für jede Erweiterung q von p auf B gilt dann $MR(p) \geq MR(q)$; ferner gibt es immer Erweiterungen q von p auf B mit $MR(p) = MR(q)$, und zwar höchstens $MD(p)$ viele, falls p einen Morleyrang besitzt. Um solche ausgezeichneten Erweiterungen auch für Typen ohne Morleyrang definieren zu können, werden nun *lokale Ränge* eingeführt.

Sei $\Delta = \{\varphi_1(\overline{x};\overline{y}_1), ..., \varphi_n(\overline{x};\overline{y}_n)\}$ eine endliche Menge von Formeln; eine $\Delta(A)$–Formel ist dann eine Formel der Form $\varphi_i(\overline{x};\overline{a})$ oder $\neg\varphi_i(\overline{x};\overline{a})$, wobei $\overline{a} \in A$. Ein Δ–Typ über A ist eine maximale konsistente Menge von $\Delta(A)$–Formeln; die Menge aller Δ–Typen über A sei $S_\Delta(A)$. Das System aller Mengen $\{p \in S_\Delta(A) \mid \psi \in p\}$, wobei ψ über alle $\Delta(A)$–Formeln laufe, ist eine Subbasis für eine kompakte, total unzusammenhängende Topologie auf $S_\Delta(A)$, und die clopen Teilmengen sind gerade die booleschen Kombinationen dieser Mengen. Für eine beliebige $L(A)$–Formel $\psi(\overline{x})$ ist $\{p \in S_\Delta(A) \mid p \cup \{\psi\}$ ist konsistent $\}$ abgeschlossen, aber im allgemeinen nicht offen. Besteht Δ aus nur einer Formel φ, so sind die Δ–Typen gerade die φ–Typen.

Übung 3.5 Zu jedem Δ gibt es eine Formel ψ, so daß für jede Menge A, die mindestens zwei Elemente besitzt, sowohl durch boolesche Kombinationen von $\Delta(A)$–Formeln als auch durch boolesche Kombinationen von $\{\psi\}(A)$–Formeln dieselben Mengen definierbar sind. Es gibt dann folglich eine Bijektion $\alpha : S_\Delta(A) \to S_\psi(A)$ mit $p(\mathfrak{C}) = (\alpha(p))(\mathfrak{C})$ für alle $p \in S_\Delta(A)$.

Der Δ-*Rang* $R_\Delta(p)$ eines partiellen Typs p sei der Cantor–Bendixon–Rang der Menge

$$\{\mathfrak{p} \in S_\Delta(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{p} \cup p \text{ ist konsistent}\}$$

in $S_\Delta(\mathfrak{C})$, und der Δ-*Grad* $D_\Delta(p)$ sei der Cantor–Bendixon–Grad dieser Menge. Das Paar

$$(R_\Delta(p), D_\Delta(p))$$

wird mit $RD_\Delta(p)$ bezeichnet.

Satz 3.5 *Die folgenden drei Aussagen sind für eine Theorie T äquivalent:*

(i) T ist stabil;

(ii) $R_\Delta(\varphi) < \infty$ für alle φ und für alle (endlichen) Δ;

(iii) $R_\Delta(\varphi) < \omega$ für alle φ und für alle (endlichen) Δ.

Beweis

(iii)$\Rightarrow$(ii) ist trivial; sei T instabil; dann gibt es eine Formel $\psi(\overline{x};\overline{y})$ für welche das System $\Gamma_\psi(\omega)$ aus Lemma 2.1 konsistent ist; aus Lemma 3.1 folgt dann $R_\psi(\overline{x} = \overline{x}) = \infty$; somit folgt (i) aus (ii).

Sei nun $R_\Delta(\varphi) \geq \omega$; dann ist auch $R_\Delta(\overline{x} = \overline{x}) \geq \omega$, und man darf nach Übung 3.5 o.B.d.A. voraussetzen, daß $\Delta = \{\psi(\overline{x};\overline{y})\}$. Für jede boolesche Kombination $\chi(\overline{x})$ von Formeln $\psi(\overline{x};\overline{a}_i)$ mit $R_\Delta(\chi) \geq n+1$ gibt es ein $\overline{a}$ mit $R_\Delta(\psi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \chi(\overline{x})) \geq n$ und $R_\Delta(\neg\psi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \chi(\overline{x})) \geq n$. $\Gamma_\psi(m)$ ist folglich konsistent für alle $m \in \mathbb{N}$, und somit ist T instabil. □

Übung 3.6 Es gibt eine stabile Theorie, in welcher es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Δ gibt mit $R_\Delta(\overline{x} = \overline{x}) = n$. Ebenso gibt es eine unstabile Theorie, in welcher es ein Δ gibt, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ existiert mit $R_\Delta(\varphi) = n$.

Der folgende Satz besagt, daß man die Morleyränge und Δ–Ränge (sowie auch die entsprechenden Grade) schon in $\aleph_0$–saturierten Modellen berechnen kann: Dabei verwende man für eine Menge A und für eine $L(A)$–Formel φ die folgenden Definitionen:

$$CBRD_A(\varphi) := CBRD_{S^n(A)}(\{p \in S^n(A) \ \wedge \ \varphi \in p\})$$

und

$$CBRD_{\Delta(A)}(\varphi) := CBRD_{S_\Delta(A)}(\{p \in S_\Delta(A) \ \wedge \ p \cup \{\varphi\} \text{ist konsistent}\})$$

Satz 3.6 *Sei M ein $\aleph_0$–saturiertes Modell, und sei $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ eine $L(M)$–Formel. Dann gelten*

$$MRD(\varphi) = CBRD_M(\varphi)$$

und

$$RD_\Delta(\varphi) = CBRD_{\Delta(M)}(\varphi).$$

Beweis Durch Induktion soll zuerst gezeigt werden, daß aus

$$MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \geq (\alpha, n)$$

auch $CBRD_M(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \geq (\alpha, n)$ folgt; für $n = 1$ ist der Induktionsschluß leicht zu zeigen. Sei nun $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \geq (\alpha, n+1)$; dann existiert eine Formel $\psi(\overline{x};\overline{b})$ mit $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x};\overline{b})) \geq (\alpha, n)$ und $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x};\overline{b})) \geq (\alpha, 1)$. Wähle nun $\overline{c}$ aus M mit $\mathrm{tp}(\overline{c}/\overline{a}) = \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$; da der Morleyrang und der Morleygrad nur vom Typ der auftauchenden Parameter abhängen, folgt $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x};\overline{c})) \geq (\alpha, n)$ und $MRD(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \wedge \neg\psi(\overline{x};\overline{c})) \geq (\alpha, 1)$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann $CBRD_M(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \psi(\overline{x};\overline{c})) \geq (\alpha, n)$ und $CBRD_M(\varphi(\overline{x};\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x};\overline{c})) \geq (\alpha, 1)$, woraus $CBRD_M(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \geq (\alpha, n+1)$ folgt. Es folgt $MRD(\varphi) \leq CBRD_M(\varphi)$. Da die umgekehrte Ungleichung sogar für beliebige M gilt, wie leicht zu zeigen ist, gilt sogar Gleichheit. Auf die gleiche Art und Weise beweist man $RD_\Delta(\varphi) = CBRD_{\Delta(M)}(\varphi)$, falls φ eine boolesche Kombination von $\Delta(M)$–Formeln ist.

Sei nun $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ eine beliebige Formel. Aus den am Anfang dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen über den Cantor–Bendixon–Rang folgt, daß man die Ränge für φ nicht direkt in der obigen Art und Weise bestimmen kann, da die Menge aller mit φ konsistenten Δ–Typen zwar abgeschlossen, aber im allgemeinen nicht clopen ist. Es gibt aber eine Formel $\psi(\overline{x};\overline{b})$, die eine boolesche Kombination von $\Delta(\mathfrak{C})$–Formeln ist, mit $\models \varphi(\overline{x};\overline{a}) \to \psi(\overline{x};\overline{b})$ und $RD_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{a})) = RD_\Delta(\psi(\overline{x};\overline{b}))$, denn zu jeder abgeschlossenen Teilmenge U eines kompakten, total unzusammenhängenden Raumes X gibt es eine clopen Menge A mit $U \subset A$ und $CBRD_X(U) = CBRD_X(A)$. Da M $\aleph_0$–saturiert ist, kann man wieder o.B.d.A. annehmen, daß $\overline{b}$ in M liegt, und es gilt folglich $RD_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{a})) = RD_\Delta(\psi(\overline{x};\overline{b})) = CBRD_{\Delta(M)}(\psi(\overline{x};\overline{b})) \geq CBRD_{\Delta(M)}(\varphi(\overline{x};\overline{a}))$. Ebenso läßt sich $RD_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \leq CBRD_{\Delta(M)}(\varphi(\overline{x};\overline{a}))$ beweisen. □

Seien $A \subset B, p \in S^n(A)$, $q \in S^n(B)$ und $p \subset q$; dann gilt $RD_\Delta(p) \geq RD_\Delta(q)$ für alle Δ.

Definition: q heißt *nichtforkende Erweiterung* von p (bzw q forkt nicht über A), wenn $R_\Delta(p) = R_\Delta(q)$ für alle endlichen Formelmengen Δ gilt.

Ein I-Typ über einer Parametermenge A ist eine maximale konsistente Menge von $L(A)$–Formeln mit freien Variablen $(x_i)_{i \in I}$ (die Mächtigkeit von I ist beliebig). Δ–Ränge und der Forkingbegriff werden für I-Typen wie oben definiert. Der I-Typ $\mathrm{tp}(\overline{a}/C)$ eines (unendlich langen) Tupels $\overline{a} = (a_i)_{i \in I}$ forkt genau dann nicht über $B \subset C$, wenn für alle endlichen Teiltupel $\overline{a}'$ von $\overline{a}$ der Typ $\mathrm{tp}(\overline{a}'/C)$ über B nicht forkt. Soweit nichts anderes erwähnt wird, gelten die folgenden Sätze auch für I-Typen.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß für stabile Theorien nichtforkende Erweiterungen von $p \in S(A)$ auf $B \supset A$ immer existieren und daß sie eindeutig sind, falls A in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Übung 3.7 Sei $\mathfrak{D}$ eine definierbare Klasse, und sei A eine Menge; dann sind äquivalent:

(i) Über A gibt es nur endlich viele Konjugierte von $\mathfrak{D}$;

(ii) es gibt eine über A definierbare Äquivalenzrelation mit nur endlich vielen Äquivalenzklassen, und $\mathfrak{D}$ ist eine Vereinigung solcher Äquivalenzklassen;

(iii) $\mathfrak{D}$ ist definierbar über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

(iv) $\mathfrak{D}$ ist über allen Modellen definierbar, die A enthalten.

(Hinweis für (iv): $\mathrm{acl}(A)$ ist der Durchschnitt aller Modelle, die A enthalten.)

Lemma 3.7 *Sei T stabil, und sei $p \in S^n(A)$ und Δ fest; es gibt dann globale Erweiterungen $\mathfrak{p} \in S^n(\mathfrak{C})$ von p mit $R_\Delta(p) = R_\Delta(\mathfrak{p})$; für $\mathfrak{p} \upharpoonright \Delta$ gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, und alle diese $\mathfrak{p} \upharpoonright \Delta$ sind über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar.*

Beweis Aus der Definition von R_Δ und D_Δ folgt unmittelbar, daß solche globalen Erweiterungen $\mathfrak{p}$ existieren und daß es für die Anzahl der dazugehörigen Einschränkungen $\mathfrak{p} \upharpoonright \Delta$ genau $D_\Delta(p)$ viele Möglichkeiten gibt. Sei nun $\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \Delta$; da T stabil ist, ist $\mathfrak{p}$ definierbar. $d_\mathfrak{p}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y})$ sei eine definierende Formel für die Klasse $\mathfrak{D}$ der $\overline{a}$ mit $\varphi(\overline{x};\overline{a}) \in \mathfrak{p}$; da es für $\mathfrak{p} \upharpoonright \Delta$ nur endlich viele Möglichkeiten gibt, besitzt $\mathfrak{D}$ nur endlich viele Konjugierte über A und ist folglich nach Übung 3.7 über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar. □

Lemma 3.8 *Jedes beliebige $p \in S^n(\mathrm{acl}(A))$ forkt nicht über A.*

Beweis Zu jedem Δ gibt es ein $q \in S^n(\mathrm{acl}(A))$ mit $p \upharpoonright A = q \upharpoonright A$ und $R_\Delta(q) = R_\Delta(q \upharpoonright A)$; aber p und q sind über A konjugiert, folglich gilt $R_\Delta(p) = R_\Delta(q) = R_\Delta(p \upharpoonright A)$. □

Lemma 3.9 *(Harrington) T sei stabil, $\mathfrak{p}(\overline{x})$ und $\mathfrak{q}(\overline{y})$ seien globale Typen und $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ eine Formel. Dann gilt $d_\mathfrak{p}\overline{x}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{q}$ genau dann, wenn $d_\mathfrak{q}\overline{y}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{p}$ gilt.*

Beweis Wenn das Lemma falsch wäre, so gölte z.B. $d_\mathfrak{p}\overline{x}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{q}$ und $d_\mathfrak{q}\overline{y}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \notin \mathfrak{p}$. A sei eine Menge, die die Parameter von $d_\mathfrak{p}\overline{x}\,\varphi(\overline{x};\overline{y})$ und von $d_\mathfrak{q}\overline{y}\,\varphi(\overline{x};\overline{y})$ enthalte. Man konstruiere zwei Folgen $(\overline{a}_n)_{n<\omega}$ und $(\overline{b}_n)_{n<\omega}$, mit $\overline{a}_n \models \mathfrak{p} \upharpoonright A \cup \{\overline{b}_i \mid i < n\}$ und $\overline{b}_n \models \mathfrak{q} \upharpoonright A \cup \{\overline{a}_i \mid i \leq n\}$. Aus $d_\mathfrak{p}\overline{x}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{q}$ folgt dann $\models d_\mathfrak{p}\overline{x}\,\varphi(\overline{x};\overline{b}_n)$, und somit gilt $\varphi(\overline{x};\overline{b}_n) \in \mathfrak{p}$, woraus $\models \varphi(\overline{a}_m,\overline{b}_n)$ folgt für $m > n$; aus $d_\mathfrak{q}\overline{y}\,\varphi(\overline{x};\overline{y}) \notin \mathfrak{p}$ folgt $\models \neg d_\mathfrak{q}\overline{y}\,\varphi(\overline{a}_m;\overline{y})$, und somit $\neg\varphi(\overline{a}_m;\overline{y}) \in \mathfrak{q}$, woraus $\models \neg\varphi(\overline{a}_m,\overline{b}_n)$ folgt für $m \leq n$; das bedeutet jedoch, daß die Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ die Ordnungseigenschaft hat, was der Stabilität von T widerspricht. □

Korollar 3.10 *T sei stabil, A sei in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen, $p \in S^n(A)$ sei ein Typ, und $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ sei eine Formel; falls dann $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ globale Fortsetzungen von p sind, für die $\mathfrak{p}_1 \upharpoonright \varphi$ und $\mathfrak{p}_2 \upharpoonright \varphi$ über A definierbar sind, so gilt $\mathfrak{p}_1 \upharpoonright \varphi = \mathfrak{p}_2 \upharpoonright \varphi$.*

Beweis Sei $\overline{a}$ ein Tupel, das gleich lang wie $\overline{y}$ sei, und $\mathfrak{q}(\overline{y})$ sei eine globale Erweiterung von $\mathrm{tp}(\overline{a}/A)$, für die $d_\mathfrak{q}\overline{y}\varphi(\overline{x};\overline{y})$ über A definierbar sei. Dann liegt $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ genau dann in $\mathfrak{p}_i$, wenn $\models d_{\mathfrak{p}_i}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{a})$; das ist aber äquivalent zu $d_{\mathfrak{p}_i}\overline{x}\varphi(\overline{x},\overline{y}) \in \mathfrak{q}$ und somit nach Lemma 3.9 auch zu $d_\mathfrak{q}\overline{y}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{p}_i$; da $d_\mathfrak{q}\overline{y}\varphi(\overline{x};\overline{y})$ über A definierbar ist, ist letzteres auch äquivalent zu $d_\mathfrak{q}\overline{y}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in p$; $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ gehört also genau dann zu $\mathfrak{p}_1$, wenn $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ zu $\mathfrak{p}_2$ gehört. □

Satz 3.11 *Sei T stabil, $p \in S(A)$ und $A \subset B$; dann gelten:*

(i) Es gibt nichtforkende Erweiterungen von p auf B.

(ii) Ist A in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen, so gibt es genau eine nichtforkende Erweiterung von p auf B; statt $A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ genügt es zu fordern, daß $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

(iii) Eine globaler Typ $\mathfrak{p}$ forkt genau dann nicht über A, wenn er über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar ist.

Beweis (i): Nach Lemma 3.8 darf man o.B.d.A. voraussetzen, daß A in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen ist; da die Δ–Ränge monoton sind, darf man ebenfalls $B = \mathfrak{C}$ voraussetzen. Zu jedem Δ gibt es dann einen mit p verträglichen globalen Δ -Typ $\mathfrak{p}^{\Delta}$ mit $R_{\Delta}(p) = R_{\Delta}(\mathfrak{p}^{\Delta})$. Nach Lemma 3.7 ist $\mathfrak{p}^{\Delta}$ über A definierbar und nach Korollar 3.10 eindeutig bestimmt. Sei $\Delta_1 \subset \Delta_2$; dann ist $\mathfrak{p}^{\Delta_2} \upharpoonright \Delta_1$ auch definierbar über A, und somit folgt $\mathfrak{p}^{\Delta_1} = \mathfrak{p}^{\Delta_2} \upharpoonright \Delta_1 \subset \mathfrak{p}^{\Delta_2}$. p sei nun die Vereinigung aller $\mathfrak{p}^{\Delta}$; $\mathfrak{p}$ ist dann ein globaler Typ, der über A nicht forkt.

(ii): Falls $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ gilt, so läßt sich p eindeutig auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ fortsetzen. Nach Lemma 3.7 und Korollar 3.10 gibt es nur eine nichtforkende globale Erweiterung von p. Im allgemeinen ist eine nichtforkende Erweiterung $q \in S^n(B)$ von p von der Form $q = \mathfrak{p} \upharpoonright B$, wobei $\mathfrak{p}$ die eindeutig bestimmte globale nichtforkende Erweiterung von p ist.

(iii) Nichtforkende Erweiterungen sind nach Lemma 3.7 definierbar über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Sei nun $\mathfrak{q}$ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar; dann ist $\mathfrak{q}$ nach Korollar 3.10 gleich der eindeutig bestimmten globalen nichtforkenden Erweiterung von $\mathfrak{q} \upharpoonright \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. □

Ein Typ p heißt *stationär*, wenn er genau eine nichtforkende globale Erweiterung $\mathfrak{p}$ besitzt; die Einschränkung von $\mathfrak{p}$ auf eine Menge A wird dann mit $p|A$ bezeichnet.

Übung 3.8 Ein globaler Typ $\mathfrak{p}$ ist über einer Menge A genau dann definierbar, wenn $\mathfrak{p}$ über A nicht forkt und wenn $\mathfrak{p} \upharpoonright A$ stationär ist.

Übung 3.9 Sei $p \in S(M)$ ein Typ und $\varphi(x; \overline{m})$ eine Formel aus p. Dann forkt p nicht über $\varphi(M; \overline{m})$.

Kapitel 4

Eigenschaften des Forking

In diesem Abschnitt sei T immer eine stabile Theorie. Es werden vorerst einige einfache Eigenschaften des Forking angegeben. Unmittelbar aus den Definitionen folgt:

Satz 4.1 (Transitivität und Monotonie) *Sei $A \subset B \subset C$ und sei $p \in S(C)$; p forkt genau dann nicht über A, wenn p über B nicht forkt und $p \upharpoonright B$ über A nicht forkt.*

□

Satz 4.2 (Algebraischer Abschluß) *(i) $p \in S(\mathrm{acl}(A))$ forkt nicht über A.*

(ii) Falls $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{a})$ über A nicht forkt, so liegt $\overline{a}$ in $\mathrm{acl}(A)$.

Beweis (i) ist Lemma 3.8.

(ii): Sei $\Delta := \{\overline{x} = \overline{y}\}$; wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{a})$ über A nicht forkt, so gilt $0 = R_\Delta(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{a})) = R_\Delta(\mathrm{tp}(\overline{a}/A))$. Sei $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/A)$ mit $R_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{b})) = R_\Delta(\mathrm{tp}(\overline{a}/A)) = 0$; $\varphi(\mathfrak{C};\overline{b})$ ist folglich endlich, und somit ist $\overline{a}$ algebraisch über A. □

Satz 4.3 (Stetigkeit) *(i) Sei $p \in S(A)$; dann existiert eine Teilmenge B von A mit $|B| \leq |T|$, so daß p über B nicht forkt. Falls p ein I-Typ ist, so existiert ein B mit $|B| \leq |T| + |I|$.)*

(ii) Sei $A \subset B$ und sei $p \in S(B)$; p forkt genau dann über A, wenn eine endliche Teilmenge B_0 von B existiert, so daß $p \upharpoonright AB_0$ über A forkt.

Beweis (i): Man wähle für jedes endliche Δ eine Formel $\varphi_\Delta(\overline{x}) \in p$ mit $R_\Delta(\varphi_\Delta(\overline{x})) = R_\Delta(p)$; B sei die Menge aller Parameter, die in den Formeln φ_Δ auftauchen; dann forkt p nicht über B, und es gilt $|B| \leq |T|$.

(ii): Wenn p über A forkt, so gibt es ein endliches Δ mit $R_\Delta(p) < R_\Delta(p \upharpoonright A)$. Sei $\varphi(\overline{x}) \in p$ mit $R_\Delta(\varphi(\overline{x})) = R_\Delta(p)$; für jede Teilmenge B_0 von B, die die Parameter aus $\varphi(\overline{x})$ enthält, forkt $p \upharpoonright AB_0$ über A. □

Satz 4.4 (Konjugiertheit) *Sei $p \in S^I(A)$; dann sind alle nichtforkenden Erweiterungen von p auf $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ konjugiert.*

Beweis Sei $\mathfrak{p}$ eine nichtforkende Fortsetzung von p auf $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. $\mathfrak{p}$ ist dann durch $\mathfrak{p} \upharpoonright \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ eindeutig bestimmt; da alle Erweiterungen von p auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ konjugiert sind, sind auch alle nichtforkenden globalen Erweiterungen von p konjugiert. □

Die *Multiplizität* eines Typs p sei die Zahl aller nichtforkenden globalen Fortsetzungen von p, und sie werde mit $\mathrm{mult}(p)$ bezeichnet.

Satz 4.5 (Beschränktheit) *Für $p \in S(A)$ gilt $\mathrm{mult}(p) \leq 2^{|T|}$. (Für I–Typen gilt $\mathrm{mult}(p) \leq 2^{|T|+|I|}$.)*

Beweis Aus Satz 4.3(i) folgt, daß man o.B.d.A. $|A| \leq |T|$ voraussetzen kann. Sei $\mathfrak{p}$ eine globale nichtforkende Fortsetzung von p; dann ist $\mathfrak{p}$ bestimmt durch $\mathfrak{p} \restriction \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Aus $|\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)| \leq |A| + |T| \leq |T|$ folgt, daß über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ höchstens $2^{|T|}$ viele Typen existieren, und somit folgt $\mathrm{mult}(p) \leq 2^{|T|}$. □

Ist $\mathfrak{p}$ eine forkende Fortsetzung von $p \in S^n(A)$, so gibt es zu $\mathfrak{p}$ klassenviele Konjugierte über A; denn dann existiert eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in \mathfrak{p}$, für die $\mathfrak{D} := d_{\mathfrak{p}}\overline{x}\varphi(\overline{x};\mathfrak{C})$ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ nicht definierbar ist; der kanonische Parameter von $\mathfrak{D}$ liegt folglich nicht in $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$, und somit besitzt er wie $\mathfrak{D}$ klassenviele Konjugierte über A.

Übung 4.1 Sei p ein Typ mit Morleyrang. Eine Erweiterung q von p ist genau dann nichtforkend, wenn sie denselben Morleyrang wie p hat; ferner ist die Multiplizität von p gleich dem Morleygrad von p.

Beispiel 4.1 Aus Satz 4.5 folgt, daß sich in einer stabilen Theorie jeder Typ $p \in S(A)$ auf höchstens $2^{|T|}$ viele Arten auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ erweitern läßt; für nichtstabile Theorien ist das falsch: Sei T die Theorie der zweisortigen Struktur $(R, A; E)$, die aus zwei unendlichen Mengen A und R und aus einer dreistelligen Relation E bestehe; für jedes $r \in R$ sei $E(r; x, y)$ eine Äquivalenzrelation auf A mit zwei Äquivalenzklassen. Das System dieser Äquivalenzrelationen sei frei, das heißt Durchschnitte endlich vieler Äquivalenzklassen paarweise verschiedener Äquivalenzrelationen sind nicht leer. Zu je zwei endlichen, disjunkten Teilmengen A_1, A_2 von A gebe es ein $r \in R$, so daß A_1 und A_2 in verschiedenen Äquivalenzklassen von $E(r; x, y)$ liegen. Sei $p \in S(R)$ der Typ eines Elementes aus A; es gibt dann $2^{|R|}$–viele Erweiterungen von p auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(R)$.

Satz 4.6 (Symmetrie) *Sei C eine Menge, und seien $\overline{a}, \overline{b}$ (nicht notwendigerweise endliche) Tupel; $\mathrm{tp}(\overline{a}/C\overline{b})$ forkt genau dann nicht über C, wenn $\mathrm{tp}(\overline{b}/C\overline{a})$ nicht über C forkt.*

Beweis Man kann o.B.d.A. annehmen, daß C in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen ist, denn $\mathrm{tp}(\overline{a}/C\overline{b})$ forkt genau dann nicht über C, wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(C) \cup \{\overline{b}\})$ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(C)$ nicht forkt. Seien nun $p(\overline{x}) := \mathrm{tp}(\overline{a}/C)$ und $q(\overline{y}) := \mathrm{tp}(\overline{b}/C)$; $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien die nichtforkenden globalen Erweiterungen. $\mathrm{tp}(\overline{a}/C\overline{b})$ forkt genau dann nicht über C, wenn $\overline{a} \models \mathfrak{p} \restriction C\overline{b}$, und das ist äquivalent dazu, daß für alle $L(C)$–Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ gilt: $\models \varphi(\overline{a};\overline{b}) \iff \models d_{\mathfrak{p}}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{b}) \iff d_{\mathfrak{p}}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{q}$; ebenso forkt $\mathrm{tp}(\overline{b}/C\overline{a})$ genau dann nicht über C, wenn für alle $L(C)$–Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ gilt: $\models \varphi(\overline{a};\overline{b}) \iff d_{\mathfrak{q}}\overline{y}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in \mathfrak{p}$; nach Lemma 3.9 sind diese beiden Bedingungen äquivalent. □

Seien $\overline{a}$ und $\overline{a}^*$ zwei Aufzählungen einer Menge A, und seien B und C zwei weitere Mengen. $\mathrm{tp}(\overline{a}/BC)$ forkt genau dann nicht über B, wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}^*/BC)$ über B nicht forkt, denn falls $\overline{c}$ eine Aufzählung von C ist, so folgt aus Satz 4.6, daß sowohl $\mathrm{tp}(\overline{a}/BC)$ als auch $\mathrm{tp}(\overline{a}^*/BC)$ genau dann nicht über B forken, wenn $\mathrm{tp}(\overline{c}/BA)$ nicht über B forkt.

A und B heißen *unabhängig* über C ($A \perp_C B$), wenn für ein Tupel $\overline{a}$, das A aufzählt, der Typ $\mathrm{tp}(\overline{a}/BC)$ über C nicht forkt; die Unabhängigkeit hängt nicht von der Aufzählung $\overline{a}$ ab.

Übung 4.2 Man zeige: $AB \perp_D C \iff A \perp_{BD} C$ und $B \perp_D C$.

Übung 4.3 Es gelte $AB \perp_D C$ und $D \subset C$; dann gilt $A \perp_C B$ genau dann, wenn $A \perp_D B$ gilt.

Sei $A \subset B$; dann sei $NF^n(B/A)$ die Menge aller Typen aus $S^n(B)$, die über A nicht forken.

Satz 4.7 (Abgeschlossenheit) *$NF^n(B/A)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $S^n(B)$.*

Beweis Aus $NF^n(B/A) = NF^n(B \cup \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)) \restriction B$ folgt, daß man o.B.d.A. voraussetzen darf, daß A in $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ algebraisch abgeschlossen ist. Sei $p \in S(B)$, und $\overline{c}$ sei eine Realisierung von p. Für jedes Tupel $\overline{b}$ aus B sei $\mathfrak{q}_{\overline{b}}(\overline{x})$ die nichtforkende globale Erweiterung von $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$. p forkt genau dann nicht über A, wenn alle Tupel $\overline{b} \in B$ Realisierungen von $\mathfrak{q}_{\overline{b}} \restriction A\overline{c}$ sind; das ist genau dann der Fall, wenn $\models \varphi(\overline{b};\overline{c}) \leftrightarrow d_{\mathfrak{q}_{\overline{b}}}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{c})$ für alle $L(A)$–Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ gilt. $NF^n(B/A)$ besteht folglich gerade aus den Typen, die alle Formeln der Gestalt $\varphi(\overline{b};\overline{y}) \leftrightarrow d_{\mathfrak{q}_{\overline{b}}}\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y})$ enthalten. □

Eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{a})$ *forkt* über einer Menge C, wenn jeder globale Typ, der φ enthält, über C forkt. Aus dem obigen Satz folgt, daß ein Typ $p \in S^n(A)$ genau dann über einer Teilmenge B von A forkt, wenn er eine Formel enthält, die über B forkt. Satz 4.7 ist folglich eine Verschärfung von Satz 4.3 (ii).

Satz 4.8 (Open mapping theorem) *Sei $A \subset B$; dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$\pi : NF(B/A) \to S(A)$$

eine offene Surjektion.

Beweis Sei ρ die Einschränkungsabbildung von $NF(\mathfrak{C}/A)$ auf $NF(B/A)$. Falls $\pi\rho$ offen ist, so ist auch π offen, und man kann daher o.B.d.A. $B = \mathfrak{C}$ annehmen. Sei $\mathfrak{E} \subset NF(\mathfrak{C}/A)$ offen. Dann gilt $\pi^{-1}\pi(\mathfrak{E}) = \bigcup\{\mathfrak{E}^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)\}$; $\pi^{-1}\pi(\mathfrak{E})$ ist daher offen. Da π abgeschlossen ist, ist $\pi(\mathfrak{E}) = S(A) \setminus \pi(NF(\mathfrak{C}/A) \setminus \pi^{-1}\pi(\mathfrak{E}))$ offen. □

Sei $p \in NF(B/A)$ isoliert; aus dem open mapping Theorem folgt dann, daß $p \upharpoonright A$ in $S(A)$ isoliert ist.

Satz 4.9 (Endliche Äquivalenzrelationen) *Sei $A \subset B$, und $q_1 \neq q_2$ seien Typen aus $NF^n(B/A)$; dann gibt es eine über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbare Formel $\varphi(\overline{x})$ mit $\varphi(\overline{x}) \in q_1$ und $\neg\varphi(\overline{x}) \in q_2$; ferner gibt es eine über A definierbare Äquivalenzrelation E mit nur endlich vielen Äquivalenzklassen mit $q_1(\overline{x}) \cup q_2(\overline{y}) \vdash \neg(\overline{x}E\overline{y})$.*

Beweis Sei p_1 eine Fortsetzung von q_1 auf $B \cup \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$; es gibt dann eine $L(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$-Formel $\psi(\overline{x}) \in p_1$, die in keiner Erweiterung p_2 von q_2 auf $B \cup \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ enthalten ist; anderenfalls gäbe es wegen Kompaktheit eine Erweiterung p_2 von q_2 auf $B \cup \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ mit $p_1 \upharpoonright \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) = p_2 \upharpoonright \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$; das ist jedoch wegen Satz 3.11 (ii) unmöglich. Es folgt also $q_2 \vdash \{\neg\psi\}$, und $q_1 \cup \{\psi\}$ ist konsistent. Sei $\varphi(\overline{x})$ die Disjunktion aller zu ψ über B konjugierten Formeln. $\varphi(\overline{x})$ ist dann über B definierbar, und es gilt $q_1 \vdash \varphi(\overline{x})$ und $q_2 \vdash \neg\varphi(\overline{x})$. Nach Übung 3.7 gibt es eine über A definierbare Äquivalenzrelation E mit endlich vielen Klassen, für die gilt: $\models \varphi(\overline{x}) \wedge \neg\varphi(\overline{y}) \to \neg\overline{x}E\overline{y}$. □

Übung 4.4 Man zeige die folgende Verschärfung von Satz 4.3(i) mit Hilfe von Satz 4.9 Sei $p \in S^n(A)$; dann gibt es eine Teilmenge B von A mit $|B| \leq |T|$, p forkt nicht über B, p ist die einzige nichtforkende Erweiterung von $p \upharpoonright B$ auf A und $\mathrm{mult}(p) = \mathrm{mult}(p \upharpoonright B)$.

Übung 4.5 Man zeige, daß für $|T| \leq \aleph_0$ die Multiplizität eines Typs immer endlich oder $2^{\aleph_0}$ ist.

$\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$ wird *starker Typ* von $\overline{a}$ über A ($\mathrm{stp}(\overline{a}/A)$) genannt.

Übung 4.6 $\mathrm{stp}(\overline{a}/A)$ wird axiomatisiert durch alle Formeln $\overline{x}E\overline{a}$, wobei E eine über A definierbare Äquivalenzrelation mit endlich vielen Äquivalenzklassen sei.

Es sollen nun Erweiterungen von Typen über Modellen betrachtet werden. Sei $q \in S(B)$ ein Typ und sei $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ eine Formel; φ wird von q *repräsentiert*, wenn ein $\overline{b} \in B$ existiert mit $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in q$. Seien $M \subset B, p \in S^n(M)$, $q \in S^n(B)$, und sei $p \subset q$. q heißt *Erbe* von p, wenn alle $L(M)$–Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$, die von q repräsentiert werden, auch von p repräsentiert werden.

Übung 4.7 Erben existieren immer, auch für unstabile Theorien.

Satz 4.10 *T sei nicht notwendigerweise stabil, und $p \in S^n(M)$ sei ein über M definierbarer Typ. Für $B \supset M$ ist dann $q := \{\varphi(\overline{x};\overline{b}) \mid \varphi(\overline{x};\overline{y})$ ist $L(M)$–Formel, $\overline{b} \in B$ und $\models d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{b})\}$ der einzige Erbe von p auf B.*

Beweis Da M ein Modell ist, gelten

$$\models d_p\overline{x}\neg\varphi(\overline{x};\overline{y}) \leftrightarrow \neg d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y}),$$

$$\models d_p\overline{x}(\varphi(\overline{x};\overline{y}) \wedge \psi(\overline{x};\overline{z})) \leftrightarrow d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \wedge d_p\overline{x}\psi(\overline{x};\overline{z})$$

und

$$\models d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y}) \to \exists\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y}).$$

q ist folglich ein Typ; daß q ein Erbe von p ist, ist klar. Sei r ein weiterer Erbe; für jede $L(M)$–Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ wird $\varphi(\overline{x};\overline{y}) \leftrightarrow \neg d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{y})$ nicht von p und folglich auch nicht von r repräsentiert, also gilt $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in r \iff \models d_p\overline{x}\varphi(\overline{x};\overline{b})$. □

Übung 4.8 T ist genau dann stabil, wenn die Erben von Typen über Modellen immer eindeutig bestimmt sind.

Eine Menge von $L(\mathfrak{C})$–Formeln heißt *endlich erfüllbar* in B, wenn jede endliche Teilmenge davon in B realisiert wird. Sei $p \in S^n(M)$, und q sei eine Erweiterung von p auf $B \supset M$; q heißt *Koerbe* von p, wenn q in M endlich erfüllbar ist. Für Tupel $\overline{a}$ und $\overline{b}$ ist $\text{tp}(\overline{a}/M\overline{b})$ genau dann ein Erbe von $\text{tp}(\overline{a}/M)$, wenn $\text{tp}(\overline{b}/M\overline{a})$ Koerbe von $\text{tp}(\overline{b}/M)$ ist.

Von nun an sei T wieder stabil.

Satz 4.11 *Seien $M \subset B, p \in S(M)$ und $q \in S(B)$ mit $p \subset q$; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) q ist Erbe von p;

(ii) q ist Koerbe von p;

(iii) q forkt nicht über M.

Beweis Der Erbe von p auf B ist definierbar über M und somit die nichtforkende Fortsetzung von p auf B.

Sei $\overline{a}$ eine Realisierung von q. q ist genau dann der Erbe von p, wenn $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M \overline{b}$, und aus der Symmetrie folgt, daß das genau dann der Fall ist, wenn $\text{tp}(\overline{b}/M\overline{a})$ ein Erbe ist von $\text{tp}(\overline{b}/M)$; letzteres ist äquivalent dazu, daß q ein Koerbe von p ist. $\square$.

Satz 4.12 *Ein Typ $p \in S(B)$ forkt genau dann nicht über $A \subset B$, wenn p in allen Modellen M, die A umfassen, endlich erfüllbar ist.*

Beweis p forke nicht über A, und $M \supset A$ sei ein Modell; dann gibt es eine nichtforkende Erweiterung q von p auf MB; nach Satz 4.11 ist q in M endlich erfüllbar.

Sei nun p in allen Modellen M, die A umfassen, endlich erfüllbar. Man wähle ein Modell M mit $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$; sei q ein maximaler partieller n-Typ mit Parametern aus MB, der p umfasse und der in M endlich erfüllbar sei. q ist dann vollständig und somit ist q ein Koerbe von $q \restriction M$. $\overline{a}$ sei eine Realisierung von q; dann gilt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_M B$; da auch $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ gilt, folgt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. $\square$

Für einen Typ p über einem Modell M sei $cl_0(p)$ die Menge aller L–Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{y})$, die von p repräsentiert werden; für einen Typ $p \in S^n(A)$ sei die *Klasse* von p definiert durch $cl(p) := \bigcap\{cl_0(q) \mid q \supset p, q \in S^n(M) \text{ und } A \subset M\}$. Trivialerweise gilt für Typen p über Modellen $cl(p) = cl_0(p)$, und aus $p \subset q$ folgt $cl(p) \subset cl(q)$. Es soll gezeigt werden, daß für Typen $p \subset q$ genau dann $cl(p) = cl(q)$ gilt, wenn q eine nichtforkende Erweiterung von p ist; dazu braucht es einige Vorbereitungen.

Sei $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}^n$; $\mathfrak{D}$ heißt $\bigwedge$*–definierbar* (bzw $\bigvee$*–definierbar*) über A, wenn $(\varphi_i(\overline{x}))_{i\in I}$ von $L(A)$–Formeln gibt mit $\overline{d} \in \mathfrak{D} \iff \models \bigwedge_{i\in I} \varphi_i(\overline{d})$ (bzw $\overline{d} \in \mathfrak{D} \iff \models \bigvee_{i\in I} \varphi_i(\overline{d})$).

Übung 4.9 $\bigwedge$–definierbare Relationen sind abgeschlossen unter „ $\bigwedge_{i\in I}$ “, „ $\vee$ “, „$\forall x$“ und „$\exists x$“ (für letzteres verwende man die Saturiertheit von $\mathfrak{C}$).

Übung 4.10 Für eine endliche Formelmenge Δ und für eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ sind die Klassen $\{\overline{b} \in \mathfrak{C} \mid RD_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{b})) \geq (\alpha, n)\}$ $\bigwedge$-definierbar über der leeren Menge. (Hinweis: Man beweise das zuerst durch Induktion für den Fall, daß φ eine boolesche Kombination von Δ–Formeln ist; für den allgemeinen Fall beachte man, daß es zu jedem $\varphi(\overline{x};\overline{b})$ eine Formel $\psi(\overline{x};\overline{c})$ gibt, die eine boolesche Kombination aus Δ–Formeln ist, mit $\models \varphi(\overline{x};\overline{b}) \to \psi(\overline{x};\overline{c})$ und $RD_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{b})) = RD_\Delta(\psi(\overline{x};\overline{c}))$.)

Lemma 4.13 (Diamantlemma) *Seien A,B,C Mengen mit $A \subset B, A \subset C$ und $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$; $p \in S(BC)$ sei ein über B nicht forkender Typ. Dann forkt $p \restriction C$ nicht über A.*

Beweis Sei $\overline{a}$ eine Realisierung von p. Dann gilt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C$ Wegen $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ folgt daraus $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$. $\square$

Satz 4.14 *Seien $p \in S^n(A)$ und $q \in S^n(B)$ Typen mit $p \subset q$. q ist genau dann eine nichtforkende Fortsetzung von p, wenn $cl(p) = cl(q)$.*

Beweis q forke nicht über A. Da jedes Modell, das A umfaßt, auch $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ umfaßt, ist die Klasse von p gleich der Klasse einer beliebigen Fortsetzung von p auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Man darf daher o.B.d.A. voraussetzen, daß A algebraisch abgeschlossen ist. Sei $\varphi(\overline{x};\overline{y}) \in cl(q)$. Es muß gezeigt werden, daß φ von jeder Fortsetzung p' von p auf ein A enthaltendes Modell M repräsentiert wird; o.B.d.A. seien M und B unabhängig über A. Sei $\mathfrak{p}$ ein globaler Erbe von p'. Nach Lemma 4.13 setzt $\mathfrak{p}$ auch q fort, folglich wird $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ in $\mathfrak{p}$ repräsentiert. Da $\mathfrak{p}$ ein Erbe von p' ist, wird $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ schon in p' repräsentiert.

Sei nun $cl(p) = cl(q)$; $\mathfrak{q}$ sei wieder eine nichtforkende globale Erweiterung von q; aus dem ersten Teil dieses Beweises folgt $cl(p) = cl(\mathfrak{q})$. Um zu zeigen, daß q eine nichtforkende Fortsetzung von p ist, genügt es nach Satz 4.12 zu zeigen, daß $\mathfrak{q}$ über keinem Modell M forkt, das A enthält. Für ein endliches Δ sei $R_\Delta(\mathfrak{q}) = m$; dann gibt es eine L–Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ und ein Tupel $\overline{b}$ mit $\varphi(\overline{x};\overline{b}) \in \mathfrak{q}$ und $R_\Delta(\mathfrak{q}) = R_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{b}))$. Nach Übung 4.10 ist „$R_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{y})) \leq m$“ über der leeren Menge $\bigvee$–definierbar, es gibt somit eine L–Formel $\psi(\overline{y})$ mit $\models \psi(\overline{b})$ und $R_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{c})) \leq m$ für alle $\overline{c}$ mit $\models \psi(\overline{c})$. Die Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y}) \wedge \psi(\overline{y})$ wird in $\mathfrak{q}$ repräsentiert, folglich ebenso in $\mathfrak{q} \restriction M$ durch ein $\overline{a}$; dann gilt jedoch $\varphi(\overline{x};\overline{a}) \in \mathfrak{q} \restriction M$ und $R_\Delta(\mathfrak{q} \restriction M) \leq R_\Delta(\varphi(\overline{x};\overline{a})) \leq m$. □

Kapitel 5

Morleyfolgen

T sei eine Theorie ohne die Unabhängigkeitseigenschaft, und F sei eine (unendliche) Menge von Indiscernibles. Für jede Formel $\varphi(\overline{x};\overline{b})$ ist dann die Menge aller $\overline{a} \in F$ mit $\models \varphi(\overline{a};\overline{b})$ endlich oder koendlich (in F): Anderenfalls gäbe es nämlich zu jedem Paar (F_0, F_1) von disjunkten endlichen Teilmengen von F ein Tupel $\overline{c}$ mit $\models \varphi(\overline{a};\overline{c})$ für alle $\overline{a}$ aus F_0 und mit $\models \neg\varphi(\overline{a};\overline{c})$ für alle $\overline{a}$ aus F_1; dann aber besäße $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ die Unabhängigkeitseigenschaft. Die Klasse aller Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{b})$, für die $\models \varphi(\overline{a};\overline{b})$ für fast alle $\overline{a}$ aus F gilt, ist folglich ein globaler Typ; dieser Typ heißt *Durchschnittstyp* von F und wird mit $Av(F)$ bezeichnet.

T sei in diesem Abschnitt eine stabile Theorie.

Lemma 5.1 *$Av(F)$ forkt nicht über F; ferner ist $Av(F) \restriction F$ stationär.*

Beweis Da $Av(F)$ in F endlich erfüllbar ist, folgt aus Übung 2.2, daß $Av(F)$ über F definierbar ist. Aus Übung 3.8 folgt, daß $Av(F)$ über F nicht forkt und $Av(F) \restriction F$ stationär ist. $\square$

Übung 5.1 Sei C eine Menge, und sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf C; dann ist die Menge aller Formeln $\varphi(\overline{x};\overline{b})$ mit $\{\overline{a} \in C \mid \models \varphi(\overline{a};\overline{b})\} \in \mathfrak{U}$ ein globaler Typ, der über C nicht forkt.

Eine Menge E von Tupeln heißt *unabhängig* über A, wenn $\overline{e} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A E \setminus \{\overline{e}\}$ für alle $\overline{e} \in E$ gilt. Eine Folge $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ heißt *unabhängig* über A wenn $\overline{e}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \{\overline{e}_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}$ gilt. Die Folge $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ ist genau dann unabhängig über A, wenn die Menge $\{\overline{e}_i \mid i \in I\}$ unabhängig über A ist, und wenn aus $\overline{e}_i = \overline{e}_j$ und $i \neq j$ folgt, daß $\overline{e}_i$ in $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ liegt.

Übung 5.2 Die Menge EF ist genau dann unabhängig über A, wenn sowohl E als auch F über A unabhängig sind und wenn $E \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A\cup(E\cap F)} F$ gilt.

Übung 5.3 I sei eine totalgeordnete Menge. Die Folge $(\overline{a}_i)_{i\in I}$ ist genau dann unabhängig über A, wenn $\overline{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A (\overline{a}_j)_{j<i}$ für alle i aus I gilt.

Lemma 5.2 *Sei E unabhängig über A, und sei B eine Menge; dann gilt $\overline{e} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ höchstens für $|T|+|B|$ viele $\overline{e} \in E$.*

Beweis Man wähle $E_0 \subset E$ mit $|E_0| \leq |T| + |B|$ und $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{AE_0} E$. Aus $\overline{e} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ folgt wegen $\overline{e} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A E \setminus \{\overline{e}\}$ auch $\overline{e} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A\cup(E\setminus\{\overline{e}\})} B$, was wegen $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{AE_0} E$ nur für $\overline{e} \in E_0$ möglich ist. $\square$

Eine Folge von über A unabhängigen Realisierungen eines starken Typs $p \in ST(A)$ heißt *Morleyfolge* von p. Nach Übung 5.3 können Morleyfolgen beliebiger Länge rekursiv wie folgt konstruiert werden: für jede Ordinalzahl α sei $\overline{a}_\alpha$ eine Realisierung von $p|\{\overline{a}_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Insbesondere können auf diese Art Morleyfolgen nach Belieben verlängert werden. Morleyfolgen von p sind genau dann konstant, wenn p algebraisch ist.

Übung 5.4 Seien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ Morleyfolgen desselben Typs $p \in ST(A)$; dann sind die beiden I-Typen $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in I}/A)$ und $\mathrm{tp}((b_i)_{i\in I}/A)$ gleich.

Lemma 5.3 *Sei $F := (\overline{a}_i)_{i\in I}$ eine Morleyfolge von $p \in ST(A)$; dann ist $Av(F)$ die globale nichtforkende Erweiterung von p.*

Beweis Es genügt zu zeigen, daß $Av(F) \restriction AF$ eine nichtforkende Erweiterung von p ist, denn nach Lemma 5.1 forkt $Av(F)$ nicht über AF.
Sei $\varphi(\overline{x};\overline{y}_1,...,\overline{y}_n)$ eine $L(A)$–Formel mit $\varphi(\overline{x};\overline{a}_{i_1},...,\overline{a}_{i_n}) \in Av(F)$. Dann gilt

$$\models \varphi(\overline{a}_{i_0};\overline{a}_{i_1},...,\overline{a}_{i_n})$$

für $i_0 \notin \{i_0,...,i_n\}$; aus $\overline{a}_{i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \{\overline{a}_{i_1},...,\overline{a}_{i_n}\}$ folgt, daß $\varphi(\overline{x};\overline{a}_{i_1},...,\overline{a}_{i_n})$ in der nichtforkenden Erweiterung von p liegt. □

Aus Lemma 5.3 folgt, daß jeder globale Typ von der Form $Av(I)$ ist; insbesondere gibt es auch bei überabzählbaren Theorien zu jedem globalen Typ eine abzählbare Menge, über der er nicht forkt!

Lemma 5.4 *Für eine unendliche Folge F und für eine Menge A sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) F ist eine Morleyfolge eines starken Typs $p \in ST(A)$.

(ii) F ist über A indiscernible und unabhängig.

(iii) F ist indiscernible über A, und $Av(F)$ forkt nicht über A.

Beweis (i)⇒(iii): Sei $(\overline{a}_1,...,\overline{a}_m)$ eine endliche Teilfolge der Morleyfolge F von p; $\mathrm{tp}(\overline{a}_1,...,\overline{a}_m/A)$ wird eindeutig bestimmt durch

$$\mathrm{tp}(\overline{a}_1/A) = p, \mathrm{tp}(\overline{a}_2/A\overline{a}_1) = p|\overline{a}_1$$

usw. F ist also indiscernible. Daß $Av(F)$ über A nicht forkt, folgt aus Lemma 5.3.

(iii)⇒(ii): Sei F_0 eine endliche Teilmenge von F, und sei $\overline{a} \in F \setminus F_0$. Alle $\overline{b} \in F \setminus F_0$ haben denselben Typ über AF_0, daher gilt $\mathrm{tp}(\overline{a}/AF_0) \subset Av(F)$; es folgt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A F_0$, somit ist F unabhängig.

(ii)⇒(i): Sei E eine über A definierbare Äquivalenzrelation mit endlich vielen Äquivalenzklassen. Da F indiscernible ist, gilt $\models \overline{a}E\overline{b}$ für alle $\overline{a}, \overline{b}$ aus F, denn anderenfalls gölte $\models \neg(\overline{a}E\overline{b})$ für alle $\overline{a} \neq \overline{b} \in F$; E besitzt aber nur endlich viele Äquivalenzklassen. Alle Elemente aus F realisieren also über A denselben starken Typ. □

Sei T die Theorie einer Äquivalenzrelation mit unendlich vielen unendlichen Klassen; F sei eine unendliche Folge paarweise verschiedener äquivalenter Elemente. Dann ist F indiscernible über der leeren Menge, F ist jedoch keine Morleyfolge.

Lemma 5.5 *A sei in B enthalten und F sei eine Folge mit $F \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$; dann gelten die drei folgenden Aussagen:*

(i) F ist genau dann unabhängig über A, wenn F unabhängig über B ist.

(ii) Ist F unendlich, so ist F genau dann indiscernible über A, wenn F indiscernible über B ist.

(iii) F ist genau dann eine Morleyfolge über A, wenn F eine Morleyfolge über B ist.

Beweis (i) ist im wesentlichen Übung 4.3.

(ii): Ist F indiscernible über A, so ist F auch indiscernible über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$: Sonst gäbe es eine über A definierbare Äquivalenzrelation E mit endlich vielen Äquivalenzklassen und Tupel $\overline{a}_1,...\overline{a}_n, \overline{b}_1,...,\overline{b}_n$ aus F mit $\models \neg E(\overline{a}_1,...\overline{a}_n;\overline{b}_1,...,\overline{b}_n)$; da F unendlich und indiscernible ist, ist das nicht möglich. Für jedes Tupel $(\overline{a}_1,...\overline{a}_n)$ aus F gilt dann $\mathrm{tp}(\overline{a}_1,...\overline{a}_n/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_1,...\overline{a}_n/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))|B$.

(iii) folgt aus (i), (ii) und Lemma 5.4, da man jede Morleyfolge zu einer unendlichen Morleyfolge verlängern kann. □

Korollar 5.6 *F sei indiscernible über A, und B sei eine Menge. Dann gibt es eine Teilfolge F_0 von F mit $|F_0| \leq |T| + |B|$, so daß $F \setminus F_0$ eine Morleyfolge über ABF_0 ist. Ist B endlich und T superstabil (zur Definition vgl. Kapitel 6), so kann F_0 sogar endlich gewählt werden.*

Beweis Man wähle F_0 so groß, daß $Av(F)$ über F_0 nicht forkt und daß $\mathrm{tp}(B/AF)$ über AF_0 nicht forkt. Falls T superstabil und B endlich ist, kann F_0 endlich gewählt werden, andernfalls kann F_0 so gewählt werden, daß $|F_0| \leq |T| + |B|$. O.B.d.A. ist $F \setminus F_0$ unendlich (sonst wäre nichts zu zeigen). $F \setminus F_0$ ist indiscernible über AF_0, und somit folgt aus Lemma 5.4, daß $F \setminus F_0$ eine Morleyfolge über AF_0 ist. Aus Lemma 5.5(iii) folgt, daß $F \setminus F_0$ sogar über ABF_0 eine Morleyfolge ist. □

In den beiden folgenden Sätzen wird die Technik der Morleyfolgen in den Beweisen angewendet.

Eine Menge $\Sigma = \{\varphi_i(\overline{x}) \mid i \in I\}$ von Formeln heißt m–inkonsistent, wenn alle $m+1$–elementigen Teilmengen von Σ inkonsistent sind. Σ ist also genau dann 1–inkonsistent, wenn die Klassen $\varphi_i(\mathfrak{C})$ alle disjunkt sind. Eine Formel $\varphi(\overline{x}; \overline{b})$ *teilt* über A, wenn es eine Folge $(\overline{b}_i)_{i<\omega}$ gibt mit $\mathrm{tp}(\overline{b}_i/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und für die das System $\Sigma := \{\varphi(\overline{x}; \overline{b}_i) \mid i < \omega\}$ m–inkonsistent ist für ein m.

Satz 5.7 *(Shelah) Eine Formel $\varphi(\overline{x}; \overline{b})$ forkt genau dann über einer Menge A, wenn sie über A teilt.*

Beweis $\varphi(\overline{x}; \overline{b})$ teile über A. Es gibt dann eine Familie $(\varphi(\overline{x}; \overline{b}_i))_{i \in I}$ mit $|I| > 2^{|T|}$, $\mathrm{tp}(\overline{b}_i/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ für alle $i \in I$ und $\{\varphi(\overline{x}; \overline{b}_i) \mid i \in I\}$ ist m–inkonsistent. Für jedes $i \in I$ wähle man ein $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ mit $\alpha_i(\overline{b}) = \overline{b}_i$. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein globaler Typ mit $\varphi(\overline{x}; \overline{b}) \in \mathfrak{p}$, und sei $\mathfrak{p}_i$ der aus $\mathfrak{p}$ durch Konjugation mit α_i entstandene Typ. Zu jedem i gibt es höchstens m viele j mit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$; $\mathfrak{p}$ besitzt daher mehr als $2^{|T|}$ viele Konjugierte über A; folglich forkt $\mathfrak{p}$ über A.

$\varphi(\overline{x}; \overline{b})$ forke über A. $\overline{b}$ ist dann nicht algebraisch über A. Sei $p := \mathrm{tp}(\overline{b}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$, und sei $(\overline{b}_i)_{i \in I}$ eine Morleyfolge von p mit $|I| > |T|$. Wäre nun $\overline{c}$ eine Realisierung von $\Sigma = \{\varphi(\overline{x}; \overline{b}_i) \mid i \in I\}$, so hätte man $\overline{c} \not\perp_A \overline{b}_i$ für alle $i \in I$, was dem Lemma 5.2 widerspricht. Σ ist folglich inkonsistent, es gibt somit eine $m+1$–elementige inkonsistente Teilmenge von Σ; da die $\overline{b}_i$ indiscernible sind, ist Σ m-inkonsistent. □

Satz 5.8 *(Harnik) T sei eine abzählbare, λ–stabile Theorie. Dann existiert ein saturiertes Modell von T der Mächtigkeit λ.*

Beweis Wir geben den Beweis nur für abzählbares L. M_0 sei ein Modell von T der Mächtigkeit λ. Für $\alpha \leq \lambda$ definiert man wie folgt eine Folge von Modellen M_α: $M_{\alpha+1}$ sei eine elementare Erweiterung von M_α der Mächtigkeit λ, in der alle Typen aus $S(M_\alpha)$ realisiert werden, und für eine Limeszahl β sei M_β die Vereinigung aller M_α mit $\alpha < \beta$. Es soll nun gezeigt werden, daß M_λ saturiert ist (für reguläres λ ist das trivial). Sei $p \in S(A)$ ein Typ mit $A \subset M_\lambda$ und $|A| < \lambda$; p' sei eine Erweiterung von p auf M_λ. Wir konstruieren nun in M_λ eine Folge I von Indiscernibles mit $|I| = \lambda$ und mit $Av(I) \supset p'$.

Falls T superstabil (zur Definition vgl.Kapitel 6) ist, so gibt es eine endliche Menge $C \subset M_\lambda$, über der p' nicht forkt. Es gibt folglich ein $\alpha < \lambda$ mit $C \subset M_\alpha$. Ist T nicht superstabil, so gilt $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ und somit $cf(\lambda) > \omega$. Es gibt eine abzählbare Teilmenge C von M_λ, über der p' nicht forkt. Wegen $cf(\lambda) > \omega$ gibt es auch hier ein $\alpha < \lambda$ mit $C \subset M_\alpha$. Für jedes β mit $\alpha \leq \beta < \lambda$ sei i_β eine Realisierung von $p' \upharpoonright M_\alpha \cup \{i_\gamma \mid \gamma < \beta\}$ in $M_{\beta+1}$. $I := (i_\beta)_{\alpha \leq \beta < \lambda}$ ist dann eine Morleyfolge für $p' \upharpoonright M_\alpha$ und somit gilt $Av(I) \supset p'$.

Für jede $L(A)$–Formel $\varphi(x)$ aus p gilt $\varphi(i)$ für fast alle $i \in I$; da es in p weniger als λ viele Formeln gibt, und da I die Mächtigkeit λ hat, gibt es ein $i \in I$, das p realisiert. □

Übung 5.5 T sei eine stabile, nicht superstabile abzählbare Theorie. Falls M ein saturiertes Modell von T der Mächtigkeit $\lambda > \aleph_0$ ist, so gilt $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$.

Übung 5.6 Man beweise Satz 5.8 für überabzählbare Theorien.

Kapitel 6

Das Stabilitätsspektrum

Eine Theorie heißt *superstabil*, wenn es für jeden Typ $p \in S^n(A)$ eine endliche Teilmenge von A gibt, über der p nicht forkt. Ein Typ p heißt superstabil, wenn es keine Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Typen gibt mit $p = p_0$ und p_{i+1} ist forkende Erweiterung von p_i.

Übung 6.1 Eine Theorie ist genau dann superstabil, wenn es für jeden Typ $p \in S^1(A)$ eine endliche Teilmenge A_0 von A gibt, über der p nicht forkt.

Lemma 6.1 *Eine Theorie ist genau dann superstabil, wenn alle Typen superstabil sind.*

Beweis Sei T superstabil und sei $(p_i)_{i\in I}$ eine Folge von Typen mit $p_i \in S^n(A_i)$ und p_{i+1} ist Erweiterung von p_i. Es gibt dann eine endliche Teilmenge E von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, über der $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} p_i$ nicht forkt. E ist dann in einer Menge A_j enthalten, und aus der Monotonie folgt, daß für $i \geq j$ der Typ p_{i+1} über A_j nicht forkt.

Sei T nicht superstabil, und sei $p \in S^n(A)$ ein Typ, der über allen endlichen Teilmengen von A forkt. Aus der Stetigkeit folgt dann, daß man eine aufsteigende Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von endlichen Teilmengen von A definieren kann, so daß $p \restriction A_{i+1}$ über A_i forkt. $\square$

Aus Lemma 6.1 folgt zusammen mit Übung 4.1 unmittelbar, daß total transzendente Theorien superstabil sind.

Satz 6.2 *Eine abzählbare Theorie T ist genau dann total transzendent, wenn T superstabil ist, wenn die Typenräume $S^n(\emptyset)$ höchstens abzählbar sind und wenn alle Typen endliche Multiplizitäten besitzen.*

Beweis Sei T total transzendent; dann ist T superstabil. Nach Übung 4.1 sind die Multiplizitäten aller Typen endlich, und die Typenräume $S^n(\emptyset)$ sind nach Satz 3.4 abzählbar.

T sei superstabil, die Typenräume $S^n(\emptyset)$ seien höchstens abzählbar, und alle Typen besitzen endliche Multiplizitäten. Sei A abzählbar; $S^n(A)$ ist dann die Vereinigung von allen $NF^n(A/E)$, wobei E über alle endlichen Teilmengen von E läuft. Die $NF^n(A/E)$ sind aber abzählbar, und folglich ist auch $S^n(A)$ abzählbar. $\square$

Übung 6.2 [Lachlan] Eine $\aleph_0$–kategorische, superstabile, abzählbare Theorie ist total transzendent.

Hrushovski hat gezeigt, daß es eine $\aleph_0$–kategorische, stabile, abzählbare Theorie gibt, die nicht total transzendent ist.

Satz 6.3 *Eine superstabile Theorie T ist λ–stabil für alle $\lambda \geq 2^{|T|}$.*

Beweis Da T superstabil ist, ist $S^n(A)$ die Vereinigung der $NF(A/E)$, wobei E über alle endlichen Teilmengen von A laufe. Aus Satz 4.5 folgt $|NF(A/E)| \leq |S^n(E)| \cdot 2^{|T|} = 2^{|T|}$, und folglich gilt $S^n(A) \leq |A| \cdot 2^{|T|}$. $\square$

Die Umkehrung von Satz 6.3 gilt ebenfalls: Satz 6.5 ist eine Verschärfung davon. Um das zu beweisen, wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 6.4 *Eine nichtforkende Erweiterung eines nicht superstabilen Typs ist nicht superstabil.*

Beweis Sei $p \in S(A)$ ein nicht superstabiler Typ, und sei $q \in S(B)$ eine nichtforkende Fortsetzung von p. Da die Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ nicht superstabil sind, kann man A als algebraisch abgeschlossen voraussetzen. Seien $p_i \in S(A_i)$ Typen mit $p_0 = p$,p_{i+1} forkt über A_i und $B \downarrow_A \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. q_∞ sei eine nichtforkende Fortsetzung von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} p_i$ auf $B \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, und q_i sei die Einschränkung von q_∞ auf BA_i. Aus Lemma 4.13 folgt $q = q_0$, und aus $B \downarrow_{A_i} A_{i+1}$ folgt wieder mit Lemma 4.13, daß q_{i+1} eine forkende Erweiterung von q_i ist. □

Satz 6.5 *Falls T nicht superstabil ist, so ist T nicht λ–stabil für Kardinalzahlen λ mit $\lambda < \lambda^{\aleph_0}$.*

Beweis T sei nicht superstabil, und λ sei eine Kardinalzahl mit $\lambda < \lambda^{\aleph_0}$. Sei $p_\emptyset \in S^n(A_0)$ ein nicht superstabiler Typ. Es gibt dann eine forkende Erweiterung $p' \in S^n(A')$ von $p_\emptyset$, die ebenfalls nicht superstabil ist. A_1 sei nun ein hinreichend stark saturiertes Modell, das A' enthält, und $p'' \in S^n(A_1)$ sei eine nichtforkende Erweiterung von p'. Es gibt dann λ viele zu p'' über A_0 konjugierte Typen $p_\alpha \in S^n(A_1)$ $(\alpha < \lambda)$, die nach Lemma 6.4 nicht superstabil sind. Durch Iteration dieser Konstruktion findet man einen Baum von nicht superstabilen Typen $p_{\alpha_1,\dots,\alpha_i} \in S^n(A_i)$ mit $\alpha_i < \lambda$,$p_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i+1}}$ forkt über A_i und $p_{\alpha_1,\dots,\alpha_i} \neq p_{\beta_1,\dots,\beta_i}$ falls $(\alpha_1,\dots,\alpha_i) \neq (\beta_1,\dots,\beta_i)$. Für $\eta \in {}^\omega\lambda$ sei $p_\eta := \cup\{p_{\eta\restriction i} \mid i < \omega\}$; es gibt eine Teilmenge B von $\bigcup\{A_i \mid i < \omega\}$ mit $|B| \leq \lambda$ und $p_\eta \restriction \neq p_\mu \restriction$ für $\eta \neq \mu$. Wegen $|B| \leq \lambda < \lambda^{\aleph_0} \leq |S^n(B)|$ ist T nicht λ–stabil. □

Das *Stabilitätsspektrum* einer Theorie T ist die Klasse aller Kardinalzahlen λ, für die T λ–stabil ist. Für abzählbare Theorien können die möglichen Spektren nun angegeben werden:

Satz 6.6 *Sei T eine abzählbare Theorie.*

(o) Ist T unstabil, so ist das Spektrum leer.

(i) Ist T stabil, aber nicht superstabil, so besteht das Spektrum aus allen Kardinalzahlen λ mit $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$.

(ii) Ist T superstabil, aber nicht total transzendent, so besteht das Spektrum aus allen Kardinalzahlen λ mit $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$.

(iii) Ist T total transzendent, so besteht das Spektrum aus allen (unendlichen) Kardinalzahlen.

Beweis (o) ist die Definition der Stabilität, und (i) folgt aus (dem Beweis von) Lemma 2.2 und aus Satz 6.5. Satz 6.3 besagt, daß eine superstabile Theorie λ–stabil ist für alle $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$, und aus Lemma 3.2 folgt, daß es eine abzählbare Menge gibt mit $2^{\aleph_0}$ vielen Typen, falls T nicht total transzendent ist; daraus folgt (ii); (iii) ist Satz 3.4(i). □.

Zu Satz 6.6 gibt es die folgenden Standardbeispiele (für unstabile Theorien siehe Übung 2.6 und 2.7):

Beispiel 6.1 Die Sprache L bestehe aus den zweistelligen Relationssymbolen $E_i\,(i < \omega)$, und T werde wie folgt axiomatisiert:

Alle E_i sind Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen Äquivalenzklassen, und jede Äquivalenzklasse von E_i ist eine Vereinigung von unendlich vielen Äquivalenzklassen von E_{i+1}.

T ist dann stabil, aber nicht superstabil. Alle Typen haben Multiplizität eins.

Beispiel 6.2 L sei wie im Beispiel 6.1; T werde wie folgt axiomatisiert:

E_i ist eine Äquivalenzrelation mit 2^i vielen Äquivalenzklassen, und jede Äquivalenzklasse von E_i ist eine Vereinigung von zwei Äquivalenzklassen von E_{i+1}.

T ist dann superstabil, aber nicht total transzendent; es gibt Typen mit Multiplizität eins und solche mit Multiplizität $2^{\aleph_0}$.

Beispiel 6.3 L bestehe aus den einstelligen Prädikaten P_s $(s \in {}^{<\omega}2)$, und T werde axiomatisiert durch $\forall x\, P_\emptyset(x)$, $\exists x\, P_s(x)$, $\neg\exists x(P_{s0}(x) \wedge P_{s1}(x))$ und $\forall x(P_s(x) \leftrightarrow P_{s0}(x) \vee P_{s1}(x))$ $(s \in {}^{<\omega}2)$. T ist wieder superstabil, aber nicht total transzendent; alle Typen haben Multiplizität eins.

Beispiel 6.4 Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit einer vorgeschriebenen Charakteristik in der Sprache $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ ist vollständig und läßt Quantorenelimination zu. Sei K eine Menge mit $K = \mathrm{dcl}(K)$; das ist genau dann der Fall, wenn K ein Körper ist; ein Element a ist genau dann algebraisch über K (im modelltheoretischen Sinne), wenn $K(a)/K$ eine algebraische Körpererweiterung ist; ferner ist dann der Morleygrad von $\mathrm{tp}(a/K)$ gerade $[K(a) : K]_{sep}$. Der einzige nichtalgebraische Typ in $S^1(K)$ ist der Typ eines über K transzendenten Elementes; dieser Typ hat Morleyrang eins, und die Theorie ist folglich total transzendent (wegen Übung 3.4).

Kapitel 7

Ränge

In diesem Kapitel werden nur Typen von endlichen Tupeln betrachtet. Ein *Rang* ist eine Abbildung R von der Klasse aller Typen in die Klasse der Ordinalzahlen, vereinigt mit $\{\infty\}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Konjugierte Typen haben denselben Rang.

(ii) Aus $p \subset q$ folgt $R(p) \geq R(q)$.

(iii) Seien $A \subset B$ Mengen, und sei p ein Typ aus $S^n(A)$; dann gibt es einen Typ $q \in S^n(B)$ mit $p \subset q$ und $R(p) = R(q)$.

(iv) Sei $p \in S^n(A)$ ein Typ mit $R(p) < \infty$; dann gibt es eine Kardinalzahl λ, so daß für jede Menge B, die A umfaßt, höchstens λ viele Typen $q \in S^n(B)$ existieren mit $p \subset q$ und $R(p) = R(q)$.

Der Morleyrang ist ein Rang in diesem Sinne, da für das in (iv) auftretende λ der Morleygrad gewählt werden kann.

Lemma 7.1 *Sei R ein Rang.*

(i) Falls T stabil ist und falls $p \subset q$ Typen sind mit $R(p) < \infty$, so gilt $R(p) = R(q)$ genau dann, wenn q eine nichtforkende Erweiterung von p ist.

(ii) Wenn $R(p)$ für alle Typen kleiner als ∞ ist, so ist T superstabil.

Beweis (i): Sei $p \in S^n(A)$ und $q \in S^n(B)$; λ erfülle die Bedingung (iv) aus der Definition der Ränge. Es gibt dann ein Modell $M \supset B$, in dem alle nichtforkenden Erweiterungen von p auf M über A konjugiert sind und in dem es zu jeder forkenden Erweiterung von p auf M mehr als λ viele Konjugierte über A gibt. q' sei eine Fortsetzung von q auf M mit $R(q) = R(q')$. Falls q über A forkt, so gibt es über A mehr als λ viele Konjugierte von q', und somit gilt $R(p) > R(q') = R(q)$. Man nehme nun an, daß q über A nicht forke, und daß q' eine nichtforkende Erweiterung von q auf M sei. Es existiert eine Erweiterung r von p auf M mit $R(r) = R(p)$; r forkt dann nicht über A, und somit sind r und q' konjugiert, woraus $R(p) = R(q') = R(q)$ folgt.

(ii): Es soll angenommen werden, daß T nicht stabil ist. Es gibt dann eine Formel $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ mit der Ordnungseigenschaft; α sei die kleinste Ordinalzahl, für die eine Folge von Ordnungsindiscernibles $(\overline{a}_i)_{i\in I}$ existiert mit $\models \varphi(\overline{a}_i, \overline{a}_j) \iff i < j$ und $R(\mathrm{tp}(\overline{a}_{i_0}/A)) = \alpha$, wobei $A := \{\overline{a}_i \mid i \in I \setminus \{i_0\}\}$. λ sei eine beliebige Kardinalzahl, und J sei eine totalgeordnete Menge mit einem Schnitt $J = J^- \dot\cup J^+$, der unter den Automorphismen von J mehr als λ viele Konjugierte hat. Die von I und J induzierte Anordnung von $I \dot\cup J$ werde nun so zu einer Totalordnung erweitert, daß für $i \in I$ und $j \in J$ genau dann $i < j$ gilt, wenn $i < i_0$ oder wenn $i = i_0$ und $j \in J^+$. Die Folge $(\overline{a}_i)_{i\in I}$ werde nun zu einer Folge von Indiscernibles $(\overline{a}_i \mid i \in I \dot\cup J)$ erweitert. Sei $B := \{\overline{a}_i \mid i \in I \dot\cup J \setminus \{i_0\}\}$; aus der Definition von α folgt dann $R(\mathrm{tp}(\overline{a}_{i_0}/B)) = \alpha$; andererseits folgt aus der Wahl von J, daß der $\mathrm{tp}(\overline{a}_{i_0}/B)$ über A mehr als λ viele Konjugierte hat. Da λ beliebig war, ist das im Widerspruch zu (iv) aus der Definition der Ränge. T ist also stabil. Wäre T nicht superstabil, so gäbe es einen nicht superstabilen Typ; das ist jedoch nach (i) nicht möglich. □

Übung 7.1 Man zeige, daß in stabilen Theorien nichtforkende Erweiterungen von Typen mit Rang ∞ ebenfalls Rang ∞ haben.

Der *Lascarrang* eines Typs $p \in S^n(A)$ wird rekursiv über alle Ordinalzahlen α wie folgt definiert:

(i) $U(p) \geq 0$ für alle p.

(ii) $U(p) \geq \alpha + 1$ falls für alle Kardinalzahlen λ ein $B \supset A$ existiert, so daß es mehr als λ viele Erweiterungen q von p auf B gibt mit $U(q) \geq \alpha$.

(iii) Für Limesordinalzahlen λ sei $U(p) \geq \lambda$ genau dann, wenn $U(p) \geq \beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Da „ $\geq \alpha$“ in der Definition von „ $\geq \alpha + 1$“ positiv vorkommt, ist für jedes p die Klasse der α mit $U(p) \geq \alpha$ ein abgeschlossenes Anfangsstück der Klasse aller Ordinalzahlen. Der U–Rang von p sei dann das größte α mit $U(p) \geq \alpha$; falls $U(p) \geq \alpha$ für alle Ordinalzahlen gilt, so setze man für den U–Rang ∞. Der U–Rang von p ist dann offenbar genau dann $\geq \beta$, wenn $U(p) \geq \beta$ gilt. Man darf daher den U–Rang von p mit $U(p)$ bezeichnen.

Lemma 7.2 *Falls T stabil ist, ist der Lascarrang ein Rang; ist R ein Rang, so gilt $U(p) \leq R(p)$ für alle p. (Der zweite Teil des Lemmas ist auch im nichtstabilen Fall wahr.)*

Beweis Die Rangeigenschaften (i), (ii) und (iv) sind klar. Sei nun $p \in S(A)$ und q sei eine nichtforkende Erweiterung von p auf B; wir zeigen $U(p) = U(q)$, woraus die Rangeigenschaft (iii) folgt. O.B.d.A. kann man annehmen, daß B ein Modell sei, in dem alle nichtforkenden Erweiterungen von p konjugiert sind. Durch Induktion soll nun gezeigt werden, daß aus $U(p) \geq \alpha$ auch $U(q) \geq \alpha$ folgt. Nur der Nachfolgerschritt ist nichttrivial. Sei also $U(p) \geq \alpha + 1$. Es gibt dann zu jeder Kardinalzahl λ eine Menge C, die A umfaßt und auf die es λ viele Fortsetzungen $p_\delta(_\delta < \lambda)$ von p gibt mit $U(p_\delta) \geq \alpha$. O.B.d.A. kann C so gewählt werden, daß $B \mathop{\downarrow}_A C$. q'_δ sei eine nichtforkende Fortsetzung von p_δ auf BC; aus der Induktionsvoraussetzung folgt $U(q'_\delta) \geq \alpha$, und nach dem Diamantlemma sind die Einschränkungen $q'_\delta \restriction B$ nichtforkende Erweiterungen von p. Falls $\lambda > \mathrm{mult}(p)$, so sind λ viele dieser Einschränkungen gleich einem Typ q'; q und q' sind jedoch konjugiert, und somit gibt es auch λ viele Erweiterungen q_δ von q auf eine Menge BC' mit $U(q_\delta) \geq \alpha$; es folgt $U(q) \geq \alpha + 1$.

Sei nun R ein weiterer Rang; durch Induktion nach α zeigt man, daß für einen Typ $p \in S(A)$ aus $U(p) \geq \alpha$ auch $R(p) \geq \alpha$ folgt. Sei $U(p) \geq \alpha + 1$. Für alle λ existiert dann ein $B \supset A$ mit $|\{q \in S^n(B) \mid q \supset p \wedge U(q) \geq \alpha\}| > \lambda$; aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß auch $|\{q \in S(B) \mid q \supset p \wedge R(q) \geq \alpha\}| > \lambda$ gilt, woraus $R(p) \geq \alpha + 1$ folgt. $\square$

Aus dem Lemma folgt unter anderem, daß der Lascarrang für stabile Theorien auch wie folgt charakterisiert werden kann:

$U(p) \geq \alpha + 1$ gilt genau dann, wenn eine forkende Erweiterung q von p existiert mit $U(q) \geq \alpha$; aus $U(p) \geq \alpha + 1$ folgt nämlich, daß es eine Menge B gibt, auf die es mehr als $\mathrm{mult}(p)$ viele Erweiterungen q von p gibt mit $U(q) \geq \alpha$; unter diesen Erweiterungen gibt es dann auch forkende. Die Menge $\{cl(p) \mid A \subset \mathfrak{C} \wedge p \in S^1(A)\}$, angeordnet durch die umgekehrte Inklusion, heißt *fundamentale Ordnung* von T (cl(p) wurde in Kapitel 4 definiert). Es folgt, daß $U(p)$ gerade der Fundierungsrang von $cl(p)$ in der fundamentalen Ordnung ist. Aus $U(p) < \infty$ folgt $U(p) < (2^{|T|})^+$ (es gilt sogar $U(p) < |T|^+$).

Übung 7.2 Ein Typ p ist genau dann superstabil, wenn $U(p) < \infty$; T ist folglich genau dann superstabil, wenn $U(p) < \infty$ für alle 1–Typen p gilt.

Sei α eine Ordinalzahl und p ein Typ mit $\alpha < U(p) < \infty$; dann gibt es eine Erweiterung q von p mit $U(q) = \alpha$; das folgt leicht durch Induktion nach $U(p)$: aus $U(p) = \beta + 1$ folgt, daß es eine forkende Erweiterung q' von p gibt mit $U(q') = \beta$; falls $U(p)$ eine Limeszahl ist, so gilt $U(p) \geq \alpha + 1$ und es existiert ebenfalls eine forkende Fortsetzung q' von p mit $\alpha \leq U(q') < U(p)$; in beiden Fällen folgt dann aus der Induktionsvoraussetzung, daß es eine Erweiterung q von q' gibt mit $U(q) = \alpha$. Ist R ein weiterer Rang mit dieser Eigenschaft, so gilt für alle Typen p entweder $R(p) = U(p)$ oder $R(p) = \infty$.

Die symmetrische Summe von Ordinalzahlen ist die kleinste Funktion $\oplus : Ord \times Ord \to Ord$, die in beiden Argumenten streng monoton ist. Die symmetrische Summe kann mit der Cantorschen Normalform wie folgt beschrieben werden:

$(\sum_i(\omega^{\alpha_i})n_i) \oplus (\sum_i(\omega^{\alpha_i})m_i) = \sum_i(\omega^{\alpha_i})(n_i + m_i)$.

Satz 7.3 *(Lascar–Ungleichungen) Seien $\overline{a}$ und $\overline{b}$ Tupel, und sei A eine Menge; dann gilt*

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) + U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)) \leq U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)) \leq U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) \oplus U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)).$$

Beweis Durch Induktion soll gezeigt werden, daß aus

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)) \geq \alpha$$

auch

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) \oplus U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)) \geq \alpha$$

folgt. Sei

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)) \geq \alpha + 1;$$

es gibt dann eine Menge $B \supset A$ mit $U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}b/B)) \geq \alpha$ und $\overline{a}\overline{b} \not\downarrow_A B$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\overline{a} \not\downarrow_{A\overline{b}} B$ oder $\overline{b} \not\downarrow_A B$; aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\alpha \leq U(\mathrm{tp}(\overline{a}/B\overline{b})) \oplus U(\mathrm{tp}(\overline{b}/B)) < U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) \oplus U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)).$$

Daraus folgt die zweite Ungleichung.

Um die erste Ungleichung zu beweisen, zeigt man durch Induktion nach α, daß aus

$$U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)) \geq \alpha$$

auch

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)) \geq U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) + \alpha$$

folgt. Sei

$$U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A)) \geq \alpha + 1.$$

Es gibt dann eine Menge $B \supset A$ mit $U(\mathrm{tp}(\overline{b}/B)) \geq \alpha$ und $\overline{b} \not\downarrow_A B$, woraus auch $\overline{a}\overline{b} \not\downarrow_A B$ folgt. Bei der Wahl dieser Menge B kommt es nur auf den Typ über $A\overline{b}$ an, man kann daher B so wählen, daß zusätzlich $\overline{a} \downarrow_{A\overline{b}} B$ gilt; aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun

$$U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})) + \alpha = U(\mathrm{tp}(\overline{a}/B\overline{b})) + \alpha \leq U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/B)) < U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)).\square$$

Es wurde gezeigt, daß der Morleyrang nicht nur von Typen, sondern auch von Formeln definiert werden kann durch $MR(\varphi) := \max(\{MR(p) \mid \varphi \in p\})$; dieses Maximum existiert nicht für alle Ränge. Ein Rang R heißt *stetig*, wenn die Mengen $\{p \in S^n(A) \mid R(p) \geq \alpha\}$ für alle A und für alle α abgeschlossen sind. Falls R stetig ist, so existiert für eine Formel $\varphi(\overline{x})$ mit Parametern aus A das Maximum von $\{R(p) \mid p \in S^n(A) \wedge \varphi \in p\}$; es hängt nicht von A ab und wird mit $R(\varphi)$ bezeichnet. Für jeden Typ p gilt $R(p) = \min(\{R(\varphi) \mid \varphi \in p\})$.

Der Shelahrang $CR(p)$ eines Typs $p \in S^n(A)$ wird rekursiv definiert durch:N

(i) $CR(p) \geq 0$ für alle p.

(ii) $CR(p) \geq \alpha + 1$ falls für alle Formeln $\varphi \in p$ ein Typ $p' \in S^n(A)$ existiert, so daß $\varphi \in p'$ und es zu jeder Kardinalzahl λ eine Menge $B \supset A$ gibt mit $|\{q \in S^n(B) \mid q \supset p' \wedge CR(q) \geq \alpha\}| > \lambda$.

(iii) Für Limeszahlen λ sei $CR(p) \geq \lambda$ genau dann, wenn $CR(p) \geq \beta$ für alle $\beta < \alpha$.

Lemma 7.4 *Falls T stabil ist, so ist der Shelahrang ein stetiger Rang; ist R ein weiterer stetiger Rang, so gilt $CR(p) \leq R(p)$ für alle p.*

Beweis Daß der Shelahrang die Rangeigenschaften (i), (ii) und (iv) erfüllt, ist trivial. Sei $p \in S(A)$ und sei $q \in S(B)$ eine nichtforkende Erweiterung von p. Durch Induktion nach α soll gezeigt werden, daß $CR(q) \geq \alpha$ aus $CR(p) \geq \alpha$ folgt. O.B.d.A. kann man annehmen, daß B ein stark $|\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)|^+$–homogenes Modell ist; dann sind je zwei nichtforkende Erweiterungen eines Typs aus $S(A)$ auf B in B über A konjugiert. Sei also $CR(p) \geq \alpha + 1$, und sei $\varphi(\overline{x}) \in q$. Aus dem Open Mapping Theorem folgt, daß es eine $L(A)$–Formel $\psi(\overline{x})$ gibt, so daß die Einschränkungen der Typen aus $NF^n(B/A)$ auf

A, die $\varphi(\overline{x})$ enthalten, gerade die Typen sind, die $\psi(\overline{x})$ enthalten. Insbesondere gilt dann $\psi \in p$, und es gibt einen Typ $p' \in S^n(A)$ mit $\psi \in p'$, so daß es zu jedem λ eine Menge C gibt, die A enthält und auf die es λ viele Erweiterungen $p_\delta(\delta < \lambda)$ von p' gibt mit $CR(p_\delta) \geq \alpha$. O.B.d.A. sei $B \downarrow_A C$. p'_δ sei eine nichtforkende Erweiterung von p_δ auf BC. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $CR(p'_\delta) \geq \alpha$, und aus dem Diamantlemma folgt, daß die $q'_\delta := p'_\delta \upharpoonright B$ über A nicht forken; falls $\lambda > \mathrm{mult}(p')$, so sind mindestens λ viele dieser q'_δ gleich einem Typ $q' \in NF^n(B/A)$; es gilt $\psi \in q'$ und somit gibt es einen zu q'über A konjugierten Typ q'' mit $\varphi \in q''$. q'' besitzt ebenfalls λ viele Erweiterungen auf eine Menge BC'' mit Shelahrang $\geq \alpha$. Es folgt $CR(q) \geq \alpha + 1$. Daß der Shelahrang stetig ist, folgt unmittelbar aus seiner Definition, und daß er der kleinste stetige Rang ist, wird gezeigt wie in Lemma 7.2. $\square$

Übung 7.3 Für eine $L(A)$–Formel $\varphi(\overline{x})$ gilt $CR(\varphi) \geq \alpha + 1$ genau dann, wenn es eine Formel $\psi(\overline{x})$ gibt, die über A forkt, mit $CR(\varphi \wedge \psi) \geq \alpha$. Es folgt daraus, daß für eine Formel φ mit $\alpha \leq CR(\varphi) < \infty$ eine Formel χ existiert mit $CR(\varphi \wedge \chi) = \alpha$.

Übung 7.4 Aus $CR(\varphi) \geq n$ folgt, daß ein Typ p existiert mit $\varphi \in p$ und $U(p) \geq n$. Ebenso folgt aus $CR(\varphi) = \infty$, daß ein Typ p existiert mit $\varphi \in p$ und $U(p) = \infty$. Insbesondere gilt also in superstabilen Theorien $CR(\varphi) < \infty$.

Übung 7.5 Aus $CR(\varphi) < \infty$ folgt $CR(\varphi) < |T|^+$. (Hinweis: Man verwende Übung 7.4 und konstruiere eine forkende Folge von Formeln $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, ...$).

Beispiel 7.1 L besitze für $i \in \mathbb{N}$ einstellige Relationszeichen P_i und zweistellige Relationszeichen E_i. T besage, daß die P_i paarweise disjunkt seien und daß E_i eine zweistellige Äquivalenzrelation auf P_i mit unendlich vielen unendlichen Klassen sei. T ist total transzendent. $p \in S^1(\emptyset)$ sei der Typ, der alle Formeln $\neg P_i(x)$ enthalte. Dann gilt $U(p) = 1$, $CR(p) = 2$ und $MR(p) = 3$.

Übung 7.6 Man zeige, daß es nichtsuperstabile Theorien gibt, in denen es einen Typ p gibt mit $U(p) < CR(p) = \infty$.

Übung 7.7 Wenn $\overline{a}$ und $\overline{b}$ über A unabhängig sind, ist $U(\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)) = U(\mathrm{tp}(\overline{a}/A)) \oplus U(\mathrm{tp}(\overline{b}/A))$.

Teil II

Konstruktion vieler Modelle nicht superstabiler Theorien

Kapitel 8

Baumindiscernibles

Lemma 8.1 *$(D_i)_{i\in I}$ sei eine unendliche Familie paarweise verschiedener Mengen, und n und m seien natürliche Zahlen; dann können die beiden folgenden Aussagen nicht gleichzeitig erfüllt sein:*

(i) für jedes Tupel $(i_0, ..., i_n)$ von paarweise verschiedenen Elementen aus I gilt

$$D_{i_0} \subset D_{i_1} \cup ... \cup D_{i_n};$$

(ii) für jedes Tupel $(i_0, ..., i_m)$ von paarweise verschiedenen Elementen aus I gilt

$$D_{i_0} \supset D_{i_1} \cap ... \cap D_{i_m}$$

.

Beweis Es gelte (i) und (ii). Sei $x \in D_i$; aus (i) folgt $x \in D_j$ für alle bis auf höchstens n−1 viele j aus I; aus (ii) folgt dann sogar $x \in D_j$ für alle $j \in I$; das widerspricht der Voraussetzung, daß die Mengen D_i paarweise verschieden sind. □

Satz 8.2 *T ist genau dann nicht superstabil, wenn es eine Folge von Formeln $\varphi_n(x;\overline{y})$ gibt, für die die Formelmenge*

(#) $\{\varphi_n^{(s\subset\eta)}(x_\eta;\overline{y}_s) \mid n < \omega \wedge \eta \in {}^\omega\omega \wedge s \in {}^n\omega\}$

konsistent ist. Dabei steht $\varphi^{(s\subset\eta)}$ für φ, wenn $s \subset \eta$ gilt, sonst für $\neg\varphi$.

Beweis Falls solche Formeln $\varphi_n(x;\overline{y})$ existieren, so ist für jedes λ auch die Formelmenge

$$\{\varphi_n^{(s\subset\eta)}(x_\eta;\overline{y}_s) \mid n < \omega \wedge \eta \in {}^\omega\lambda \wedge s \in {}^n\lambda\}$$

konsistent (wegen Kompaktheit); diese Menge werde realisiert durch a_η und $\overline{b}_s(\eta \in {}^\omega\lambda$ und $s \in {}^{<\omega}\lambda)$. Die Typen der Elemente a_η über der Menge $B := \{\overline{b}_s \mid s \in {}^{<\omega}\lambda\}$ sind paarweise verschieden; T ist folglich unstabil in allen Kardinalitäten λ mit $\lambda < \lambda^{\aleph_0}$.

Sei T zunächst unstabil. Aus Lemma 2.2 und Satz 2.3 folgt, daß es dann eine Formel $\psi(x;\overline{y})$ und Folgen $(a_i)_{i\in\mathfrak{R}}$ und $(\overline{b}_i)_{i\in\mathfrak{R}}$ gibt, so daß $\models \psi(a_i;\overline{b}_j)$ genau dann gilt, wenn $i < j$. In $\mathbb{R}$ wähle man einen Baum von nichtleeren Intervallen $[i_s, j_s]$; falls $s, t \in {}^{<\omega}\omega$ nicht vergleichbar sind, so seien $[i_s, j_s]$ und $[i_t, j_t]$ disjunkt; ist hingegen s ein Anfangsstück von t, so gelte $i_s < i_t < j_t < j_s$. Für $\eta \in {}^\omega\omega$ sei k_η eine in der Intervallschachtelung $\{[i_s, j_s] \mid s \text{ ist Anfangsstück von } \eta\}$ enthaltene reelle Zahl. $\varphi_n(x;\overline{y},\overline{z})$ sei die Formel $\psi(x;\overline{z}) \wedge \neg\psi(x;\overline{y})$ (für alle n). Dann wird (#) durch die a_{k_η} und $\overline{b}_{i_s}$ realisiert.

Sei T stabil, aber nicht superstabil. Es gibt dann einen Typ $p_\emptyset \in S(A)$ über einer Parametermenge A mit $U(p_\emptyset) = \infty$; $\mathfrak{p}$ sei eine forkende globale Erweiterung von $p_\emptyset$ mit $U(\mathfrak{p}) = \infty$ (das heißt, daß $\mathfrak{p}$ eine nichtforkende Erweiterung eines Typs mit U–Rang unendlich ist). Es gibt dann eine Formel $\psi_1(x;\overline{y})$, für die $d_\mathfrak{p}x\psi_1(x;\overline{y}) =: \chi(\overline{y};\overline{c}_0)$ nicht über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar ist. $(\overline{c}_i)_{i<\omega}$ sei eine Morleyfolge von $\mathrm{stp}(\overline{c}_0/A)$. k_i sei der kanonische Parameter von $\chi(\mathfrak{C};\overline{c}_i)$. Sei $i \neq j$; aus $\overline{c}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \overline{c}_j$ folgt $k_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A k_j$; da $\chi(\mathfrak{C};\overline{c}_i)$ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ nicht definiert werden kann, liegen die kanonischen Parameter nicht in $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$, und somit sind sie alle verschieden. Die Mengen $\chi(\mathfrak{C};\overline{c}_i)$ sind somit ebenfalls paarweise verschieden, und aus Lemma 8.1 folgt daher, daß eine der beiden folgenden Formelmengen konsistent ist:

(i) $\{\chi(\overline{y};\overline{c}_0)\} \cup \{\neg\chi(\overline{y};\overline{c}_i) \mid i > 0\}$

(ii) $\{\neg\chi(\overline{y};\overline{c}_0)\} \cup \{\chi(\overline{y};\overline{c}_i) \mid i > 0\}$.

Sei (i) konsistent (falls (ii) konsistent ist, kann man ähnlich argumentieren). $\overline{a}$ sei eine Realisierung von (i). A_1 sei eine $A\overline{a} \cup \{\overline{c}_i \mid i < \omega\}$ enthaltende Menge mit der Eigenschaft, daß jede Permutation der $\overline{c}_i$ zu einem A–Automorphismus von A_1 fortgesetzt werden kann. α_i sei ein Automorphismus aus $\mathrm{Aut}(A_1/A)$, der die $\overline{c}_i$ permutiert, mit $\alpha_i(\overline{c}_0) = \overline{c}_i$. Sei $p_i := (\mathfrak{p} \upharpoonright A_1)^{\alpha_i}$ und $a_i := \alpha_i(\overline{a})$. Dann gilt $\psi_1(x;\overline{a}_i) \in p_j$ genau dann, wenn $i = j$.

In gleicher Weise erhält man jetzt für jedes n eine Formel $\psi_n(x;\overline{y})$, eine Menge A_n, eine Familie $(p_s)_{s\in {}^n\omega}$ von Typen aus $S(A_n)$ und eine Familie $(\overline{a}_s)_{s\in {}^n\omega}$ von Tupeln mit folgenden Eigenschaften:

(i) aus $s \subset t$ folgt $p_s \subset p_t$;

(ii) haben s und t die gleiche Länge n, so sind p_s und p_t konjugiert über A_{n-1};

(iii) die Länge von s sei $n-1$; $\psi_n(x;\overline{a}_{si}) \in p_{sj}$ gilt genau dann, wenn $i = j$.

Setzt man nun $\varphi_n := \psi_1(x;\overline{y}) \wedge ... \wedge \psi_n(x;\overline{y})$, so wird durch diese Formeln (#) erfüllt. □

Der atomare Typ eines Tupels $\overline{k}$ über der leeren Menge werde mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{k})$ bezeichnet. Sei K eine Struktur; eine Familie $(a_k)_{k\in K}$ heißt K–indiscernible über A, wenn für alle Tupel $\overline{k}$ und $\overline{l}$ aus K, die bezüglich der Theorie von K dieselben atomaren Typen haben, $\mathrm{tp}(a_{\overline{k}}/A) = \mathrm{tp}(a_{\overline{l}}/A)$ folgt. Ist K eine totalgeordnete Menge, so sind K–Indiscernibles Ordnungsindiscernibles; ist K eine Menge ohne Struktur, so sind K–Indiscernibles totale Indiscernibles.

Eine Struktur K' heißt *lokal wie* K, wenn für jedes Tupel $\overline{k}'$ aus K' ein Tupel $\overline{k}$ aus K existiert mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{k}') = \mathrm{tp}_{at}(\overline{k})$. Eine Familie $(b_l)_{l\in K'}$ heißt *lokal wie* $(a_k)_{k\in K}$, wenn für alle Tupel $\overline{l} \in K'$ und für alle L–Formeln $\varphi(\overline{x})$ ein Tupel $\overline{k} \in K$ existiert mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{k}) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{l})$ und $\models \varphi(a_{\overline{k}}) \leftrightarrow \varphi(b_{\overline{l}})$. Ist $(a_k)_{k\in K}$ eine Familie von K–Indiscernibles und ist K' lokal wie K, so existiert eine Familie von K'–Indiscernibles $(b_l)_{l\in K'}$, die lokal wie $(a_k)_{k\in K}$ ist. Das folgt daraus, daß die Formelmenge

$$\{\mathrm{tp}(x_{\overline{l}}) = \mathrm{tp}(a_{\overline{k}}) \mid \mathrm{tp}_{at}(\overline{l}) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{k})\}$$

endlich erfüllbar ist.

Lemma 8.3 *Sei $(\overline{a}_i)_{i<\omega}$ eine Folge von Tupeln, die alle die gleiche Länge haben. Dann gibt es eine Folge von Ordnungsindiscernibles $(\overline{b}_i)_{i<\omega}$, die lokal wie $(\overline{a}_i)_{i<\omega}$ ist.*

Beweis F sei die Menge aller Formeln $\psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$, für die $\models \psi(\overline{a}_{m_1}, ..., \overline{a}_{m_n})$ für alle Tupel $m_1 < ... < m_n$ gilt. Aus dem Satz von Ramsey folgt, daß es zu jeder endlichen Menge von Formeln $\varphi_i(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n_i})$ eine unendliche Teilfolge von $(\overline{a}_i)_{i<\omega}$ gibt, die für alle φ_i homogen ist (das heißt, für je zwei Tupel $(\overline{a}_{m_1}, ..., \overline{a}_{m_{n_i}})$ und $(\overline{a}_{r_1}, ..., \overline{a}_{r_{n_i}})$, die in der Teilfolge liegen und für die sowohl $m_1 < ... < m_{n_i}$ als auch $r_1 < ... < r_{n_i}$ gilt, gilt auch $\models \varphi_i(\overline{a}_{m_1}, ..., \overline{a}_{m_{n_i}}) \leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}_{r_1}, ..., \overline{a}_{r_{n_i}})$). Da jedes beliebige Tupel aus einer solchen Teilfolge auch alle Formeln aus F erfüllt, folgt mit Kompaktheit, daß die Menge $F \cup \{\varphi(\overline{x}_1, ...\overline{x}_n) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}_{m_1}, ..., \overline{x}_{m_n}) \mid \varphi \text{ ist } L\text{–Formel und } m_1 < ... < m_n\}$ konsistent ist. Eine Realisierung dieser Menge liefert die gewünschte Folge $(\overline{b}_i)_{i<\omega}$. □

Ein λ–Baum ist eine Menge der Form ${}^{<\omega}\lambda \cup B$, wobei $B \subset^{\omega} \lambda$; ${}^{<\omega}\lambda \cup {}^{\omega}\lambda$ heißt *Standard-λ-Baum.* Die Baumstruktur werde beschrieben in einer Sprache $L_B := \{Inf, <\} \cup \{P_i \mid i \leq \omega\}$, wobei Inf ein zweistelliges Funktionszeichen sei für das Infimum (bezüglich der Inklusion), $<$ sei ein Relationszeichen für die lexikographische Anordnung, und P_i sei ein einstelliges Relationszeichen für die Elemente der Länge i.

Satz 8.4 *Sei K der Standard-λ-Baum, und sei $(a_k)_{k\in K}$ eine Familie, für die die Länge eines Tupels a_k nur von der Länge von k abhänge. Dann gibt es eine Familie von Baumindiscernibles $(c_k)_{k\in K}$, die lokal wie $(a_k)_{k\in K}$ ist.*

Beweis Aus Kompaktheitsgründen genügt es, die Behauptung nur für endlich tiefe „Bäume" $K = {}^h\omega$ zu zeigen. Das soll nun durch Induktion nach h gemacht werden. Für jedes $m < \omega$ sei K_m die Menge aller $k \in K$ mit $k_0 = m$; es gilt dann $K = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{m<\omega} K_m$. A_m sei der Baum $(a_k)_{k\in K_m}$.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß man für jedes $m < \omega$ eine Familie $B_m := (b_k)_{k \in K_m}$ von K_m–Indiscernibles über $\{a_\emptyset\} \cup B_0 \cup ... \cup B_{m-1} \cup \bigcup_{k>m} A_k$ finden kann, die über dieser Menge lokal wie $(a_k)_{k \in K_m}$ ist. Jedes B_m ist dann auch über $\{a_\emptyset\} \cup \bigcup_{i \neq m} B_i$ K_m–indiscernible: Anderenfalls gäbe es eine Formel $\varphi(\overline{x}_m, \overline{x}_{m+1}, ...\overline{x}_n)$ mit Parametern aus $B_0 \cup ... \cup B_{m-1}$, zwei Tupel $\overline{l}_1, \overline{l}_2 \in K_m$ mit demselben atomaren Typ und $\overline{d}_i \in B_i$ mit $\models \varphi(b_{\overline{l}_1}, \overline{d}_{m+1}, ..., \overline{d}_n) \leftrightarrow \neg\varphi(b_{\overline{l}_2}, \overline{d}_{m+1}, ..., \overline{d}_n)$. Da B_i über $B_0 \cup ... \cup B_{i-1} \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n \cup \{a_\emptyset\}$ lokal wie A_i ist, findet man Tupel $\overline{e}_n \in A_n, \overline{e}_{n-1} \in A_{n-1}, ..., \overline{e}_{m+1} \in A_{m+1}$ mit

$$\models \varphi(b_{\overline{l}_1}, \overline{e}_{m+1}, ..., \overline{e}_n) \leftrightarrow \neg\varphi(b_{\overline{l}_2}, \overline{e}_{m+1}, ..., \overline{e}_n);$$

das kann jedoch nicht sein, da B_m K_m–indiscernible ist über $B_0 \cup ... \cup B_{m-1} \cup A_{m+1} \cup ... \cup A_n \cup \{a_\emptyset\}$. Der Baum $(b_k)_{k \in K}$ (wobei $b_\emptyset := a_\emptyset$) ist lokal wie $(a_k)_{k \in K}$: seien $\overline{k}_i \in K_i$ Tupel, und sei $\varphi(\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n)$ eine Formel mit

$$\models \varphi(b_{\overline{k}_0}, ..., b_{\overline{k}_n}).$$

Man findet nun (von oben nach unten) Tupel $\overline{l}_i \in K_i$ mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{k}_i) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{l}_i)$ und $\models \varphi(a_{\overline{l}_0}, ..., a_{\overline{l}_n})$.

Jedes B_m werde nun als ein unendlich langes Tupel aufgefaßt. Es gibt nach Lemma 8.3 eine Folge $(C_m)_{m<\omega}$ von Ordnungs–Indiscernibles über $\{a_\emptyset\}$, die als Folge lokal wie $(B_m)_{m<\omega}$ ist. Sei $C_m = (c_k)_{k \in K_m}$ und sei $c_\emptyset := a_\emptyset$; $(c_k)_{k \in K}$ ist dann auch als Baum lokal wie $(b_k)_{k \in K}$.

Jedes C_m ist K_m–indiscernible über $\{c_\emptyset\} \cup \bigcup_{i \neq m} C_i$: anderenfalls gäbe es eine Formel $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$, Tupel $\overline{l}_1, \overline{l}_2 \in K_m$ und $\overline{k} \in K \setminus K_m$ mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{l}_1\overline{k}) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{l}_2\overline{k})$ und

$$\models \varphi(c_{\overline{l}_1}, c_{\overline{k}}) \leftrightarrow \neg\varphi(c_{\overline{l}_2}, c_{\overline{k}});$$

da $(c_k)_{k \in K}$ lokal wie $(b_k)_{k \in K}$ ist, existieren ein $n < \omega$ und Tupel $\overline{s}_1, \overline{s}_2 \in K_n$ und $\overline{t} \in K \setminus K_n$ mit $\mathrm{tp}_{at}(\overline{s}_1\overline{t}) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{s}_2\overline{t})$ und

$$\models \varphi(b_{\overline{l}_1}, b_{\overline{t}}) \leftrightarrow \neg\varphi(b_{\overline{l}_2}, b_{\overline{t}});$$

das ist unmöglich, denn $(b_l)_{l \in K_n}$ ist indiscernible. Da die Folge $(C_m)_{m<\omega}$ indiscernible ist und da die Bäume $C_m = (c_k)_{k \in K_m}$ K_m–indiscernible über $\{c_\emptyset\} \cup \bigcup_{i \neq m} C_i$ sind, ist auch $(c_k)_{k \in K}$ K–indiscernible. $\square$

T sei eine nicht superstabile Theorie, und sei K der Standard-λ-Baum; aus Satz 8.2 und aus Satz 8.4 folgt, daß es Formeln $\varphi_n(x; \overline{y})$ und eine Familie $(\overline{a}_k)_{k \in K}$ von K–Indiscernibles gibt mit der folgenden Eigenschaft:

Sei $k \in {}^n\lambda$ und $\eta \in {}^\omega\lambda$, so gilt $\models \varphi_n(a_\eta; \overline{a}_k)$ genau dann, wenn $k \subset \eta$.

Kapitel 9

Die Konstruktion

Sei λ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl. Ein *Club* von λ ist eine abgeschlossene und unbeschränkte Teilmenge von λ; der von allen Club erzeugte Filter heißt Clubfilter. Eine Teilmenge von λ heißt *stationär*, wenn sie jeden Club trifft. Nach Solovay gibt es λ viele paarweise disjunkte stationäre Teilmengen von $\Omega := \{\alpha < \lambda \mid cf(\alpha) = \omega\}$. Es gibt folglich 2^λ viele modulo des Clubfilters nicht ineinander enthaltene stationäre Teilmengen von Ω.

Satz 9.1 *T sei nicht superstabil, und λ sei eine reguläre Kardinalzahl mit $\lambda > |T|$. Dann gibt es 2^λ viele paarweise nicht isomorphe Modelle von T der Mächtigkeit λ.*

Beweis Man wähle eine Folge von L–Formeln $\varphi_n(x;\overline{y})$ wie in Satz 8.2. T^{sk} sei eine Skolemerweiterung von T mit $|T| = |T^{sk}|$; L^{sk} sei die zu T^{sk} gehörende Sprache. Es gibt dann bezüglich T^{sk} eine Familie $(\overline{a}_s)_{s\in{}^{\leq\omega}\lambda}$ von Baumindiscernibles mit der Eigenschaft:

Für alle $s \in {}^n\lambda$ und für alle $\eta \in {}^\omega\lambda$ gilt $\models \varphi_n(a_\eta;\overline{a}_s)$ genau dann, wenn $s \subset \eta$.

Sei S eine stationäre Teilmenge von Ω. Für jedes $\delta \in S$ sei $(\delta_i)_{i<\omega}$ eine aufsteigende Folge mit $\delta = \sup(\delta_i)_{i<\omega}$. B_S sei die Menge aller Folgen $(\delta_i)_{i<\omega}$ mit $\delta \in S$ und K_S sei der λ -Baum ${}^{<\omega}\lambda \cup B_S$. $\overline{M}_S$ sei nun das durch $(\overline{a}_s)_{s\in K_S}$ erzeugte Modell von T^{sk}, und M_S sei der L-Redukt von $\overline{M}_S$.

Es soll nun gezeigt werden, daß M_{S_1} sich nicht elementar in M_{S_2} einbetten läßt, wenn S_1 modulo des Clubfilters nicht in S_2 enthalten ist. Wir nehmen an, daß eine solche elementare Einbettung $f : M_{S_1} \to M_{S_2}$ doch existiert. Zu jedem $s \in K_{S_1}$ existiert ein L^{sk}-Term τ_s und ein Tupel $\overline{v}_s \in K_{S_2}$ mit $f(\overline{a}_s) = \tau_s(\overline{a}_{\overline{v}_s})$. Für jedes $\alpha < \lambda$ sei $K^\alpha := K_{S_2} \cap {}^{\leq\omega}\alpha$. D sei die Menge aller $\alpha < \lambda$ mit der Eigenschaft, daß aus $s \in {}^{<\omega}\alpha$ auch $\overline{v}_s \in K^\alpha$ folgt; da es zu jedem $\alpha < \lambda$ ein $\beta < \lambda$ gibt mit $\overline{v}_s \in K^\beta$ für alle $s \in {}^{<\omega}\alpha$, ist D ein Club.

Für $\alpha < \lambda$ gilt $|K^\alpha| < \lambda$ wegen $|K^\alpha \cap {}^\omega\alpha| = |\alpha \cap S_2| < \lambda$. Über K^α gibt es dann höchstens $|K^\alpha|$ viele atomare Typen (in der Sprache L_B aus Kapitel 8) der Form $\mathrm{tp}_{at}(s/K^\alpha)$ für ein s aus K_{S_2}; ein nichtrealisierter Typ enthält nämlich höchstens eine Formel der Form $P_i(x)$ und höchstens endlich viele Formeln der Form $\inf(x,t) = t$; durch diese Formeln wird ein Typ eindeutig bestimmt. Durch Induktion zeigt man, daß es weniger als λ viele Typen $\mathrm{tp}_{at}(\overline{s}/K^\alpha)$ von (endlichen) Tupeln $\overline{s}$ aus K_{S_2} gibt.

$F : \lambda \to \lambda$ sei eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:

> für jedes $s \in {}^{<\omega}(\alpha+1)$ und für jedes $\beta < \lambda$ existiert ein $\delta < F(\alpha)$ mit $\tau_{s\beta} = \tau_{s\delta}$ und $\mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_{s\beta}/K^\alpha) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_{s\delta}/K^\alpha)$.

Solche Abbildungen existieren, denn es gibt höchstens $|T| < \lambda$ viele L^{sk}–Terme. $\overline{D}$ sei die Menge aller α aus D, für die aus $\beta < \alpha$ auch $F(\beta) < \alpha$ folgt. D^* sei die Menge aller Häufungspunkte von $\overline{D}$. Sowohl $\overline{D}$ als auch D^* sind Clubs.

Da sS_1 modulo des Clubfilters nicht in S_2 enthalten ist, gibt es ein $\delta \in S_1 \cap D^*$ mit $\delta \notin S_2$. Es gibt zu jedem $i < \omega$ ein $j < \omega$ mit $j > i$ und $F(\delta_j) < \delta_{j+1}$, denn da δ in D^* liegt, gibt es ein $\varepsilon \in \overline{D}$ mit $\delta_i < \varepsilon < \delta$; j sei die größte natürliche Zahl mit $\delta_j < \varepsilon$; dann gilt $F(\delta_j) < \varepsilon \leq \delta_{j+1}$. Sei $\eta := (\delta_i)_{i<\omega}$; da δ nicht in S_2 liegt, gibt es ein $\alpha < \delta$, so daß in $\overline{v}_\eta$ keine Ordinalzahl auftritt, die im Intervall $]\alpha,\delta[$ liegt. Man wähle nun ein i mit $\alpha < \delta_i$ und $F(\delta_i) < \delta_{i+1}$. s sei das Tupel $(\delta_0,...,\delta_i) \in K_{S_1}$ und β sei δ_{i+1}; es gibt ein $\gamma < \beta$ mit $\tau_{s\beta} = \tau_{s\gamma}$ und $\mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_{s\beta}/K^\alpha) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_{s\gamma}/K^\alpha)$. $s\beta$ und $s\gamma$ liegen beide in ${}^{<\omega}\delta$, somit liegen auch $\overline{v}_{s\beta}$ und $\overline{v}_{s\gamma}$ in ${}^{<\omega}\delta$; da in $\overline{v}_\eta$ keine Ordinalzahlen aus dem Intervall $]\alpha, \delta[$ auftreten, gilt $\mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_\eta, \overline{v}_{s\beta}) = \mathrm{tp}_{at}(\overline{v}_\eta, \overline{v}_{s\gamma})$. Es gilt $M_1 \models \varphi_{i+2}(a_\eta; \overline{a}_{s\beta})$ und somit $M_2 \models \varphi_{i+2}(\tau_\eta(\overline{a}_{\overline{v}_\eta}); \tau_{s\beta}(\overline{a}_{\overline{v}_{s\beta}}))$, andererseits gilt $M_2 \models \neg\varphi_{i+2}(a_\eta; \overline{a}_{s\gamma})$ und somit $M_2 \models \neg\varphi_{i+2}(\tau_\eta(\overline{a}_{\overline{v}_\eta}); \tau_{s\gamma}(\overline{a}_{\overline{v}_{s\gamma}}))$. Das widerspricht der Indiscernibilität des Baumes $(\overline{a}_s)_{s \in {}^{\leq\omega}\lambda}$. $\square$

Teil III

Primmodelle und Primärmodelle

Kapitel 10

Primerweiterungen

Sei A eine Menge und M ein Modell, das A umfaßt. M/A heißt *Primerweiterung*, wenn für alle Modelle N, die A umfassen, eine elementare Einbettung $f : M \to N$ existiert, die auf A die Identität ist; M heißt dann auch *Primmodell* von A. Ist M/A algebraisch, so ist M/A eine Primerweiterung, denn für jedes Modell N mit $A \subset N$ gilt dann sogar $M \subset N$. Ist T zum Beispiel die Theorie einer unendlichen Menge (ohne Struktur), so ist M/A genau dann prim, wenn A endlich und M abzählbar ist oder wenn A unendlich ist und A und M gleich sind.

M/A heißt *atomar*, wenn für alle (endlichen) Tupel $\overline{b}$ aus M der Typ von $\overline{b}$ über A isoliert ist. Ist $M \setminus A$ abzählbar und ist M/A atomar, so ist M/A auch prim.

Eine Folge $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ heißt *Konstruktion* über A, wenn für alle $\alpha < \lambda$ der Typ

$$\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup \{b_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

isoliert ist; $\{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ heißt dann *konstruierbar* über A. M/A heißt *Primärerweiterung*, wenn M ein Modell ist, das A enthält und das über A konstruierbar ist.

Lemma 10.1 *$\overline{a}$ und $\overline{b}$ seien endliche Tupel; dann ist $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/C)$ genau dann isoliert, wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}/C\overline{b})$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}/C)$ isoliert sind.*

□

Aus dem Lemma folgt unmittelbar, daß B/A atomar ist, wenn B über A konstruierbar ist.

Lemma 10.2 *Ist M/A primär, so ist M/A prim; sind T und A abzählbar, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) M/A ist prim.

(ii) M/A ist primär.

(iii) M ist abzählbar, und M/A ist atomar.

Beweis Ist $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ eine Konstruktion von M über A, und ist N ein Modell, das A enthält, so kann man rekursiv eine Konstruktion $(c_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ in N über A konstruieren, so daß die Abbildung $b_\alpha \mapsto c_\alpha$ eine elementare Einbettung über A von M in N ist. Sind T und A abzählbar, so folgt aus dem *„Omitting Type Theorem“*, daß ein Primmodell über A atomar über A ist, und aus Lemma 10.1 folgt, daß abzählbare atomare Erweiterungen primär sind. □

Satz 10.3 *Sei T abzählbar. Dann sind die vier folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Jedes (abzählbare) A hat eine Primärerweiterung.

(ii) Jedes (abzählbare) A hat eine Primerweiterung.

(iii) Für jedes abzählbare A liegen die isolierten Typen dicht in $S^1(A)$.

(iv) Für jedes A liegen die isolierten Typen dicht in $S^1(A)$.

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii) folgt aus Lemma 10.2.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Ist M/A prim, so folgt aus Lemma 10.2, daß M/A atomar ist. Ist $\varphi(x;\overline{a})$ eine konsistente Formel mit $\overline{a} \in A$, so gibt es ein $b \in M$ mit $\models \varphi(b;\overline{a})$; $\varphi(x;\overline{a})$ liegt dann im isolierten Typ $\mathrm{tp}(b/A)$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): $\varphi(x;\overline{a})$ sei eine Formel mit $\overline{a} \in A$. $\varphi(x;\overline{a})$ ist genau dann nicht komplettierbar über A, wenn folgendes gilt:

(#) Zu jeder $L(A)$–Formel $\psi(x)$, für die $\varphi(x;\overline{a}) \wedge \psi(x)$ erfüllbar ist, existiert eine $L(A)$–Formel $\chi(x)$, für die sowohl $\varphi(x) \wedge \psi(x) \wedge \chi(x)$ als auch $\varphi(x) \wedge \psi(x) \wedge \neg\chi(x)$ erfüllbar sind.

Falls nun $\varphi(x;\overline{a})$ nicht über A komplettierbar ist, so existiert eine abzählbare Teilmenge A_0 von A mit $\overline{a} \in A_0$, so daß die Abschlußbedingung (#) auf A_0 ebenfalls zutrifft. Dann ist $\varphi(x;\overline{a})$ in A_0 ebenfalls nicht komplettierbar.

(iv)$\Rightarrow$(i): Es gelte (iv), und M sei ein beliebiges Modell, das A enthält. $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sei eine Konstruktion über A mit folgenden Eigenschaften:

(a) Alle b_α liegen in M und sind paarweise verschieden.

(b) Die Konstruktion läßt sich nicht verlängern zu einer Konstruktion $(b_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$, die (a) ebenfalls erfüllt.

Sei $N := \{b_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Es soll mit dem Tarski-Test gezeigt werden, daß N ein Modell ist. Sei $\varphi(x)$ eine konsistente $L(N)$–Formel; es gibt dann einen isolierten Typ $p \in S^1(N)$ mit $\varphi \in p$; p wird in M realisiert. Diese Realisierungen müssen in N liegen, sonst könnte man $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ verlängern. □

Die Abzählbarkeit der Sprache L wurde im obenstehenden Beweis für (iv)$\Rightarrow$(i) nicht benützt. Es folgt, daß für total transzendente Theorien immer Primmodelle existieren, denn in total transzendenten Theorien gibt es zu jeder $L(A)$–Formel $\varphi(x)$ eine $L(A)$–Formel $\psi(x)$, die über A vollständig ist und die $\varphi(x)$ impliziert (man wähle für $\psi(x)$ unter allen $L(A)$–Formeln, die $\varphi(x)$ implizieren, eine mit minimalem Morleyrang und minimalem Morleygrad).

Die beiden folgenden Lemmas werden (zusammen mit Lemma 10.1) benötigt, um die Eindeutigkeit von Primärerweiterungen zu zeigen.

Lemma 10.4 *Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{tp}(A/B) \vdash \mathrm{tp}(A/BC)$

(ii) $\mathrm{tp}(C/B) \vdash \mathrm{tp}(C/BA)$

(iii) $\mathrm{tp}(A/B) \cup \mathrm{tp}(C/B) \vdash \mathrm{tp}(AC/B)$.

($\mathrm{tp}(A/B)$ *ist eine etwas ungenaue Schreibweise für einen I–Typ* $\mathrm{tp}((a_i)_{i\in I}/B)$*, wobei* $(a_i)_{i\in I}$ *eine Aufzählung von A sei.)*

Falls $\mathrm{tp}(A/B)$ und $\mathrm{tp}(C/B)$ diese Bedingungen erfüllen, heißen sie schwach orthogonal.

Beweis Es gelte (i), $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ sei eine $L(B)$–Formel, und $\overline{a} \in A$ und $\overline{c} \in C$ seien Tupel mit $\models \varphi(\overline{a};\overline{c})$. Aus (i) folgt, daß es eine $L(B)$–Formel $\psi(\overline{x}) \in \mathrm{tp}(A/B)$ gibt mit $\models \psi(\overline{x}) \rightarrow \varphi(\overline{x};\overline{c})$; dann ist $\forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \rightarrow \varphi(\overline{x};\overline{y})) \in \mathrm{tp}(C/B)$, und somit folgt $\mathrm{tp}(A/B) \cup \mathrm{tp}(C/B) \vdash \varphi(\overline{x};\overline{y})$.

Es gelte nun (iii). Sei $\varphi(\overline{x};\overline{y})$ eine $L(B)$–Formel und seien $\overline{a} \in A$ und $\overline{c} \in C$ Tupel mit $\models \varphi(\overline{a};\overline{c})$. Aus (iii) folgt, daß es $L(B)$–Formeln $\psi_1(\overline{x}) \in \mathrm{tp}(A/B)$ und $\psi_2(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(C/B)$ gibt mit $\models \psi_1(\overline{x}) \wedge \psi_2(\overline{y}) \rightarrow \varphi(\overline{x};\overline{y})$. Dann ist $\models \psi_1(\overline{x}) \rightarrow \varphi(\overline{x};\overline{c})$, also $\mathrm{tp}(A/B) \vdash \varphi(\overline{x};\overline{c})$.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) gilt aus Symmetriegründen ebenso. □

Lemma 10.5 *Ist A/B atomar und ist C/BA atomar über Parametern aus B, so ist A/BC atomar.*

Beweis C/BA atomar über Parametern aus B bedeutet, daß für jedes (endliche) Tupel $\overline{c}$ aus C der Typ $\mathrm{tp}(\overline{c}/BA)$ durch eine $L(B)$–Formel isoliert wird. Wir brauchen davon nur die Folgerung $\mathrm{tp}(C/B) \vdash \mathrm{tp}(C/BA)$. Aus Lemma 10.4 folgt daraus $\mathrm{tp}(A/B) \vdash \mathrm{tp}(A/BC)$; jede $L(B)$–Formel $\varphi(\overline{x})$, die $\mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ isoliert ($\overline{a} \in A$), isoliert folglich auch $\mathrm{tp}(\overline{a}/BC)$. □

Sei B konstruierbar über A durch eine Konstruktion $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$; für jedes $\alpha < \lambda$ wähle man eine endliche Teilmenge C_α von $\{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$, so daß $\mathrm{tp}(b_\alpha/AC_\alpha)$ isoliert ist. $E \subset B$ heißt abgeschlossen, wenn aus $b_\alpha \in E$ auch $C_\alpha \subset E$ folgt. $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ist dann eine Konstruktion über AE: man betrachte irgendein b_α; falls $b_\alpha \in E$, so ist nichts zu zeigen; anderenfalls sei $B' := \{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$ und $E' := E \setminus B'$. b_α/AB' ist dann atomar, und $E'/AB'b_\alpha$ ist atomar über Parametern aus AB'; aus Lemma 10.5 folgt, daß $b_\alpha/AB'E'$ und somit auch b_α/AEB' atomar sind.

Satz 10.6 *(Ressayre) Sind M und M' Primärerweiterungen von A, so sind M und M' über A isomorph.*

Beweis Sei $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ eine Konstruktion von M über A, und sei $(b'_\alpha)_{\alpha<\lambda'}$ eine Konstruktion von M' über A; die Mengen $C_\alpha \subset M$ und $C'_\alpha \subset M'$ seien wie oben gewählt. $f_0 : E_0 \to E'_0$ sei ein maximaler elementarer A–Isomorphismus abgeschlossener Mengen $E_0 \subset M$ und $E'_0 \subset M'$. Falls $E_0 \neq M$, so gibt es eine abgeschlossene Menge E_1 mit $E_0 \subsetneqq E_1 \subset M$ und $|E_1 \setminus E_0| < \aleph_0$. Da E_1 über AE_0 atomar ist, gibt es eine Erweiterung $f_1 : E_1 \to E'_1$ von f_0. E'_1 braucht dann nicht abgeschlossen zu sein, aber es gibt eine abgeschlossene Menge E'_2 mit $E'_1 \subset E'_2 \subset M'$ und $|E'_2 \setminus E'_1| < \aleph_0$. Dann existiert eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $E_2 \subset M$ und eine Fortsetzung von f_1 zu einem Isomorphismus $f_2 : E_2 \to E'_2$. Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man eine aufsteigende Folge von elementaren Isomorphismen $f_i : E_i \to E'_i$ mit $|E_{i+1} \setminus E_i| = |E'_{i+1} \setminus E'_i| < \aleph_0$ und E_{2i+1} und E'_{2i} abgeschlossen. $E_\infty := \cup E_i$ und $E'_\infty := \cup E'_i$ sind dann abgeschlossen, und $f_\infty := \cup f_i$ ist ein elementarer Isomorphismus von E_∞ auf E'_∞, was der Maximalität von f_0 widerspricht. □

Satz 10.7 *(Shelah) Ist T stabil und abzählbar, so ist jede Teilmenge einer über A konstruierbaren Menge wieder über A konstruierbar.*

Aus diesem Satz folgt unmittelbar das folgende Korollar:

Korollar 10.8 *In abzählbaren, stabilen Theorien sind Primmodelle immer eindeutig bestimmt, wenn Primärerweiterungen existieren.*

□

Zum Beweis des Satzes wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 10.9 *Sei T abzählbar und stabil; sind A und B über C unabhängig, und ist B' abzählbar, so gibt es eine abzählbare Teilmenge C' von A, so daß A und BB' über CC' unabhängig sind.*

Beweis C' sei eine abzählbare Teilmenge von A mit $ABC \perp_{BCC'} B'$; dann gilt auch $A \perp_{BCC'} B'$, und wegen $A \perp_{CC'} B$ folgt $A \perp_{CC'} BB'$. □

Beweis von Satz 10.7 Sei B konstruierbar über A durch $(b_\alpha|\alpha < \lambda)$; die Mengen C_α seien definiert wie oben. D sei eine Teilmenge von B.

Falls E_0 eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von B ist und falls E_1 eine Menge ist mit $E_0 \subset E_1 \subset B$ und $|E_1 \setminus E_0| \leq \aleph_0$, so existiert eine abgeschlossene Teilmenge E_2 von B mit $E_1 \subset E_2$ und $|E_2 \setminus E_1| \leq \aleph_0$. Ebenso existiert für jedes Paar von Mengen $E_2 \subset E_3 \subset B$ mit $|E_3 \setminus E_2| \leq \aleph_0$ und $D \perp_{A\cup(D\cap E_2)} E_2$ eine Menge E_4 mit $E_3 \subset E_4 \subset B$, $|E_4 \setminus E_3| \leq \aleph_0$ und $D \perp_{A\cup(D\cap E_4)} E_4$ (das folgt mit Lemma 10.9).

Wendet man diese beiden Abschlußprozesse abwechslungsweise ω oft an, so erhält man, daß es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge E von B mit $D \perp_{A\cup(D\cap E)} E$ und zu jeder Menge E' mit $E \subset E' \subset B$ und $|E' \setminus E| \leq \aleph_0$ eine abgeschlossene Menge E'' gibt mit $E' \subset E'' \subset B$, $|E'' \setminus E'| \leq \aleph_0$ und $D \perp_{A\cup(D\cap E'')} E''$. Man kann daher eine stetige Kette $(B_\alpha)_{\alpha<\xi}$ von abgeschlossenen Mengen konstruieren mit $B_0 = \emptyset$, $\cup B_\alpha = B$, $|B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha| \leq \aleph_0$ und $D \perp_{A\cup(D\cap B_\alpha)} B_\alpha$. Zu jedem α wähle man eine ω–Aufzählung von $D \cap (B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha)$; diese Aufzählungen setze man zu einer Aufzählung (d_β) von D zusammen. Sei $d_\beta \in B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$. Es ist zu zeigen, daß $\mathrm{tp}(d_\beta/A \cup \{d_\gamma \mid \gamma < \beta\})$ isoliert ist. Sei $D' := \{d_\gamma \mid \gamma < \beta\} \setminus B_\alpha$. Es gilt $D' \cup \{d_\beta\} \perp_{A\cup(D\cap B_\alpha)} B_\alpha$ und folglich $d_\beta \perp_{A\cup(D\cap B_\alpha)\cup D'} B_\alpha$; da $\mathrm{tp}(d_\beta/AB_\alpha D')$ isoliert ist, folgt aus dem Open–Mapping–Theorem, daß auch $\mathrm{tp}(d_\beta/A \cup (D \cap B_\alpha) \cup D')(= \mathrm{tp}(d_\beta/A \cup \{d_\gamma \mid \gamma < \beta\}))$ isoliert ist. □

Für die Eindeutigkeit der Primerweiterungen sind die Voraussetzungen der Abzählbarkeit und der Stabilität von T notwendig:

Beispiel 10.1 L enthalte für jede Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ ein zweistelliges Relationszeichen E_α. Die Theorie T besage, daß jedes E_α eine Äquivalenzrelation sei. E_0 besitze nur eine Äquivalenzklasse; ferner sei für $\alpha < \beta < \omega_1$ jede E_α–Äquivalenzklasse eine Vereinigung von unendlich vielen E_β–Äquivalenzklassen. T ist vollständig, stabil und läßt Quantorenelimination zu. Jede konsistente $L(A)$–Formel $\varphi(x)$ läßt sich über A vervollständigen: da T Quantorenelimination zuläßt, kann man o.B.d.A. annehmen, daß φ von der Form $xE_\alpha a \wedge \bigwedge_i \neg xE_{\beta_i} b_i \wedge \bigwedge_i x \neq c_i$ ist; falls φ in A realisiert wird, so ist nichts zu zeigen; anderenfalls ist $xE_\alpha a \wedge \bigwedge_i \neg xE_{\alpha+1} b_i \wedge \bigwedge_i \neg xE_{\alpha+1} c_i$ eine Komplettierung von φ. Es existieren folglich Primärerweiterungen. Sei nun M die Primärerweiterung der leeren Menge.

Dann besitzt jede Kette $(K_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ von E_α–Äquivalenzklassen in M einen nichtleeren Durchschnitt: anderenfalls gäbe es nämlich eine abzählbare Teilmenge A von M und eine Limesordinalzahl $\eta < \omega_1$ mit:

(i) A ist abgeschlossen (bezüglich einer fest gewählten Konstruktion);

(ii) $A \cap \bigcap_{\alpha<\eta} K_\alpha = \emptyset$;

(iii) $A \cap K_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha < \eta$.

M/A ist atomar. Sei nun $c \in K_\eta$; $\mathrm{tp}(c/A)$ wird dann isoliert durch eine Formel $\varphi(x;\overline{a})$; wegen (ii) existiert ein $\alpha < \eta$ mit $\overline{a} \cap K_\alpha = \emptyset$. Aus (iii) folgt, daß ein $d \in A \cap K_\alpha$ existiert; wegen $\overline{a} \cap K_\alpha = \emptyset$ hätte man auch $\models \varphi(d;\overline{a})$; das ist aber unmöglich, weil φ $\mathrm{tp}(c/A)$ isoliert. Es gilt folglich $\cap (K_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \neq \emptyset$.

Sei nun $a \in M$; N sei die Menge aller b aus M, für die eine Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ existiert mit $\models \neg aE_\alpha b$; N ist dann ebenfalls ein Primmodell, aber M und N sind nicht isomorph.

Beispiel 10.2 M sei ein $\aleph_2$–saturiertes Modell der Theorie aus dem vorangehenden Beispiel. T sei die Theorie der zweisortigen Struktur $M^* := (\omega_1, M; <, R)$, wobei $<$ die übliche Anordnung von ω_1 sei und $M^* \models R(\alpha; m_1, m_2)$ gelte genau dann wenn $\alpha \in \omega_1$, $m_1, m_2 \in M$ und $M \models E_\alpha(m_1, m_2)$. T ist natürlich nicht stabil. Man kann zeigen, daß in T alle Formeln mit einer freien Variablen komplettierbar sind; nach Satz 10.3 existieren dann Primärmodelle. Wie im vorangehenden Beispiel folgt, daß über der Menge ω_1 Primmodelle existieren, die nicht primär sind.

A und B seien Teilmengen von M. B heißt *normal* über A in M, wenn für $\overline{b} \in B$ und $\overline{c} \in M$ aus $\mathrm{tp}(\overline{b}/A) = \mathrm{tp}(\overline{c}/A)$ auch $\overline{c} \in B$ folgt.

Lemma 10.10 *Für alle C und für alle n sollen die isolierten Typen dicht in $S^n(C)$ liegen. Sei M/A atomar, und sei $B \subset M$ normal über A in M. Dann ist M/AB atomar.*

Beweis Sei $\overline{m} \in M$; $\mathrm{tp}(\overline{m}/A)$ werde durch $\varphi(\overline{x})$ isoliert. $\psi(\overline{x};\overline{b})$ sei eine Komplettierung von $\varphi(\overline{x})$ über AB, und ψ werde in M durch $\overline{n}$ realisiert. Es gilt $\mathrm{tp}(\overline{m}/A) = \mathrm{tp}(\overline{n}/A)$, und somit existiert ein $\overline{b}' \in M$ mit $\models \psi(\overline{m};\overline{b}') \wedge \chi(\overline{b}')$, wobei $\chi(\overline{x})$ den Typ von $\overline{b}$ über A isoliere; dann gilt auch $\mathrm{tp}(\overline{b}/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$ und somit $\overline{b}' \in B$. $\psi(\overline{x};\overline{b}')$ isoliert $\mathrm{tp}(\overline{m}/AB)$: anderenfalls gäbe es nämlich eine $L(A)$–Formel $\xi(\overline{x};\overline{y})$ und ein $\overline{c} \in B$, so daß sowohl $\psi(\overline{x};\overline{b}') \wedge \xi(\overline{x};\overline{c})$ als auch $\psi(\overline{x};\overline{b}') \wedge \neg\xi(\overline{x};\overline{c})$ konsistent wären. Aus $\mathrm{tp}(\overline{b}/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$ und aus der Normalität von B folgte wieder, daß ein $\overline{c}' \in B$ existierte, so daß $\psi(\overline{x};\overline{b}) \wedge \xi(\overline{x};\overline{c}')$ und $\psi(\overline{x};\overline{b}) \wedge \neg\xi(\overline{x};\overline{c}')$ konsistent wären; das ist jedoch unmöglich da ψ eine komplette Formel ist. $\square$

Satz 10.11 *T sei eine abzählbare, superstabile Theorie, in der es zu jeder Menge eine Primärerweiterung gibt. M/A ist genau dann primär, wenn M/A atomar ist und falls in M keine überabzählbare Menge von Indiscernibles über A existiert.*

(Die Voraussetzungen werden nicht alle gleichzeitig gebraucht: Für $\Rightarrow$ braucht man, daß T abzählbar und stabil ist, für $\Leftarrow$ braucht man, daß T superstabil ist und Primärerweiterungen zuläßt.)

Beweis Sei M/A primär. M/A ist dann atomar. Sei U eine Menge von A-Indiscernibles der Kardinalität $\aleph_1$. Es existiert dann eine Konstruktion $(b_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ über A in M, mit $U \subset B := \{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$. C sei die Menge aller Ordinalzahlen $\alpha < \omega_1$ mit $U \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup (U \cap B_\alpha)} B_\alpha$, wobei $B_\alpha := \{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Aus den Stetigkeitseigenschaften des Forkings folgt leicht, daß C ein Club in ω_1 ist: Sei D eine Teilmenge von C mit dem Supremum $\lambda < \omega_1$, so gilt $U \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup (U \cap B_\lambda)} B_\alpha$ für alle $\alpha \in D$; daher gilt auch $U \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup (U \cap B_\lambda)} B_\lambda$, und λ gehört daher zu C. Sei $\alpha_0 < \omega_1$; mit Lemma 10.9 kann man eine aufsteigende Folge $(\alpha_i)_{i<\omega}$ konstruieren mit $U \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup (U \cap B_{\alpha_{i+1}})} B_{\alpha_i}$; falls λ das Supremum der Folge (α_i) ist, so gilt $U \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A \cup (U \cap B_\lambda)} B_{\alpha_i}$ für alle $i < \omega$, woraus wieder $\lambda \in C$ folgt.

Aus 5.5 folgt, daß $U \setminus B_\alpha$ über AB_α indiscernible ist für $\alpha \in C$. Sei $\alpha \in C$ und $u \in U \setminus B_\alpha$; dann gibt es eine Ordinalzahl $f(\alpha) < \alpha$, so daß $\mathrm{tp}(u/B_\alpha)$ isoliert wird durch Parameter aus $B_{f(\alpha)+1}$; $f(\alpha)$ hängt nicht von der Wahl des u ab. Die Abbildung $f : C \to \omega_1$ ist regressiv, nach dem Satz von Fodor gibt es daher eine unbeschränkte Teilmenge S von C, auf der f konstant ist. Man wähle nun $\alpha < \beta$ aus S so, daß ein $u \in B_\beta \setminus B_\alpha$ existiert; ferner sei $v \in B \setminus B_\beta$. Es folgt $\mathrm{tp}(v/B_{f(\beta)+1}) \vdash \mathrm{tp}(v/B_\beta)$; andererseits gilt wegen $B_{f(\beta)+1} \subset B_\alpha$ auch $\mathrm{tp}(v/B_{f(\beta)+1}) = \mathrm{tp}(u/B_{f(\beta)+1})$. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $\mathrm{tp}(u/B_\beta) \neq \mathrm{tp}(v/B_\beta)$.

Sei nun M/A atomar, und M enthalte keine überabzählbare Menge von A–Indiscernibles. Jedem Element c aus M soll nun eine Folge $p_0^c, ..., p_{m_c}^c$ von starken Typen zugeordnet werden: für alle $c \in M$ sei $p_0^c := \mathrm{stp}(c/A)$. Seien nun für $i \leq m$ schon alle $p_i^c \in ST(AB_i^c)$ definiert; dabei seien die B_i^c endlich und c realisiere p_i^c. Falls p_m^c algebraisch ist, so setze man $m_c := m$; c ist dann die einzige Realisierung von p_m^c. Ist p_m^c nicht algebraisch, so wähle man eine maximale Folge $(b_i)_{i<\alpha}$ von über AB_m^c unabhängigen Realisierungen von p_m^c in M. Da es in M keine überabzählbare Menge von A–Indiscernibles gibt, kann man $\alpha \leq \omega$ voraussetzen. Ferner hänge die Wahl der Folge $(b_i)_{i<\alpha}$ nur von p_m^c ab (und nicht von c). Es gilt $c \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{AB_m^c} \{b_i \mid i < \alpha\}$, und es gibt folglich ein minimales $j < \omega$ mit $c \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{AB_m^c} \{b_i \mid i < j\}$; man setze $B_{m+1}^c := B_m^c \cup \{b_i \mid i < j\}$ und $p_{m+1}^c := \mathrm{stp}(c/AB_{m+1}^c)$. Die Mengen B_m^c sind endlich.

Da p_{m+1}^c eine forkende Erweiterung von p_m^c ist, bricht die Folge $p_0^c, p_1^c, p_2^c, ...$ nach endlich vielen Schritten ab, denn T ist superstabil.

Für ein festes p_{m-1}^c wähle man eine Wohlordnung aller Typen p_m^d mit $p_{m-1}^c = p_{m-1}^d$, wobei folgendes gelten soll:

(i) falls $B_m^d \subsetneqq B_m^e$, so sei $p_m^d < p_m^e$;

(ii) falls $b_i \in B_m^d$, so sei $p_m^{b_i} \leq p_m^d$.

Die Elemente c aus M werden nun angeordnet durch die lexikographische Ordnung der Tupel $p_0^c, ...p_{m_c}^c$. Diese Ordnung ist eine Wohlordnung von M, denn sonst gäbe es eine absteigende Folge $(c_i)_{i<\omega}$; durch Übergang zu einer Teilfolge darf man o.B.d.A. voraussetzen, daß für alle $i < j$ gilt $p_i^{c_i} = p_i^{c_j}$; dann wäre jedoch $(p_i^{c_i})$ eine forkende Folge von Typen, was wegen der Superstabilität von T nicht möglich ist. Aus (i) ergibt sich, daß aus $c < d$, $c' \in M$ und $\mathrm{stp}(c/AB_{m_d}^d) = \mathrm{stp}(c'/AB_{m_d}^d)$ auch $c' < d$ folgt.

Abschließend soll gezeigt werden, daß $M/A \cup \{c \in M \mid c < d\}$ atomar ist für jedes $d \in M$. $M/AB_{m_d}^d$ ist atomar, und nach Lemma 10.10 ist folglich auch $M^{\mathrm{eq}}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AB_{m_d}^d)$ atomar. Da $\{c \in M \mid c < d\}$ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AB_{m_d}^d)$ normal in M liegt, folgt wieder nach Lemma 10.9, daß $M^{\mathrm{eq}}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AB_{m_d}^d) \cup \{c \in M \mid c < d\}$ ebenfalls atomar ist. Da $B_{m_d}^d$ (wegen (ii)) eine Teilmenge von $\{c \in M \mid c < d\}$ ist, ist auch $M/A \cup \{c \in M \mid c < d\}$ atomar. Es folgt, daß M eine Primärerweiterung von A ist. $\square$

Im Beweis dieses Satzes wurde Satz 10.7 nicht benutzt; für superstabile, abzählbare Theorien mit Primärerweiterungen erhält man durch zweimalige Anwendung von Satz 10.11 einen weiteren Beweis für die Eindeutigkeit von Primerweiterungen.

Kapitel 11

a-Primerweiterungen und lokal atomare Erweiterungen

Ein Modell M heißt *a–saturiert* (oder *$\aleph_\varepsilon$–saturiert*), wenn jeder starke Typ über einer endlichen Teilmenge von M in M realisiert wird. Falls T abzählbar und M $\aleph_1$–saturiert ist, so ist M auch a–saturiert. Ein a–saturiertes Modell ist immer $\aleph_0$–saturiert; für total transzendente Theorien gilt auch die Umkehrung: Sei M $\aleph_0$–saturiert und sei $p \in S(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$, wobei A eine endliche Teilmenge von M sei. Da $m := \mathrm{mult}(p \upharpoonright A)$ endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge B von $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) \subset M$, die A enthält und auf die es genau m Erweiterungen von $p \upharpoonright A$ gibt; dann gilt $p \upharpoonright B \vdash p$; da $p \upharpoonright B$ in M realisiert ist, ist auch p in M realisiert.

Beispiel 11.1 T sei die Theorie aus Beispiel 6.2. M sei ein $\aleph_1$–saturiertes Modell von T, und a sei ein Element von M. Sei U der Durchschnitt aller E_i–Äquivalenzklassen von a; dann ist $M \setminus U$ ein $\aleph_0$–saturiertes Modell von T, das nicht a–saturiert ist.

M heißt *a–Primerweiterung* von A, wenn gilt:

(i) M ist ein a–saturiertes Modell, das A enthält;

(ii) falls N ein a–saturiertes Modell ist, das A enthält, so gibt es eine elementare A–Einbettung von M in N.

Satz 11.1 *Wenn T eine abzählbare, superstabile Theorie ist, so gibt es zu jeder Menge A eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte a–Primerweiterung.*

Dieser Satz kann bewiesen werden wie die Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Primmodellen im Kapitel 10. Man braucht dazu zur Isoliertheit und zur Konstruierbarkeit analoge Begriffe, die nun eingeführt werden sollen.

Sei $p \in S(A)$ ein Typ, und sei A_0 eine endliche Teilmenge von A. p heißt *a–isoliert* mit Parametern aus A_0, wenn ein starker Typ $q \in ST(A_0)$ existiert mit $q \vdash p$.

Lemma 11.2 *Der Typ $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ sei a–isoliert mit Parametern aus A_0. Dann gilt $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0) \vdash \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$; es gilt sogar $\{\varphi \in \mathrm{stp}(\overline{b}/A_0) \mid \varphi$ ist über A definierbar$\} \vdash \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$.*

Ist T stabil, so gilt auch $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0) \vdash \mathrm{stp}(\overline{b}/A)$.

Beweis Falls $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ a–isoliert ist mit Parametern aus A_0, so gibt es ein Tupel $\overline{c}$ mit $\mathrm{stp}(\overline{c}/A_0) \vdash \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$; dann gilt $\mathrm{tp}(\overline{c}/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und somit $\mathrm{stp}(\overline{c}/A_0) \vdash \mathrm{tp}(\overline{c}/A)$; da $\overline{b}$ und $\overline{c}$ über A konjugiert sind, folgt auch $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0) \vdash \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$.

Sei $\varphi(\overline{x}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$; dann gibt es eine Formel $\psi(\overline{x}) \in \mathrm{stp}(\overline{b}/A_0)$ mit $\models \psi(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x})$; $\psi_1(\overline{x}), ..., \psi_n(\overline{x})$ seien die über A zu ψ konjugierten Formeln; $\psi^-(\overline{x}) := \psi_1(\overline{x}) \vee ... \vee \psi_n(\overline{x})$ ist dann über A definierbar, und es gilt $\models \psi^-(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x})$.

Sei nun T stabil. Weil $\mathrm{stp}(b/A_0)$ Realisierungen hat, die mit A über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)$ (und also auch über A_0) unabhängig sind, forkt $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ nicht über A_0. Sei nun $q \in S(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$ eine beliebige Erweiterung von $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0)$. Es folgt $\mathrm{tp}(\overline{b}/A) \subset q$, und somit ist q die nichtforkende Erweiterung von $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0)$. Damit gilt $\mathrm{stp}(\overline{b}/A_0) \vdash \mathrm{stp}(\overline{b}/A)$. □

Eine *a–Konstruktion* über A ist eine Folge $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ mit der Eigenschaft, daß alle Typen $\mathrm{tp}(b_\alpha/A \cup \{b_\beta \mid \beta < \alpha\})$ a–isoliert sind. Ein Modell M heißt *a–Primärerweiterung* über A, wenn M ein a–saturiertes Modell ist, das A umfaßt und wenn M a–konstruierbar ist über A. Es gilt hier wieder, daß a–Primärerweiterungen auch a–Primerweiterungen sind.

Lemma 11.3 *Ist T superstabil, dann liegen für alle A die a–isolierten Typen dicht in allen $S(A)$.*

Beweis Sei $\varphi(x)$ eine konsistente $L(A)$–Formel; unter allen $L(A)$–Formeln $\psi(x;\overline{a})$ mit

$$\models \psi(x;\overline{a}) \to \varphi(\overline{x})$$

wähle man eine mit minimalem Shelahrang $RC(\psi(x;\overline{a}))$. Sei $p \in S(A)$ ein Typ mit $\psi(x;\overline{a}) \in p$; dann sind alle Erweiterungen von $p \restriction \overline{a}$ auf A nichtforkend, und somit ist p ein a–isolierter Typ mit $\varphi(x) \in p$.

Das Lemma könnte auch wie folgt bewiesen werden: p_0 sei ein Typ über einer endlichen Teilmenge A_0 von A mit $\varphi(x) \in p_0$. p_0 kann so gewählt werden, daß er keine forkenden Erweiterungen auf A hat, denn sonst gäbe es eine forkende Folge von Typen $p_i \in S(A_i)$ (wobei $|A_i| < \infty$ und $A_i \subset A$). Dann ist jede Fortsetzung von p_0 auf A a–isoliert. □

Aus diesem Lemma folgt die Existenz von a–Primärerweiterungen wie in 10.3.

Lemma 11.4 *Falls T stabil ist, so ist $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)$ genau dann a–isoliert, wenn $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und $tp(\overline{a}/A\overline{b})$ a–isoliert sind.*

Beweis Ist $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)$ a–isoliert mit Parametern aus A_0, so ist $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ a–isoliert mit Parametern aus A_0, und $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})$ ist a–isoliert mit Parametern aus $A_0\overline{b}$. Sei nun umgekehrt $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ a–isoliert mit Parametern aus A_0 und $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})$ mit Parametern aus $A_0\overline{b}$. Es gilt dann einerseits

$$\mathrm{tp}(\overline{b}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)) \vdash \mathrm{tp}(\overline{b}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0) \cup A)$$

und somit nach Lemma 10.4 auch

$$\mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)) \vdash \mathrm{tp}(A/A_0\overline{b});$$

aus Lemma 11.2 folgt dann

$$\mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)) \vdash \mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0\overline{b})).$$

Es gilt andererseits

$$\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0\overline{b})) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0\overline{b}) \cup A)$$

und somit

$$\mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0\overline{b})) \vdash \mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0\overline{b}) \cup \{\overline{a}\});$$

zusammen ergibt sich dann

$$\mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)) \vdash \mathrm{tp}(A/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0) \cup \{\overline{a}\overline{b}\})$$

und somit

$$\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0)) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A).$$

□

B/A heißt *a–atomar*, wenn der Typ aller endlichen Tupel vom Elementen aus B über A a–atomar ist.

Lemma 11.5 *Sei $B/A\overline{a}$ a-atomar über Parametern aus A und sei $\overline{a}/A$ ebenfalls a-atomar über A_0. Dann ist $\overline{a}/AB$ a-atomar.*

P **Beweis** Es gilt
$$\mathrm{tp}(B/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)) \vdash \mathrm{tp}(B/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) \cup \{\overline{a}\})$$
und folglich
$$\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) \cup B);$$
wird $\mathrm{tp}(\overline{a}/A)$ mit Parametern aus A_0 a–isoliert, so wird folglich auch $\mathrm{tp}(\overline{a}/AB)$ mit Parametern aus A_0 a–isoliert. □

Aus diesen beiden Lemmas folgt, daß a–Primärerweiterungen eindeutig bestimmt sind. Um zu zeigen, daß das Analogon zu Shelahs Satz 10.7 auch für a–Primärerweiterungen gilt, braucht man das folgende Lemma, das die Rolle des Open–Mapping–Theorems übernimmt:

Lemma 11.6 *A sei eine Teilmenge von B und $\mathrm{tp}(b/B)$ sei a–isoliert und forke nicht über A. Dann ist auch $\mathrm{tp}(b/A)$ a–isoliert.*

Beweis $\mathrm{tp}(b/B)$ werde a–isoliert über der endlichen Teilmenge B_0 von B. Es gibt dann eine endliche Teilmenge A_0 von A mit $bB_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A$. Sei c ein Element mit $\mathrm{stp}(b/A_0) = \mathrm{stp}(c/A_0)$. Es gibt dann ein c' mit $\mathrm{stp}(c/A) = \mathrm{stp}(c'/A)$ und $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B_0$. Aus $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B_0$ und $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} B_0$ folgt $c' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} B_0$, und aus $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B$ und $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} A$ folgt $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A_0} B_0$; es ergibt sich $\mathrm{stp}(b/B_0) = \mathrm{stp}(c'/B_0)$ und somit $\mathrm{tp}(b/B) = \mathrm{tp}(c'/B)$. Daraus folgt nun $\mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(c'/A) = \mathrm{tp}(c/A)$; $\mathrm{tp}(b/A)$ wird also über A_0 a–isoliert. □

Übung 11.1 Analog zu Satz 10.11 charakterisiere man für abzählbare, superstabile Theorien a–Primärerweiterungen durch Indiscernibles.

Übung 11.2 M/A heißt $\aleph_1$–Primerweiterung, wenn M $\aleph_1$–saturiert ist und wenn für jedes $\aleph_1$–saturierte Modell $N \supset A$ eine A–Einbettung $M \to N$ existiert. Man zeige, daß für stabile, abzählbare Theorien $\aleph_1$–Primerweiterungen existieren und daß diese Erweiterungen eindeutig sind.

Sei $p \in S(A)$; p heißt *lokal isoliert*, wenn für jede endliche Menge Δ von $L(A)$–Formeln eine Formel $\varphi(\overline{x}) \in p$ existiert mit $\varphi(\overline{x}) \vdash p \restriction \Delta$ (es genügt natürlich auch, nur Δ zu betrachten, die aus L-Formeln bestehen). B/A heißt *lokal atomar*, wenn $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ für alle $\overline{b} \in B$ lokal isoliert ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{tp}(B/A)$ lokal isoliert ist.

Lemma 11.7 *$\overline{a}\overline{b}/A$ ist genau dann lokal atomar, wenn $\overline{a}/A\overline{b}$ und $\overline{b}/A$ lokal atomar sind.*

Beweis $\Rightarrow$ ist trivial.

Seien nun $\overline{a}/A\overline{b}$ und $\overline{b}/A$ lokal isoliert, und sei $\Delta = \{\psi(\overline{x}, \overline{y}; \overline{z})\}$. Es gibt dann eine $L(A)$–Formel $\varphi_0(\overline{x}; \overline{y})$ mit $\varphi_0(\overline{x}; \overline{b}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})$ und $\varphi_0(\overline{x}; \overline{b}) \vdash \mathrm{tp}_{\psi(\overline{x}, \overline{b}; \overline{z})}(\overline{a}/A\overline{b})$, und es gibt eine $L(A)$–Formel $\varphi_1(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ mit
$$\varphi_1(\overline{y}) \vdash \mathrm{tp}_{\forall \overline{x}(\varphi_0(\overline{x}, \overline{y}) \to \psi(\overline{x}, \overline{y}; \overline{z}))}(\overline{b}/A).$$
$\varphi_0(\overline{x}; \overline{y}) \wedge \varphi_1(\overline{y})$ gehört dann zu $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)$.

Sei nun $\psi(\overline{x}, \overline{y}; \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)$; dann gilt
$$\models \forall \overline{x}(\varphi_0(\overline{x}, \overline{b}) \to \psi(\overline{x}, \overline{b}; \overline{c}))$$
und somit auch
$$\models \varphi_1(\overline{y}) \to (\forall \overline{x}(\varphi_0(\overline{x}, \overline{y}) \to \psi(\overline{x}, \overline{y}; \overline{c})));$$
$\varphi_0(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \varphi_1(\overline{y})$ isoliert somit $\mathrm{tp}_\Delta(\overline{a}\overline{b}/A)$. □

Satz 11.8 *T sei stabil und abzählbar; für jede Parametermenge A liegen dann die lokal isolierten Typen dicht in $S(A)$.*

Beweis Sei $\varphi(x; \overline{a})$ eine $L(A)$–Formel; es ist zu zeigen, daß ein lokal isolierter Typ $p \in S(A)$ existiert mit $\varphi(x; \overline{a}) \in p$. Sei $(\Delta_i)_{i<\omega}$ eine Aufzählung aller endlichen Mengen von L-Formeln $\psi(x; \overline{y})$. Man konstruiere rekursiv eine Folge von $L(A)$–Formeln: $\varphi_0(x) := \varphi(x)$ und $\varphi_{n+1}(x)$ sei eine $L(A)$–Formel mit $\models \varphi_{n+1}(x) \to \varphi_n(x)$ und mit minimalem Δ_n–Rang und Δ_n–Grad. Sei nun $\psi(x; \overline{y})$ eine

Δ_n–Formel, und sei $\overline{a} \in A$; dann ist entweder $\varphi_{n+1}(x) \wedge \psi(x;\overline{a})$ oder $\varphi_{n+1}(x) \wedge \neg\psi(\overline{x};\overline{a})$ wegen der Minimalität von $R_{\Delta_n}(\varphi_{n+1}(x))$ und $D_{\Delta_n}(\varphi_{n+1}(x))$ inkonsistent. Die Menge aller φ_n axiomatisiert daher einen lokal isolierten Typ p mit $\varphi \in p$. □

Aus diesem Satz folgt wieder, daß in einer abzählbaren stabilen Theorie jede Menge A in einem über A lokal konstruierten Modell enthalten ist. Ein solches Modell ist lokal atomar über A.

Lemma 11.9 *T sei stabil, und es gelte $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M C$. Falls B' lokal atomar ist über MB, so ist B' auch lokal atomar über MBC mit Parametern aus MB.*

Beweis Sei $\overline{b}' \in B'$ und $p := \mathrm{tp}(\overline{b}'/MB)$; es genügt nach Übung 3.5 einelementige Δ zu betrachten, also sei $\Delta := \{\varphi(\overline{x};\overline{y})\}$. Es gibt dann eine konsistente $L(M)$–Formel $\psi(\overline{x};\overline{y})$ und ein $\overline{b} \in B$ mit $\psi(\overline{x};\overline{b}) \vdash p \restriction \Delta$. Die Formel $\psi(\overline{x};\overline{b})$ isoliert dann auch $\mathrm{tp}_\Delta(\overline{b}'/MBC)$, denn sonst gäbe es ein Tupel $\overline{c} \in MBC$ mit $\models \exists\overline{x}(\psi(\overline{x};\overline{b}) \wedge \varphi(\overline{x};\overline{c})) \wedge \exists\overline{x}(\psi(\overline{x};\overline{b}) \wedge \neg\varphi(\overline{x};\overline{c}))$. Weil aber $\mathrm{tp}(B/MC)$ der Erbe von $\mathrm{tp}(B/M)$ ist, kann man das $\overline{c}$ in MB wählen; dann würde aber $\psi(\overline{x};\overline{b})$ den Typ $p \restriction \Delta$ nicht isolieren. □

Seien A, B und B' Mengen. B *dominiert* B' über A ($B \triangleright_A B'$), wenn für alle Mengen C aus $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A C$ auch $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A C$ folgt.

Sei B' lokal atomar über BM. Dann gilt $B \triangleright_M B'$: Sei C eine Menge mit $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M C$; aus Lemma 11.9 folgt dann $\mathrm{tp}(B'/MB) \vdash \mathrm{tp}(B'/MBC)$. Dann gilt jedoch $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{MB} C$ und somit auch $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M C$.

Sei $p \in S(A)$ ein stationärer Typ und sei $\varphi(\overline{x})$ eine Formel mit Parametern aus A; p heißt *orthogonal* zu φ ($p \perp \varphi$), wenn für alle nichtforkenden Erweiterungen $p' \in S(B)$ von p alle Tupel $\overline{a}, \overline{b}$ mit $\overline{a} \models p'$ und $\models \varphi(\overline{b})$ über B unabhängig sind.

Falls $p'' \in S(C)$ eine nichtforkende Erweiterung von $p \in S(A)$ ist, so gilt $p'' \perp \varphi$ genau dann, wenn $p \perp \varphi$ gilt: es ist klar, daß $p'' \perp \varphi$ aus $p \perp \varphi$ folgt; es gelte nun $p'' \perp \varphi$. Seien $B \supset A$, $\overline{a} \models p|B$ und $\models \varphi(\overline{b})$. C' sei eine Menge mit $\mathrm{tp}(C'/A) = \mathrm{tp}(C/A)$ und $C' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B\overline{a}$; dann gilt $p|C' \perp \varphi$. $\overline{a}$ ist dann auch eine Realisierung von $p|BC'$, und somit folgen $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{BC'} \overline{b}$ und $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B \overline{b}$.

Satz 11.10 *T sei stabil und abzählbar. Für einen stationären Typ $p \in S(A)$ und für eine nichtalgebraische $L(A)$–Formel $\varphi(x)$ sind äquivalent:*

(i) $p \perp \varphi$*;*

(ii) zu jedem Modell M, das A umfaßt, gibt es eine elementare Erweiterung N, in der $p|M$ realisiert ist, so daß $M \prec N$ ein Vaughtsches Paar für φ ist (das heißt $M \neq N$, $\varphi(M) = \varphi(N)$ und $|\varphi(M)| = \infty$);

(iii) es gibt ein Vaughtsches Paar $M \prec N$ für φ mit $A \subset M$, so daß $p|M$ in N realisiert wird;

(iv) $\mathfrak{p}$ sei die globale nichtforkende Erweiterung von p; dann gilt

$$\models d_{\mathfrak{p}}x\, \exists y\, \psi(x;y;\overline{z}) \leftrightarrow \exists y\, d_{\mathfrak{p}}x\, \psi(x;y;\overline{z})$$

für alle $L(A)$–Formeln $\psi(x;y;\overline{z})$ mit $\models \psi(x;y;\overline{z}) \to \varphi(y)$ („$\leftarrow$" gilt in obiger Formel immer).

Beweis (i)⇒(ii): Sei $M \supset A$ ein Modell, und a sei eine Realisierung von $p|M$. N sei dann eine lokal atomare Erweiterung von Ma. Aus der Folgerung von Lemma 11.9 erhält man $a \triangleright_M N$; sei nun $b \in \varphi(N)$; dann gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M b$, und daraus folgt $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M N$; also ist $b \in M$.

(ii)⇒(iii) ist trivial.

(iii)⇒(iv): a sei eine Realisierung von $p|M$ in N. Sei $\overline{m} \in M$ mit $\models d_{\mathfrak{p}}x\, \exists y \psi(x;y;\overline{m})$; dann gilt $\exists y\, \psi(x;y;\overline{m}) \in p|M$, und daraus folgt $N \models \exists y\, \psi(a;y;\overline{m})$, und somit gibt es ein b in N mit $N \models \psi(a;b;m)$; da $M \prec N$ ein Vaughtsches Paar für φ ist, folgt $b \in M$, und somit gilt $\psi(x;b;\overline{m}) \in p|M$. Es folgt $\models \exists y\, d_{\mathfrak{p}}x\, \psi(x;y;\overline{m})$; $\overline{m}$ war ein beliebiges Tupel aus M mit $\models d_{\mathfrak{p}}x\, \exists y\, \psi(x;y;\overline{m})$, es folgt also $\models d_{\mathfrak{p}}x\, \exists y\, \psi(x;y;\overline{z}) \to \exists y\, d_{\mathfrak{p}}x\, \psi(x;y;\overline{z})$.

(iv)⇒(i): Es gelte $p \not\perp \varphi$; es gibt dann ein Modell M, das A umfaßt und Elemente a und b mit $a \models p|M$, $\models \varphi(b)$ und $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M b$. Da $\mathrm{tp}(a/Mb)$ nicht der Erbe von $\mathrm{tp}(a/M)$ ist, gibt es eine $L(A)$–Formel $\psi(x;y;\overline{z})$ und ein Tupel $\overline{m} \in M$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\psi(x;b;\overline{m}) \in \mathrm{tp}(a/Mb)$;

(b) $\psi(x;y;\overline{m})$ wird nicht repräsentiert in $p|M$;

(c) $\models \psi(x;y;\overline{z}) \to \varphi(y)$.

Es folgt $\models d_{\mathfrak{p}}x\, \exists y\, \psi(x;y;\overline{m})$ und $\models \neg\exists y d_{\mathfrak{p}}x\, \psi(x;y;\overline{m})$. $\square$

Übung 11.3 T sei stabil, M sei ein a–saturiertes Modell, und B' sei a–atomar über MB. Dann folgt aus $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_M C$, daß B' auch a–atomar über MBC ist mit Parametern aus MB. Ferner folgt $B \triangleright_M B'$.

Übung 11.4 Satz 11.10 bleibt wahr für superstabile Theorien beliebiger Kardinalität, wenn man in (ii) das Modell M als a–saturiert voraussetzt.

Übung 11.5 P sei ein einstelliges Prädikat der Sprache L; T^P sei die Theorie der Klasse $P(\mathfrak{C})$, in einer Sprache, die für jede (in T) $\emptyset$–definierbare Relation auf $P(\mathfrak{C})^n$ ein Relationszeichen besitzt. Jedes Modell von T^P hat eine elementare Erweiterung von der Form $P(M)$ für ein Modell M von T. Falls T stabil und abzählbar ist, so ist jedes Modell von T^P von der Form $P(M)$ für ein Modell M von T.

Der 2–Kardinalzahlsatz von Vaught besagt, daß eine abzählbare Theorie T genau dann ein Vaughtsches Paar für eine parameterfreie Formel $\varphi(x)$ besitzt, wenn (T,φ) ein Modell vom Typ $(\aleph_1,\aleph_0)$ besitzt (das ist ein Modell M von T mit $|M| = \aleph_1$ und $|\varphi(M)| = \aleph_0$). Für stabile Theorien läßt sich dieser Satz wie folgt verschärfen:

Satz 11.11 *T sei stabil und abzählbar, und es gebe ein Vaughtsches Paar für $\varphi(x)$. Dann besitzt (T,φ) Modelle vom Typ (κ,λ) für beliebige Kardinalzahlen mit $\kappa \geq \lambda \geq \aleph_0$.*

Beweis Sei $M_0 \prec M_1$ ein Vaughtsches Paar von T für φ mit $|\varphi(M_0)| = \lambda$ und $|M_1| \leq \kappa$. $p \in S(M_0)$ sei ein Typ, der in $M_1 \setminus M_0$ realisiert sei. Mit Satz 11.10 kann nun eine stetige elementare Kette $(M_\alpha)_{\alpha\leq\kappa}$ konstruiert werden mit folgenden Eigenschaften:

(a) $|M_\alpha| = \lambda + |\alpha|$,

(b) $p|M_\alpha$ wird in $M_{\alpha+1}$ realisiert

(c) $\varphi(M_{\alpha+1}) = \varphi(M_\alpha)(= \varphi(M_0))$.

M_κ ist dann das gesuchte Modell. $\square$

Teil IV

Strukturtheorie

Kapitel 12

Orthogonalität

Zwei Typen $p \in S^n(A)$ und $q \in S^m(A)$ heißen *fast orthogonal* ($p \perp^a q$), wenn jedes Paar von Realisierungen $\overline{a} \models p$ und $\overline{b} \models q$ über A unabhängig ist. p und q heißen *schwach orthogonal* ($p \perp^w q$), wenn $p(\overline{x}) \cup q(\overline{y})$ einen (vollständigen) Typ axiomatisiert. p und q sind genau dann schwach orthogonal, wenn für jede Realisierung $\overline{a}$ von p genau eine Fortsetzung von q auf $A\overline{a}$ existiert. Aus der schwachen Orthogonalität folgt daher Fastorthogonalität. Umgekehrt folgt aus $p \perp^a q$ auch $p \perp^w q$, wenn einer dieser beiden Typen stationär ist.

Beispiel 12.1 L bestehe aus einem einstelligen Relationszeichen R und aus einem zweistelligen Relationszeichen E. T sei die Theorie, die besagt, daß E eine Äquivalenzrelation mit zwei Klassen ist und daß beide Klassen sowohl unendlich viele Elemente aus R als auch aus $\neg R$ enthalten. $p, q \in S(\emptyset)$ werden axiomatisiert durch $R(x)$ beziehungsweise durch $\neg R(y)$; es gilt dann $p \perp^a q$, aber $p \not\perp^w q$.

Lemma 12.1 *Seien p und q Typen aus $S(A)$, und sei B eine Obermenge von A. Falls alle nichtforkenden Erweiterungen p' und q' von p beziehungsweise von q auf B fast orthogonal sind, so sind auch p und q fast orthogonal.*

Beweis Sei a eine Realisierung von p und b eine Realisierung von q. Man darf o.B.d.A. $ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ voraussetzen. Dann forken $\mathrm{tp}(a/B)$ und $\mathrm{tp}(b/B)$ nicht über A, folglich gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B b$, und daraus folgt auch $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b$. □

Zwei Typen $p \in S(A)$ und $q \in S(B)$ heißen *orthogonal* ($p \perp q$), wenn für jede Menge C, die A und B umfaßt, jedes Paar p', q' von nichtforkenden Erweiterungen von p beziehungsweise q auf C fast orthogonal ist. p ist genau dann orthogonal zu einer Formel φ, wenn $p \perp q$ gilt für alle q, die φ enthalten.

Lemma 12.2 *Sei $p \in S(A)$, $q \in S(B)$ und $B \subset C$; dann sind p und q genau dann orthogonal, wenn p zu allen nichtforkenden Erweiterungen von q auf C orthogonal ist.*

Beweis $\Rightarrow$ ist trivial.

$\Leftarrow$: Sei D eine Menge, die sowohl A als auch B umfasse. a realisiere eine nichtforkende Erweiterung von p auf D, b realisiere eine nichtforkende Erweiterung von q auf D. C' sei eine Menge mit $\mathrm{tp}(C'/AB) = \mathrm{tp}(C/AB)$ und $C' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{AB} Dab$. p ist dann orthogonal zu allen nichtforkenden Erweiterungen von q auf C'. $\mathrm{tp}(a/DC')$ und $\mathrm{tp}(b/DC')$ forken beide nicht über D, es folgt also $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{DC'} b$, und daraus folgt mit $C' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_D ab$ auch $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_D b$. □

Satz 12.3 *T sei stabil, M sei ein $|T|^+$–saturiertes Modell, und $p, q \in S(M)$ seien fast orthogonal. Dann sind p und q sogar orthogonal. Falls T superstabil ist, so stimmt das auch für a–saturierte Modelle M.*

Beweis A sei eine Teilmenge von M mit folgenden Eigenschaften: p und q forken nicht über A, $p \restriction A$ und $q \restriction A$ sind stationär, $|A| \leq |T|$. Es genügt zu zeigen, daß $p \restriction A$ und $q \restriction A$ orthogonal sind. Sei B eine Menge die A umfaßt; dann muß $(p \restriction A)|B \perp^a (q \restriction A)|B$ gezeigt werden. O.B.d.A. sei

$B \setminus A$ endlich. Dann ist $\mathrm{tp}(B/A)$ in M realisiert, und man kann daher o.B.d.A. $B \subset M$ annehmen; dann gelten jedoch $(p \upharpoonright A)|B = p \upharpoonright B$ und $(q \upharpoonright A)|B = q \upharpoonright B$, und aus Lemma 12.1 folgt daher $p \upharpoonright B \perp q \upharpoonright B$.

Ist T superstabil und M a–saturiert, so wähle für A eine Teilmenge von M^{eq}, die der algebraische Abschluß einer endlichen Menge ist und führe damit denselben Beweis. $\square$

Seien $p \in S^n(A)$ und $q \in S^m(A)$ Typen, und p oder q sei stationär. Das *Produkt* von p und q sei $p \otimes q := \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/A)$, wobei $\overline{a} \models p$, $\overline{b} \models q$ und $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \overline{b}$. Da einer der beiden Typen p, q stationär ist, hängt $p \otimes q$ nicht von der Wahl der Realisierungen $\overline{a}$, $\overline{b}$ ab. Seien nun p und q stationär, und $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/B)$ sei eine nichtforkende Erweiterung von $p \otimes q$. Es gelten dann $\overline{a}\overline{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$ und $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \overline{b}$; daraus folgt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B \overline{b}$. $p \otimes q$ ist somit stationär, und es gilt $(p \otimes q)|B = (p|B) \otimes (q|B)$.

Lemma 12.4 *Seien p, q_1 und q_2 Typen mit Parametern aus A; q_1 und q_2 seien stationär. Falls p sowohl zu q_1 als auch zu q_2 orthogonal ist, so ist p auch zu $q_1 \otimes q_2$ orthogonal.*

Beweis Aus der obigen Bemerkung folgt, daß es genügt zu zeigen, daß p zu $q_1 \otimes q_2$ fast orthogonal ist. Sei $\overline{a}$ eine Realisierung von p, und $\overline{b}_1\overline{b}_2$ sei eine Realisierung von $q_1 \otimes q_2$. $\overline{a}$ und $\overline{b}_1$ sind dann unabhängig über A; $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b}_1)$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}_2/A\overline{b}_1)$ forken nicht über A, folglich gilt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A\overline{b}_1} \overline{b}_2$, und daraus folgt $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \overline{b}_1\overline{b}_2$. $\square$

Satz 12.5 *p und q seien stationäre Typen mit Parametern aus A; dann sind p und q genau dann orthogonal, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Typen $\otimes^n p$ und $\otimes^n q$ fast orthogonal sind.*

Beweis Aus Lemma 12.4 folgt unmittelbar $\Rightarrow$.

p und q seien nun nicht orthogonal. Es gibt dann eine Menge B, die A umfaßt, und über B abhängige Realisierungen $\overline{a}$ und $\overline{b}$ von $p|B$ und $q|B$. $(\overline{a}_i\overline{b}_i)_{i\in I}$ sei eine lange, über B unabhängige Folge mit $\mathrm{tp}((\overline{a}_i\overline{b}_i/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/B)$ (für alle $i \in I$). Für beliebige endliche Tupel $(i_1, ..., i_n)$ aus I gilt $(\overline{a}_{i_1}, ..., \overline{a}_{i_n}) \models \otimes^n p$ und $(\overline{b}_{i_1}, ..., \overline{b}_{i_n}) \models \otimes^n q$. Gölte nun $\otimes^n p \perp^a \otimes^n q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgte $(\overline{a}_i)_{i\in I} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A (\overline{b}_i)_{i\in I}$; insbesondere wäre $\overline{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A \overline{b}_i$ für alle $i \in I$. Wegen $\overline{a}_i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B \overline{b}_i$ folgte $\overline{a}_i\overline{b}_i \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A B$, aber das ist nicht möglich, wenn I groß genug gewählt wurde. $\square$

Beispiel 12.2 T sei die Theorie der zweisortigen Struktur $(\mathbb{Q}, Q; +, op, 0)$; dabei sei Q eine isomorphe Kopie von $\mathbb{Q}$, $+$ sei die übliche Addition von $\mathbb{Q}$ mit dem Neutralelement 0, und $op : \mathbb{Q} \times Q \to Q : (\alpha, v) \mapsto \alpha + v$ sei eine reguläre Operation von $\mathbb{Q}$ auf der Menge Q. Über der leeren Menge gibt es dann genau einen Typ $p(x)$, der zur ersten Sorte gehört und der die Formel $x \neq 0$ enthält; ebenso gibt es über der leeren Menge nur einen Typ $q(y)$, der zur zweiten Sorte gehört. p und q sind dann stationär und schwach orthogonal; es gilt sogar $\otimes^n p \perp^w q$. p und q sind aber nicht orthogonal, denn p und $q \otimes q$ sind nicht schwach orthogonal.

Kapitel 13

Reguläre Typen

Eine *Abhängigkeitsrelation* für X ist eine Relation auf $X \times \mathcal{P}(X)$, die die folgenden vier van der Waerden–Axiome erfüllt:

(i) $x \in X$ ist genau dann von $Y \subset X$ abhängig, wenn x von einer endlichen Teilmenge von Y abhängig ist.

(ii) x ist abhängig von $\{x\}$.

(iii) (Transitivität:) Ist x abhängig von $\{y_1, .., y_n\}$, und sind alle y_i abhängig von Z, so ist x abhängig von Z.

(iv) (Austauscheigenschaft:) Ist x abhängig von Yz, aber nicht von Y, so ist z abhängig von Yx.

Aus (i) folgt unmittelbar die folgende Monotonieeigenschaft:

Ist x abhängig von Y und ist Y in Z enthalten, so ist x auch abhängig von Z.

Eine Teilmenge Y von X heißt *unabhängig*, wenn kein $y \in Y$ abhängig ist von $Y \setminus \{y\}$; Y heißt ein *Erzeugendensystem*, wenn alle $x \in X$ von Y abhängig sind; ein unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis*.

Lemma 13.1 *U sei eine unabhängige Teilmenge von X, und E sei ein Erzeugendensystem, das U umfaßt. Dann gibt es eine Basis B mit $U \subset B \subset E$. Ferner haben alle Basen die gleiche Kardinalität.*

(Beweis: s. z.B [6]) □

Sei X eine Teilklasse von $\mathfrak{C}$, und A sei eine Teilmenge von $\mathfrak{C}$; unter gewissen Umständen erfüllt die Unabhängigkeitsrelation $x \not\perp\!\!\!\perp_A Y$ (für $x \in X$ und $Y \subset X$) die van der Waerden–Axiome. Axiom (i) ist trivialerweise immer erfüllt; auch Axiom (iv) gilt immer, denn aus $x \perp\!\!\!\perp_A Y$ und $z \perp\!\!\!\perp_A Yx$ folgt $x \perp\!\!\!\perp_{AY} Yz$ und somit $x \perp\!\!\!\perp_A Yz$. Axiom (ii) gilt genau dann, wenn $X \cap \mathrm{acl}(A)$ leer ist. Axiom (iii) hingegen ist im allgemeinen falsch.

Die Relation $x \in \mathrm{acl}(YA)$ erfüllt (i) und (ii) trivialerweise, und (iii) ist leicht zu beweisen; (iv) gilt im allgemeinen aber nicht.

Sei nun $\varphi(x; \overline{a})$ eine streng minimale $L(A)$–Formel (das heißt $MRD(\varphi(x; \overline{a})) = (1, 1)$), und sei $X := \varphi(\mathfrak{C}; \overline{a})$. Dann erfüllt die Relation $x \in \mathrm{acl}(AY)$ auf X auch (iv) (gilt sogar für unstabile Theorien). Für $a \in X$ und $B \subset X$ gilt $a \not\perp\!\!\!\perp_A B$ genau dann, wenn $\mathrm{tp}(a/AB)$ über A forkt; das ist aber wegen $MR(\mathrm{tp}(a/AB)) \leq 1$ genau dann der Fall wenn $a \in \mathrm{acl}(AB)$ und $a \notin \mathrm{acl}(A)$. Falls $p \in S(A)$ der nichtalgebraische Typ ist, der φ enthält, so besteht $p(\mathfrak{C})$ gerade aus den Elementen von X die über A nicht algebraisch sind. Dort stimmt die $\not\perp\!\!\!\perp$–Abhängigkeit mit der algebraischen Abhängigkeit überein, und damit erfüllt die $\not\perp\!\!\!\perp$–Abhängigkeit auf $p(\mathfrak{C})$ die van der Waerden–Axiome. Das gilt natürlich auch für jeden Typ p mit $U(p) = 1$.

Ein Typ $p \in S(A)$ heißt *regulär*, wenn p nicht algebraisch ist und wenn p zu allen forkenden Erweiterungen von p orthogonal ist. Es wird später gezeigt werden, daß p genau dann regulär ist, wenn die Unabhängigkeitsrelation $x \not\perp\!\!\!\perp_A Y$ auf $p(\mathfrak{C})$ die van der Waerden–Axiome erfüllt. Für einen regulären Typ $p \in S(A)$ und für ein Modell $M \supset A$ kann folglich eine Dimension $dim_p(M)$ definiert werden als die Kardinalität einer *p-Basis* von M d.h. einer maximalen über A unabhängigen Teilmenge von $p(M)$. Wenn p nicht regulär ist, soll die p-Dimension von M das Supremum aller Mächtigkeiten von über A unabhängigen Teilmengen von $p(M)$ sein.

Bemerkung 13.2 *Ein Typ $p \in S(A)$ mit U–Rang eins ist immer regulär, da in diesem Falle forkende Erweiterungen von p immer algebraisch sind.*

Für stabile Theorien gibt es zu jedem nichtalgebraischen Typ eine Erweiterung mit U–Rang 1, denn sonst könnte man beliebig lange aufsteigende Ketten $(p_\alpha)_{\alpha<\eta}$ von nichtalgebraischen Typen konstruieren, so daß $p_{\alpha+1}$ eine forkende Erweiterung von p_α wäre; dann folgte jedoch aus $\alpha < \beta$ auch $cl(p_\alpha) \subsetneqq cl(p_\beta)$. Es gibt also immer reguläre Typen.

Nicht nur Typen mit U–Rang 1 sind regulär; es gilt sogar, daß jeder Typ $p \in S(A)$ mit $U(p) = \omega^\alpha$ regulär ist. Sei nämlich $B \supset A$ und $q \in S(B)$ ein Typ mit $U(q) < \omega^\alpha$; es genügt zu zeigen, daß q fast orthogonal zu jeder nichtforkenden Erweiterung $p' \in S(B)$ von p ist. Sei a eine Realisierung von p' und b eine Realisierung von q; dann sind a und b unabhängig über B, denn sonst hätte man $\omega^\alpha \leq U(\mathrm{tp}(ab/B)) \leq U(\mathrm{tp}(a/Bb)) \oplus U(\mathrm{tp}(b/B)) < \omega^\alpha$.

Beispiel 13.1 T sei die Theorie einer Äquivalenzrelation E mit unendlich vielen unendlichen Klassen. Sei $p = \mathrm{tp}(b/A)$; dann gilt $U(p) \leq 2$. $U(p) = 0$ gilt genau dann, wenn b in A liegt; $U(p) = 1$ gilt genau dann, wenn b nicht in A liegt, aber wenn es ein $a \in A$ gibt mit aEb; falls b zu keinem Element aus A äquivalent ist, so ist p der Typ aus $S(A)$ mit $U(p) = 2$. Je zwei verschiedene 1–Typen sind dann zueinander orthogonal. Die nichtalgebraischen 1–Typen dieser Theorie sind also regulär. Sei M ein A umfassendes Modell; dann ist $dim_p(M)$ die Anzahl der Elemente der Äquivalenzklasse von b in $M \setminus A$, wenn $U(p) = 1$, und falls $U(p) = 2$, so ist $dim_p(M)$ die Anzahl der Äquivalenzklassen in M, die keinen Repräsentanten in A besitzen.

Beispiel 13.2 Der Typ eines Paares von verschiedenen Elementen in der Theorie einer unendlichen Menge ist nicht regulär.

Bemerkung 13.3 *Ein Typ $p \in S(A)$ ist regulär, wenn für alle $B \supset A$ gilt:*

(#) für alle Realisierungen a, b von p mit $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$ und $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$ folgt $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_B b$.

(Es ist äquivalent zu fordern, daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A Bb$ folgt.) Es gilt sogar: p ist regulär, falls (#) für genügend große B zutrifft (das heißt, zu jedem $B' \supset A$ muß es ein $B \supset B'$ geben, das (#) erfüllt); ebenso ist p regulär, wenn (#) für alle B mit $|B \setminus A| < \infty$ gilt.

Beweis Es gelte $A \subset B' \subset B$ und (#) treffe für B zu. Seien nun a und b Realisierungen von p mit $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B'$ und $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B'$; man kann o.B.d.A. $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{B'} B$ voraussetzen. Es folgt dann $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$ und $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$, und somit gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_B b$; wegen $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{B'} B$ folgt daraus $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{B'} b$.

Um den zweiten Teil der Bemerkung zu beweisen, nehme man an, daß $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$, $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$ und $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A Bb$ gelten für die Realisierungen a, b von p. Dann gibt es eine endliche Teilmenge B_0 von B mit den gleichen Eigenschaften. □

Lemma 13.4 *Sei $p \in S(A)$, und A' sei eine Obermenge von A:*

(i) falls p regulär ist und falls p' eine nichtforkende Erweiterung von p auf A' ist, so ist p' regulär;

(ii) wenn p nur eine nichtforkende Erweiterung p' auf A' zuläßt und falls diese Erweiterung regulär ist, so ist auch p regulär.

Beweis (i) folgt mit Lemma 12.2.

(ii): B sei eine Obermenge von A, und a, b seien Realisierungen von p mit $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$ und $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_A B$; o.B.d.A. gelte $A' \mathop{\smile\!\!\!\!|}_A Bab$. a und b sind dann Realisierungen von p'. Aus Übung 4.3 folgt $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{A'} B$ und $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!|}_{A'} B$. Da p' regulär ist, folgt $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{A'B} b$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!|}_B b$. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß ein Typ $p \in S(A)$ nicht regulär zu sein braucht, wenn alle nichtforkenden Erweiterungen von p auf $A' \supset A$ regulär sind:

Beispiel 13.3 L bestehe aus einem einstelligen Relationszeichen P, einem zweistelligen Relationszeichen E, einem einstelligen Funktionszeichen f und aus einem (partiellen) zweistelligen Funktionszeichen s. T sei die $L-$–Theorie der folgenden Struktur: E sei eine Äquivalenzklasse mit zwei Klassen; die beiden Äquivalenzklassen seien $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}'\times\mathbb{Q}'$, wobei $\mathbb{Q}'$ eine isomorphe Kopie von $\mathbb{Q}$ sei. s sei die Addition für die beiden Gruppen $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}'\times\mathbb{Q}'$; P beschreibe die Menge $\mathbb{Q}\times\{0\}\dot\cup\mathbb{Q}'\times\{0'\}$, $f\restriction\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ sei ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Q}'\times\{0'\}$ mit dem Kern $\mathbb{Q}\times\{0\}$, und $f\restriction\mathbb{Q}'\times\mathbb{Q}'$ sei ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}'\times\mathbb{Q}'$ auf $\mathbb{Q}\times\{0\}$ mit dem Kern $\mathbb{Q}'\times\{0'\}$. Der durch $\neg P(x)$ axiomatisierte Typ $p(x)$ besitzt zwei nichtforkende Erweiterungen auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$, und die sind regulär; p ist hingegen nicht regulär.

Satz 13.5 *Ein Typ $p\in S(A)$ ist genau dann regulär, wenn die Relation $x\not\perp_A Y$ auf $p(\mathfrak{C})$ die van der Waerden–Axiome erfüllt.*

Beweis p sei regulär; es muß gezeigt werden, daß Axiom (iii) gilt. a und $b_1,...,b_n$ seien Realisierungen von p, und B sei eine Menge von Realisierungen von p; es gelte $a\not\perp_A\{b_1,...,b_n\}$ und $b_i\not\perp_A B$. Sei $\overline{b}:=(b_1,...,b_{n-1})$; dann gilt $a\not\perp_A B\overline{b}b_n$ und $b_n\not\perp_A B\overline{b}$; daraus folgt $a\not\perp_A B\overline{b}$, denn aus $a\perp_A B\overline{b}$ folgte wegen der Regularität von p auch $a\perp_{AB\overline{b}}b_n$ und daraus ergäbe sich $a\perp_A B\overline{b}b_n$. Durch Induktion folgt somit $a\not\perp_A B$.

Die Unabhängigkeitsrelation erfülle nun die van der Waerden–Axiome; B sei eine A umfassende Menge, und a,b seien Realisierungen von p mit $a\perp_A B$ und $b\not\perp_A B$; dann muß $a\perp_A Bb$ gezeigt werden; falls B in $p(\mathfrak{C})$ liegt, ist das eine triviale Folgerung aus Axiom (iii). Anderenfalls sei M ein B umfassendes $|A|$–saturiertes Modell mit $ab\perp_B M$. Aus Übung 3.9 folgt, daß $\mathrm{tp}(b/M)$ über $C:=p(M)$ nicht forkt; insbesondere gilt $b\perp_C B$, und daraus folgt $b\not\perp_A C$, denn aus $b\perp_A C$ und $b\perp_C B$ würde $b\perp_A B$ folgen. Es gilt ferner $a\perp_A C$; aus Axiom (iii) ergibt sich daraus $a\perp_A Cb$, und daraus folgt $a\perp_A Bb$. □

Satz 13.6 *$p\in S(A)$ sei ein regulärer Typ, $b_1,...,b_n$ seien unabhängige Realisierungen von $p, a\in\mathfrak{C}$ und $C\subset\mathfrak{C}$ seien beliebig. Aus $a\not\perp_A\{b_1,...,b_n\}$ und $b_k\not\perp_A C$ $(1\leq k\leq n)$ folgt dann $a\not\perp_A C$.*

Beweis $(\overline{a}_i)_{i\in I}$ sei eine maximale über A unabhängige Folge mit $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/A)=\mathrm{tp}(b_1,...,b_n/A)$ und $\overline{a}_i\not\perp_A a$, und $(c_j)_{j\in J}$ sei eine maximale Folge von über A unabhängigen Realisierungen von p mit $c_j\not\perp_A C$. Es gilt $|I|\leq|T|$ und $|J|\leq|T||C|$; insbesondere sind I und J Mengen (und keine echten Klassen). Sei nun a unabhängig von C über A. Man kann dann o.B.d.A. $\{\overline{a}_i\}a\perp_A C(c_j)_{j\in J}$ voraussetzen. Aus $a\not\perp_A(b_1,...,b_n)$ folgt $(b_1,...,b_n)\not\perp_A\{\overline{a}_i\}$ (wegen der Maximalität der Folge), und ebenso gilt $b_k\not\perp_A\{c_j\}$ für $1\leq k\leq n$. Es gibt dann eine minimale Menge $A_0\subset\bigcup\{\overline{a}_i\}$ mit $\{b_1,...,b_n\}\not\perp_A A_0$. Sei $a'\in A_0$; dann gilt $a'\not\perp_A\{b_1,...,b_n\}\cup A_0\setminus\{a'\}$. Aus Axiom (iii) folgt dann $a'\not\perp_A\{c_j\}\cup A_0\setminus\{a'\}$ – das ist unmöglich, da $(\bigcup\{a_i\})\cup\{c_j\}$ unabhängig über A ist. □

Lemma 13.7 $\mathrm{tp}(a_1/A)$ *und* $\mathrm{tp}(a_2/A)$ *seien orthogonal und es gelte $B\not\perp_A a_1a_2$. Dann gilt $B\not\perp_A a_1$ oder $B\not\perp_A a_2$.*

Beweis Es gelte $B\perp_A a_1$ und $B\perp_A a_2$. Aus $\mathrm{tp}(a_1/A)\perp\mathrm{tp}(a_2/A)$ folgen dann $a_1\perp_{AB}a_2$, $a_1\perp_A Ba_2$, $a_1a_2\perp_{Aa_2}B$ und schließlich $a_1a_2\perp_A B$. □

Korollar 13.8 *$p_1,...,p_n\in S(A)$ seien paarweise orthogonale reguläre Typen, und für jedes i seien $b_{i,1},...,b_{i,m_i}$ unabhängige Realisierungen von p_i; $a\in\mathfrak{C}$ und $C\subset\mathfrak{C}$ seien beliebig. Aus $a\not\perp_A\{b_{i,j}\mid 1\leq i\leq n\wedge 1\leq j\leq m_i\}$ und $b_{i,j}\not\perp_A C$ (für $1\leq i\leq n\wedge 1\leq j\leq m_i$) folgt dann $A\not\perp_a C$.*

Beweis Aus Lemma 13.7 folgt, daß ein i existiert mit $a\not\perp_A\{b_{i,j}\mid 1\leq jm_i\}$. Aus Satz 13.6 folgt $a\not\perp_A C$. □

Beispiel 13.4 T sei die Theorie der additive Gruppe $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ mit einem Prädikat P für $\mathbb{Q}\times\{0\}$. Es gibt genau einen Typ p über der leeren Menge, der die Formel $\neg P(x)$ enthält; dieser Typ ist regulär. Sei $a\in P(\mathfrak{C})\setminus\{0\}$ und $b\in p(\mathfrak{C})$. Es gilt dann $a\not\perp\{b,a+b\}$ und $a+b\not\perp b$, aber $a\perp b$. Im obigen Satz darf man also $a\not\perp_A\{b_1,...,b_n\}$ nicht durch $a\not\perp_A C\{b_1,...,b_n\}$ ersetzen; ebenso darf die Voraussetzung der Unabhängigkeit von $b_1,...,b_n$ nicht weggelassen werden. In diesem Beispiel gilt $U(p)=2$; für Typen mit U–Rang 1 gibt es keine solchen Gegenbeispiele: die Voraussetzung der Unabhängigkeit der b_i darf dann weggelassen werden, und $a\not\perp_A\{b_1,...,b_n\}$ darf durch $a\not\perp_A C\{b_1,...,b_n\}$ ersetzt werden.

Zwei Mengen A, B heißen *geometrisch unabhängig* über C, wenn für jede über C unabhängige Folge $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ und für jede über C unabhängige Folge $(b_1, ..., b_m) \in B^m$ auch die Folge $(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ über C unabhängig ist. Falls $p \in S(C)$ ein Typ mit U–Rang 1 ist, und falls A, B in $p(\mathfrak{C})$ liegen, so sind A und B genau dann geometrisch unabhängig, wenn $A \perp_C B$ gilt. Für Typen mit $U(p) > 1$ ist das nicht immer richtig, z.B. für p aus Beispiel 13.3.

Übung 13.1 In Lemma 13.4 (ii) genügt es zu fordern, daß die nichtforkenden Erweiterungen von p auf A' regulär und paarweise nicht fast orthogonal sind. (Hinweis: Man verwende Satz 13.6.)

Korollar 13.9 *p sei ein regulärer und stationärer Typ; dann folgt aus $q \not\perp p$ und $p \not\perp r$ auch $q \not\perp r$.*

Beweis Es existiert eine Menge B und nichtforkende Erweiterungen q', r', p' und p'' von q, r, p auf B mit $q' \not\perp^a p'$ und $p'' \not\perp^a r'$; da p stationär ist, gilt $p' = p''$. Es existieren dann Realisierungen $a \models q'$, $b \models p'$ und $c \models r'$ mit $a \not\perp_B b$ und $b \not\perp_B c$; aus Satz 13.6 folgt $a \not\perp_B c$. □

Die Relation $\not\perp$ ist folglich eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der regulären, stationären Typen. Statt in Korollar 13.9 zu fordern, daß p stationär ist, könnte man auch verlangen, daß p, q und r alle über der gleichen Menge definiert sind oder daß alle Erweiterungen von $p \in S(A)$ auf $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ paarweise nichtorthogonal sind.

Eine Menge A heißt *fast endlich*, wenn es eine endliche Menge B gibt mit $A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$.

Lemma 13.10 *A sei eine fast endliche Menge, $p \in S(A)$ sei ein regulärer und $q \in S(A)$ ein beliebiger Typ mit $p \not\perp^a q$; $B \supset A$ sei eine Menge, und $M \supset B$ sei ein a–saturiertes Modell; dann gilt $dim_{q|B}(M) \leq dim_{p|B}(M)$.*

Beweis Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine $q|B$–Basis von M. Da M a–saturiert ist und da p und q nicht fast orthogonal sind, gibt es zu jedem a_i ein $b_i \in p(M)$ mit $a_i \not\perp_A b_i$. Die b_i sind dann sogar Realisierungen von $p|B$, denn aus $b_i \not\perp_A B$ würde mit Satz 13.6 auch $a_i \not\perp_A B$ folgen. Aus $a_i \not\perp_A b_i$ und $a_i \perp_A B$ folgt wegen der Transitivität des Forkings auch $a_i \not\perp_B b_i$. Wäre nun $(b_i)_{i \in I}$ nicht unabhängig über B, so fände man nach einer Umnumerierung Elemente $b_0, b_1, ..., b_n$, so daß $\{b_1, ..., b_n\}$ unabhängig über B sind und b_0 von $\{b_1, ..., b_n\}$ über B abhängt. Durch zweimalige Anwendung von Satz 13.6 erhielte man $a_0 \not\perp_B b_1 ... b_n$ und $a_0 \not\perp_B a_1 ... a_n$. □

Satz 13.11 *Sei T superstabil, und seien p und q stationäre nicht fast orthogonale Typen aus $S(B)$; falls p regulär ist und falls M ein B enthaltendes a–saturiertes Modell ist, so gilt $dim_q(M) \leq dim_p(M)$.*

Beweis O.B.d.A. sei B algebraisch abgeschlossen. a und b seien über B abhängige Realisierungen von p und q. Es gibt dann eine fast endliche algebraisch abgeschlossene Teilmenge A von B mit $ab \perp_A B$. a und b sind dann auch über A abhängig; $p \restriction A$ und $q \restriction A$ sind regulär, und somit läßt sich Lemma 13.10 anwenden. □

Beispiel 13.5 R sei ein einstelliges Prädikat, und T sei die Theorie, die besagt, daß sowohl R als auch $\neg R$ unendlich sind. p und q seien Typen aus $S(\emptyset)$, $p(x)$ werde durch $R(x)$ und $q(y)$ durch $\neg R(y)$ axiomatisiert. p und q sind regulär, aber $p \otimes q$ ist nicht regulär und weder zu p noch zu q fast orthogonal. Für ein Modell M gilt $dim_p(M) = |R(M)|$, $dim_q(M) = |\neg R(M)|$ und $dim_{p \otimes q}(M) = \min(dim_p(M), dim_q(M))$.

Bemerkung 13.12 *T sei superstabil, und $p \in S(A)$ und $q \in S(B)$ seien stationäre Typen; ferner sei p regulär; dann folgt aus Satz 13.11, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:*

(i) $p \not\perp q$;

(ii) für jedes Paar $M \subset N$ von a–saturierten Modellen mit $AB \subset M$ gilt: wenn $q|M$ in N realisiert wird, so wird auch $p|M$ in N realisiert;

(iii) es gibt ein a–saturiertes Modell M mit $AB \subset M$, und es gibt eine Realisierung a von $q|M$, so daß $p|M$ in dem a–Primmodell N von Ma realisiert wird.

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii): $p|M$ und $q|M$ sind nicht fast orthogonal, da M ein a–saturiertes Modell ist; aus $dim_{q|M}(N) \leq dim_{p|M}(N)$ folgt unmittelbar, daß wenn $q|M$ in N realisiert ist, auch $p|M$ in N realisiert sei muß.

(ii)$\Rightarrow$(iii) ist trivial.

(iii)$\Rightarrow$(i): a sei eine Realisierung von $q|M$,N sei die a–Primerweiterung von Ma und b sei eine Realisierung von $p|M$ in N; dann sind a und b über M abhängig, denn a dominiert N über M (Übung 11.3). $\square$

Lemma 13.13 *T sei superstabil; p, q seien stationäre Typen aus $S(B)$, p sei ferner regulär. Für ein n gelte $q \not\perp^a \otimes^n p$; falls q in einem B umfassenden a–saturierten Modell M realisiert wird, so wird auch p in diesem Modell realisiert.*

Beweis o.B.d.A. sei B algebraisch abgeschlossen. a sei eine Realisierung von q in M, und $(b_1, ..., b_n)$ sei eine Realisierung von $\otimes^n p$ mit $a \not\perp_B \{b_1, ..., b_n\}$. A sei eine fast endliche Teilmenge von B mit $ab_1...b_n \perp_A B$; es gilt dann auch $a \not\perp_A \{b_1, ..., b_n\}$. Da M a–saturiert ist, gibt es Elemente b'_i in M mit $\mathrm{tp}(b'_1...b'_n/Aa) = \mathrm{tp}(b_1...b_n/Aa)$; wenn keines der b'_i den Typ p realisiert, so gilt $b'_i \not\perp_A B$ für alle i, und mit $a \not\perp_A \{b'_1, ..., b'_n\}$ folgt daraus aus Satz 13.6, daß a von B abhängt über A, was aber unmöglich ist wegen $a \perp_A B$. $\square$

Satz 13.14 *T sei superstabil, $p \in S(A)$ sei ein stationärer regulärer Typ, und $M \prec N$ seien a–saturierte Modelle mit $A \subset M$; dann gilt $dim_p(N) = dim_p(M) + dim_{p|M}(N)$.*

Beweis I sei eine p–Basis für M, und $I\dot{\cup}J$ sei eine p–Basis für N. Es ist zu zeigen, daß J eine $p|M$–Basis für N ist. $p|AI$ wird in M nicht realisiert, und somit folgt also aus Lemma 13.13 $\otimes^n p|\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AI) \perp^a \mathrm{tp}(\overline{m}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AI))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\overline{m} \in M$; daraus folgt $J \perp_{AI} M$. Wegen $J \perp_A I$ folgt weiter $J \perp_A M$, J ist also eine unabhängige Menge von Realisierungen von $p|M$.

Sei nun a eine beliebige Realisierung von $p|M$ in N; dann ist a von IJ über A abhängig; insbesondere gilt $a \not\perp_A MJ$; wegen $a \perp_A M$ folgt $a \not\perp_M J$; J ist also eine $p|M$–Basis von N. $\square$

Es wurde schon erwähnt, daß in stabilen Theorien immer reguläre Typen existieren. Für superstabile Theorien kann das noch verschärft werden:

Satz 13.15 *T sei superstabil, und $M \precneqq N$ sei ein Paar von a–saturierten Modellen. Dann gibt es ein Element a von N, so daß $\mathrm{tp}(a/M)$ regulär ist.*
(Das a kann in N selber gefunden werden, nicht nur in N^{eq}).

Beweis Man wähle $a \in N \setminus M$ so, daß $U(\mathrm{tp}(a/M))$ minimal wird. Es gibt dann eine fast endliche Teilmenge A von M, über der $\mathrm{tp}(a/M)$ nicht forkt. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{tp}(a/A)$ regulär ist. Sei B eine A umfassende Menge, und seien a' und b Realisierungen von $\mathrm{tp}(a/A)$ mit $a' \perp_A B$ und $b \not\perp_A B$. O.B.d.A. sei $B \setminus A$ endlich, B sei in M enthalten, $a = a'$ (es gilt $\mathrm{tp}(a'/B) = \mathrm{tp}(a/B)$) und $b \in N$. Es gilt dann $U(\mathrm{tp}(b/M)) \leq U(\mathrm{tp}(b/B)) < U(\mathrm{tp}(a/B)) = U(\mathrm{tp}(a/M))$; das ist aber nur möglich, wenn b in M liegt; es folgt $a \perp_B b$. $\square$

Übung 13.2 T sei stabil und $p \in S(A)$ sei ein stationärer Typ. Für die drei folgenden Aussagen gelten die Implikationen (i)$\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$(iii); ist A fast endlich, so gilt auch (iii)$\Rightarrow$(i):

(i) p ist regulär;

(ii) für alle a–saturierten, A umfassenden Modelle M und für alle Realisierungen a von $p|M$ gilt:

ist N eine a–Primerweiterung von Ma, so sind alle Realisierungen von p in $N \setminus M$ auch Realisierungen von $p|M$;

(iii) es gibt ein a–saturiertes, A umfassendes Modell M, so daß gilt: ist a eine Realisierung von $p|M$, und ist N ein a–Primmodell von Ma, so sind alle Realisierungen von p in $N \setminus M$ auch Realisierungen von $p|M$.

(Hinweis: (iii)$\Rightarrow$(i) kann ähnlich wie Satz 13.15 bewiesen werden.)

Übung 13.3 Wenn die Typen aller Elemente von $\mathbb{G}$ über A regulär und paarwise nicht–orthogonal sind, erfüllt die Abhängigkeit über A die van der Waerden Axiome.

Kapitel 14

Domination

Zwei stationäre Typen heißen *parallel*, wenn ihre nichtforkenden globalen Erweiterungen übereinstimmen; die Parallelitätsbeziehung ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der stationären Typen. Der Regularitätsbegriff, die Orthogonalität und das Produkt $\otimes$ sind wohldefiniert auf den Parallelitätsklassen.

In diesem Kapitel sei T immer eine superstabile Theorie; alle betrachteten Typen seien stationär.

Im Kapitel 11 wurde die Domination eingeführt. B dominiert B' über A, wenn für alle Mengen C aus $B \downarrow_A C$ auch $B' \downarrow_A C$ folgt. Seien nun p und q Typen; p dominiert q ($p \rhd q$), wenn es eine Menge A und Tupel $\overline{b}, \overline{b}'$ gibt mit folgenden Eigenschaften: $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$ sind nichtforkende Erweiterungen von p und q, und $\overline{b}$ dominiert $\overline{b}'$ über A. Gilt sowohl $p \rhd q$ als auch $q \rhd p$, so heißen p und q dominierungsäquivalent ($p \diamond q$).

Da aus $\overline{b} \rhd_A \overline{b}'$ folgt, daß $\overline{b}$ und $\overline{b}'$ über A abhängig sind oder daß $\overline{b}'$ im algebraischen Abschluß von A liegt, folgt aus $p \rhd q$ ebenso, daß p und q nicht orthogonal sind oder daß q algebraisch ist.

Lemma 14.1 *A, B, C, D seien Mengen mit $C \subset D$ und $AB \downarrow_C D$; dann gilt $A \rhd_C B$ genau dann, wenn $A \rhd_D B$ gilt.*

Beweis Es gelte $A \rhd_C B$; sei E eine Menge mit $E \downarrow_D A$; aus $D \downarrow_C A$ folgt $ED \downarrow_C A$, und somit gilt auch $ED \downarrow_C B$; daraus folgt aber $E \downarrow_D B$.

Es gelte nun $A \rhd_D B$, und E sei eine Menge mit $E \downarrow_C A$. D' sei eine Menge mit $\mathrm{tp}(D'/ABC) = \mathrm{tp}(D/ABC)$ und $D' \downarrow_{ABC} E$; es gilt dann $A \rhd_{D'} B$ und $AB \downarrow_C D'$. Aus $E \downarrow_C A$ und $D' \downarrow_C EA$ folgt $E \downarrow_{D'} A$. Wegen $A \rhd_{D'} B$ gilt nun $E \downarrow_{D'} B$, und daraus folgt $E \downarrow_C B$. $\square$

Im Beweis dieses Lemmas wurde für die Implikation $\Rightarrow$ anstelle von $AB \downarrow_C D$ lediglich $A \downarrow_C D$ gebraucht.

Aus dem Lemma folgt, daß $p \rhd q$ genau dann gilt, wenn es zu jeder Menge A_0 eine Menge $A \supset A_0$ und Tupel $\overline{b}, \overline{b}'$ gibt mit folgenden Eigenschaften: $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$ sind nichtforkende Erweiterungen von p und q, und $\overline{b}$ dominiert $\overline{b}'$ über A. Die Dominierungsrelation für Typen ist folglich transitiv, denn die Relation $X \rhd_A Y$ ist für ein festes A transitiv. Ist p' eine nichtforkende Erweiterung von p, so sind p und p' dominierungsäquivalent; es folgt, daß $\rhd$ auf den Parallelitätsklassen von Typen wohldefiniert ist.

Sei $p \in S(B)$ und $q \in S(C)$; falls $p \rhd q$ gilt, so kann die in der Definition der Domination auftretende Menge A so gewählt werden, daß $A \setminus BC$ endlich ist; das folgt ebenfalls aus Lemma 14.1 und aus der Superstabilität von T. Falls M ein a–saturiertes Modell ist, das B und C enthält, so gilt $p \rhd q$ genau dann, wenn es Realisierungen $\overline{b}$ und $\overline{b}'$ von $p|M$ und $q|M$ gibt mit $\overline{b} \rhd_M \overline{b}'$: man kann nämlich B und C o.B.d.A. als fast endlich voraussetzen; man findet nun eine fast endliche Teilmenge A von M und Tupel $\overline{b}, \overline{b}'$, mit den folgenden Eigenschaften: $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ und $\mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$ sind nichtforkende Erweiterungen von p und q, und $\overline{b}$ dominiert $\overline{b}'$ über A; $\overline{b}$ und $\overline{b}'$ können o.B.d.A. so gewählt werden, daß $\overline{b}\overline{b}'$ und M über A unabhängig sind; $\overline{b}$ und $\overline{b}'$ sind dann Realisierungen von $p|M$ und $q|M$ mit $\overline{b} \rhd_M \overline{b}'$ (Lemma 14.1). $\square$

Übung 14.1 Falls B eine endliche Menge A dominiert, so gibt es eine endliche Teilmenge von B, die A dominiert.

Übung 14.2 $p \in S(A)$ sei ein regulärer Typ und a, b seien Realisierungen von p; dann sind $a \triangleright_A b$, $a \not\downarrow_A b$ und $b \triangleright_A a$ äquivalent.
Allgemeiner gilt: Seien $p_i \in S$ (A) paarweise orthogonale reguläre Typen. Für Realisierungen $\overline{c}$, $\overline{d}$ von $\bigotimes p_i^{m_i}$ gilt $\overline{c} \triangleright_A \overline{d}$ genau dann, wenn $\overline{d} \triangleright_A \overline{c}$ gilt.

Satz 14.2 *T sei eine superstabile Theorie, und $p \in S(B)$ und $q \in S(C)$ seien stationäre Typen; dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) $p \rhd q$*;*

(ii) für alle Paare $M \prec N$ von a–saturierten Modellen mit $BC \subset M$ gilt: wenn $p|M$ in N realisiert wird, so wird auch $q|M$ in N realisiert;

(iii) es gibt ein a–saturiertes Modell M mit $BC \subset M$, so daß für eine Realisierung a von $p|M$ der Typ $q|M$ in der a-Primerweiterung von Ma realisiert wird.

Beweis (i)⇒(ii): p dominiere q und a sei eine Realisierung von $p|M$ in N. b sei eine Realisierung von $q|M$ mit $a \triangleright_M b$. Da T superstabil ist, gibt es eine fast endliche Teilmenge A von M^{eq} mit $ab \downarrow_A M$; b' sei eine Realisierung von $\mathrm{tp}(b/Aa)$ in N; es gilt dann $a \triangleright_A b'$, und daraus folgt wegen $a \downarrow_A M$ auch $b' \downarrow_A M$. $\mathrm{tp}(b'/M)$ ist folglich die nichtforkende Fortsetzung vom stationären Typ $\mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A)$, und somit folgt $\mathrm{tp}(b'/M) = \mathrm{tp}(b/M) = q|M$.

(ii)⇒(iii) ist trivial, und (iii)⇒(i) folgt aus Übung 11.3. □

Aus Satz 14.2 und aus der Bemerkung 13.12 folgt, daß ein regulärer Typ p genau dann nichtorthogonal zu einem (stationären) Typ q steht, wenn p von q dominiert wird. Für reguläre Typen sind die Begriffe der Nichtorthogonalität und der Dominierungsäquivalenz äquivalent.

Ein Typ q ist genau dann minimal bezüglich „ $\rhd$“ (das heißt q ist nicht algebraisch und aus $q \rhd r$ folgt entweder $q \diamond r$ oder r ist algebraisch), wenn es einen regulären Typ p gibt mit $p \diamond q$: falls es nämlich so ein p gibt, so folgt für einen nicht algebraischen Typ r aus $q \rhd r$ auch $p \rhd r$; daraus folgt $p \not\perp r$ und somit $r \diamond p$; es gilt also $r \diamond p \diamond q$. Umgekehrt sei $q \in S(A)$ „ $\rhd$“–minimal; M sei ein a–saturiertes Modell, das A umfaßt, a sei eine Realisierung von $q|M$ und N sei das a–Primmodell von Ma. Dann gibt es ein Element $b \in N \setminus M$, für welches $p := \mathrm{tp}(b/M)$ regulär ist, und dieser Typ p ist dominierungsäquivalent zu q.

Lemma 14.3 *M sei ein a–saturiertes Modell, und $r \in S(B)$ sei ein regulärer Typ, der durch einen Typ $s \in S^n(M)$ dominiert werde; dann ist r zu einem regulären Typ $p \in S(M)$ dominierungsäquivalent.*

Beweis O.B.d.A ist B fast endlich. A sei eine fast endliche Teilmenge von M mit folgenden Eigenschaften: s forkt nicht über A und $B \downarrow_A M$; man kann o.B.d.A. $A \subset B$ annehmen, da man r durch $r|AB$ ersetzen kann. Sei B_0 eine Teilmenge von M mit $\mathrm{tp}(B/A) = \mathrm{tp}(B_0/A)$. B und B_0 sind dann über A konjugiert, und $r_0 \in S(B_0)$ sei der zu r konjugierte Typ. Falls r und r_0 nicht orthogonal sind, so gilt $r \diamond r_0 \diamond r_0|M$, woraus die Behauptung des Satzes folgt. Es gelte nun $r \perp r_0$. Da M a–saturiert ist, gibt es in M eine Morleyfolge $(B_i)_{i<\omega}$ über A. $r_i \in S(B_i)$ sei konjugiert zu r ; aus der Indiscernibilität folgt $r_i \perp r_j$ für $i \neq j$; ebenso gilt $s \restriction A \not\perp r_i$ und somit $s \not\perp r_i$ für alle i. a sei eine Realisierung von s, und für jedes i sei b_i eine Realisierung von $r_i|M$ mit $a \not\downarrow_M b_i$; das existiert nach Satz 12.3. Aus Lemma 12.4 folgt jedoch, daß die Folge $(b_i)_{i<\omega}$ unabhängig ist. Das ist in einer superstabilen Theorie unmöglich. □

Satz 14.4 *In einer superstabilen Theorie ist jeder Typ zu einem Produkt von (endlich vielen) regulären Typen dominierungsäquivalent. Falls M ein a–saturiertes Modell ist, so gilt für $q \in S(M)$ sogar, daß q dominierungsäquivalent zu einem Produkt von regulären Typen aus $S(M)$ ist.*

Beweis a sei eine Realisierung von q, und N sei eine a–Primerweiterung von Ma. $(c_i)_{i\in I}$ sei eine maximale unabhängige Folge von über M unabhängigen Elementen aus N, deren Typen über M

regulär seien. Aus Übung 11.3 folgt, daß a von allen c_i abhängig ist über M. I ist folglich endlich, denn T ist superstabil. Sei $p_i := \mathrm{tp}(c_i/M)$; dann folgt aus Satz 14.2 $q \trianglerighteq \bigotimes_{i\in I} p_i$.

Sei nun N' ein elementares Teilmodell von N, das über $M \cup \{c_i \mid i \in I\}$ prim ist; unter diesen Primmodellen sei N' so gewählt, daß $U(\mathrm{tp}(a/N'))$ minimal sei. Es wird gezeigt werden, daß N' dann a enthält; daraus folgt $\bigotimes_{i\in I} p_i \trianglerighteq q$.

Wir nehmen an, daß a nicht in N' liegt. $N'(a)$ sei ein in N liegendes a–Primmodell von $N'a$; es gibt dann ein $b \in N'(a) \setminus N'$, für welches $r := \mathrm{tp}(b/N')$ regulär ist; es gilt insbesondere $a \not\perp_{N'} b$. Wäre r dominierungsäquivalent zu einem regulären Typ $p \in S(M)$, so wäre r auch zu $p|N'$ dominierungsäquivalent, und man könnte $p|N'$ durch ein $c' \in N$ realisieren, was der Maximalität der Familie $(c_i)_{i\in I}$ widerspräche; also ist r zu keinem regulären Typ $p \in S(M)$ dominierungsäquivalent. Aus Lemma 14.3 folgt, daß r durch keinen Typ $s \in S^n(M)$ dominiert wird; r ist folglich zu allen Typen $s \in S(M)$ orthogonal. Sei nun B eine fast endliche Teilmenge von N' mit $ab \perp_B N'$; B enthalte ferner alle c_i. A sei eine fast endliche Teilmenge von M mit $B \perp_A M$; o.B.d.A. gilt $A \subset B$. Da r zu allen Typen aus $S^n(M)$ orthogonal ist, ist r auch orthogonal zu Typen aus $S^n(A)$; insbesondere gilt $\mathrm{tp}(M/A) \perp r$. Die Orthogonalitätsrelation ist invariant unter Parallelität, somit gilt auch $\mathrm{tp}(M/B) \perp \mathrm{tp}(b/B)$. $\mathrm{tp}(b/B)$ isoliert folglich $\mathrm{tp}(b/MB)$, und somit folgt aus Lemma 10.4, daß b/MB a–atomar ist. Da $B/M\cup\{c_i \mid i \in I\}$ ebenfalls a–atomar ist (Lemma 11.4), folgt, daß $Bb/M\cup\{c_i \mid i \in I\}$ a–atomar ist. Es existiert daher eine a–Primerweiterung $N'' \prec N$ von $M \cup \{c_i \mid i \in I\}$, die Bb enthält.

Aus $a \not\perp_{N'} b$ und $ab \perp_B N'$ folgt $a \not\perp_B b$, und somit folgt

$$U(\mathrm{tp}(a/N'') \leq U(\mathrm{tp}(a/Bb)) < U(\mathrm{tp}(a/B)) = U(\mathrm{tp}(a/N'));$$

das steht im Widerspruch zur Wahl von N' .

Sei nun q ein beliebiger stationärer Typ und sei q' eine nichtforkende Erweiterung von q, die auf einem Modell definiert ist. Dann gilt $q \diamond q'$ und somit ist q ebenfalls dominierungsäquivalent zu einem Produkt von regulären Typen. □

Wir nennen einen Typ p *orthogonal zu* A ($p \perp A$), wenn p z über A definierten Typen orthogonal ist.

Problem: Folgt $p \perp A$ aus $p \perp q$ für alle $q \in S^1(A)$?

Übung 14.3 M sei a–saturiert, und $p, q \in S(M)$ seien dominierungsäquivalent; dann folgt aus $a \models p, b \models q$ und $a \triangleright_M b$ auch $a \diamond b$ (M). (Hinweis: Man verwende Übung 14.2 und Satz 14.4.)

Es soll nun abschließend noch gezeigt werden, daß die Darstellung eines stationären Typs als Produkt von regulären Typen im wesentlichen eindeutig ist. Dazu wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 14.5 *p, q und r seien stationäre Typen mit $p \trianglerighteq q$; dann gilt auch $p \otimes r \trianglerighteq q \otimes r$.*

Beweis A sei eine Menge und a, b,c seien Elemente, so daß $\mathrm{tp}(a/A)$ eine nichtforkende Erweiterung von p, $\mathrm{tp}(b/A)$ eine nichtforkende Erweiterung von q und $\mathrm{tp}(c/A)$ eine nichtforkende Erweiterung von r sei mit $a \triangleright_A b$ und $ab \perp_A c$. Aus Lemma 14.1 folgt $a \triangleright_{Ac} b$. Sei nun X eine Menge mit $X \perp_A ac$. *Es* folgt $X \perp_{Ac} a$, $X \perp_{Ac} b$ und $X \perp_A bc$. Somit folgt $ac \triangleright_A bc$. □

Satz 14.6 *$p_1, ..., p_n$ und $q_1, ...q_m$ seien reguläre Typen.*

$$p_1 \otimes ... \otimes p_n \trianglerighteq q_1 \otimes ... \otimes q_m$$

gilt genau dann wenn es eine Injektion $\pi : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ gibt mit $q_i \diamond p_{\pi(i)}$.

Beweis Falls es eine Injektion $\pi : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ gibt mit $q_i \diamond p_{\pi(i)}$, so folgt

$$p_1 \otimes ... \otimes p_n \trianglerighteq q_1 \otimes ... \otimes q_m,$$

aus Lemma 14.5.

Es gelte nun $p_1 \otimes ... \otimes p_n \trianglerighteq q_1 \otimes ... \otimes q_m$. Aus Lemma 14.5 folgt, daß es genügt, das folgende zu zeigen: Falls $p_1, ..., p_n$ paarweise nicht orthogonale reguläre Typen sind, und falls $s_1, ..., s_n$ und $t_1, ..., t_n$ natürliche Zahlen sind, so folgt aus $p_1^{s_1} \otimes ... \otimes p_n^{s_n} \trianglerighteq p_1^{t_1} \otimes ... \otimes p_n^{t_n}$ auch $s_i \geq t_i$ für alle i.

Alle Typen p_i seien über einem a–saturierten Modell M definiert; $\overline{a}$ sei eine Realisierung von $p_1^{s_1} \otimes ... \otimes p_n^{s_n}$. N sei das a–Primmodell von $M\overline{a}$. $a_1, ..., a_{s_1}$ seien unabhängige Realisierungen von p_1; es genügt zu zeigen, daß $a_1, ..., a_{s_1}$ eine p_1–Basis für N ist (für die übrigen p_i argumentiere man genau so). Anderenfalls gäbe es in N eine Realisierung c von p_1 mit $c \downarrow_M a_1...a_{s_1}$. Aus Lemma 12.4 folgte $c \downarrow_M \overline{a}$, was nicht möglich ist. $\square$

Kapitel 15

Nicht multidimensionale Theorien

Lemma 15.1 *Seien A und B Mengen mit $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} B$, und sei $p \in S(A)$ ein Typ mit $p \perp \emptyset$; dann gilt auch $p \perp B$.*

Beweis Man kann o.B.d.A. voraussetzen, daß A und B algebraisch abgeschlossen sind. Aus Satz 12.5 folgt, daß $p \perp \emptyset$ genau dann gilt, wenn für alle n, m und für alle $q \in S^n(\emptyset)$ gilt: $p^m \perp^a q$. Es genügt also zu zeigen, daß für jeden Typ $q \in S^n(B)$ die Typen $p|AB$ und $q|AB$ fast orthogonal aufeinander stehen. Sei a eine Realisierung von $p|AB$ und sei $\bar{b}$ eine Realisierung von $q|AB$. *Es* gilt dann $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} A$ und somit $B\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B} A$; wegen $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} A$ folgt weiter $B\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} A$. Da p orthogonal zu $\emptyset$ steht, gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} B\bar{b}$ und es folgt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{AB} \bar{b}$. $p|AB$ und $q|AB$ sind also fast orthogonal. □

Lemma 15.2 *T sei superstabil. Für einen regulären, stationären Typ $p = \mathrm{tp}(a/A)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt nur mengenviele $\not\perp$–Klassen von Konjugierten von p;

(ii) falls α ein Automorphismus von $\mathfrak{C}$ ist, der $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ festläßt, so gilt $p \not\perp p^\alpha$;

(iii) $p \not\perp \emptyset$.

Beweis (i)⇒(ii): Sei $p' = \mathrm{tp}(a'/A')$ ein Typ mit $p \perp p'$ und $\mathrm{stp}(aA/\emptyset) = \mathrm{stp}(a'A/\emptyset)$. Man wähle nun a'' und A'' mit $\mathrm{stp}(a''A''/\emptyset) = \mathrm{stp}(aA/\emptyset)$ und $a''A'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} aAa'A'$. Da p regulär und stationär ist, gilt $p \perp p''$ oder $p' \perp p''$; es gibt dann Morleyfolgen $(a_\beta A_\beta)_{\beta<\lambda}$ beliebiger Länge mit $aA = a_0A_0$, so daß die Typen $\mathrm{tp}(a_\beta/A_b)$ paarweise orthogonal sind.

(ii)⇒(iii): Es gelte $p \perp \emptyset$. Man wähle $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset))$ so, daß $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} \alpha(A)$. Aus Lemma 15.1 folgt $p \perp \alpha(A)$, und somit gilt $p \perp p^\alpha$.

(iii)⇒(i): Es gelte $p \not\perp \emptyset$; es gilt dann $p^\alpha \not\perp \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ für alle $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\emptyset)$. Falls $\mathbb{P}$ eine Menge von regulären, stationären Typen ist mit der Eigenschaft, daß jeder Typ über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ zu einem Produkt von Typen aus $\mathbb{P}$ dominierungsäquivalent ist, so ist jeder Typ p^α nichtorthogonal zu einem Typ aus $\mathbb{P}$. □

Eine superstabile Theorie T heißt *nicht multidimensional*, wenn es nur mengenviele $\not\perp$–Klassen von regulären, stationären Typen gibt. Eine Theorie T ist genau dann nicht multidimensional, wenn alle regulären, stationären Typen p die Aussagen (i) bis (iii) aus Lemma 15.2 erfüllen.

Übung 15.1 Eine superstabile Theorie T ist genau dann nicht multidimensional, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Aussagen zutrifft:

*(i)** Es gibt nur mengenviele $\diamond$–Klassen von regulären Typen;

*(ii)** für jeden stationären Typ p und für jeden Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset))$ gilt $p \diamond p^\alpha$;

*(iii)** kein stationärer Typ ist orthogonal zur leeren Menge.

Sei nun T eine superstabile, nicht multidimensionale Theorie mit $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$. $\mathbb{P}$ sei ein Repräsentantensystem von regulären, stationären Typen für die $\not\perp$–Klassen; alle Typen aus $\mathbb{P}$ seien über fast endlichen Mengen definiert. Für jedes a–Modell M wird eine Funktion von Invarianten Λ_M von $\mathbb{P}$ in die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen definiert durch $\Lambda_M(p) := dim_{p'}(M)$, wobei p' ein zu p konjugierter Typ sei, dessen Definitionsbereich in M liege. Es soll nun gezeigt werden, daß Λ_M wohldefiniert ist: Da M ein a–Modell ist und da die Typen aus $\mathbb{P}$ über fast endlichen Mengen definiert sind, gibt es zu jedem $p \in \mathbb{P}$ ein p' von der geforderten Art. Seien nun sowohl $p' \in S(A')$ und $p'' \in S(A'')$ zu $p \in \mathbb{P}$ konjugierte Typen mit $A', A'' \subset M$. Sei M_0 das a–Primmodell von $A'A''$ in M. Nach Satz 13.14 gilt dann $dim_{p'}(M) = dim_{p'|M^0}(M) + dim_{p'}(M_0)$ und $dim_{p''}(M) = dim_{p''|M^0}(M) + dim_{p''}(M_0)$. Da M_0 a–saturiert ist, folgt $dim_{p'}(M_0) \geq \aleph_0$ und $dim_{p''}(M_0) \geq \aleph_0$; aus Übung 11.1 folgt $dim_{p'}(M_0) \leq \aleph_0$ und $dim_{p''}(M_0) \leq \aleph_0$. Aus $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ folgt, daß p' und p'' über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ konjugiert sind, daher gilt $p' \not\perp p''$ (Lemma 15.2), woraus auch $p'|M_0 \not\perp p''|M_0$ folgt. Nach Satz 12.3 sind $p'|M_0$ und $p''|M_0$ sogar nicht schwach orthogonal, und dann folgt $dim_{p'|M^0}(M) = dim_{p''|M^0}(M)$ aus Satz 13.11; somit gilt $dim_{p'}(M) = dim_{p''}(M) \geq \aleph_0$, Λ_M ist also wohldefiniert.

Satz 15.3 *Sei T eine superstabile, nicht multidimensionale Theorie mit* $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$. $\mathbb{P}$ *und Λ_M seien definiert wie oben. Dann sind zwei a-Modelle M und M' von T genau isomorph, wenn die Invariantenfunktionen Λ_M und $\Lambda_{M'}$ gleich sind. Ferner gibt es zu jeder Funktion Θ von $\mathbb{P}$ in die unendlichen Kardinalzahlen ein a-Modell N von T mit $\Lambda_N = \Theta$.*

Beweis Sei zuerst eine Funktion $\Theta : \mathbb{P} \to Card \setminus \omega$ gegeben. M_0 sei das a–Primmodell von T. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei $(a^p_\alpha)_{\alpha<\Theta(p)}$ eine Folge von über M_0 unabhängigen Realisierungen von p', wobei p' wie oben ein zu p konjugierter Typ sei, der über einer Teilmenge von M_0 definiert sei. N sei das a–Primmodell über $M_0 \cup \{a^p_\alpha | p \in \mathbb{P} \wedge \alpha < \Theta(p)\}$. Sei a eine Realisierung von $p'|M_0 \cup \{a^p_\alpha \mid \alpha < \Theta(p)\}$; da p' zu allen q' senkrecht steht für $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$, folgt $a \perp N(M_0)$ aus Übung 11.3, und somit liegt a nicht in N. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ ist $\{a^p_\alpha \mid \alpha < \Theta(p)\}$ folglich eine $p'|M_0$–Basis von N, und es folgt daher $\Lambda_N(p) = dim_{p'}(N) = dim_{p'|M^0}(N)\aleph_0 = \Theta(p) + \aleph_0 = \Theta(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Damit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Man betrachte nun in der obigen Konstruktion das Modell N zur Funktion $\Theta(p) = \aleph_0$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Dieses Modell ist nach Übung 11.1 ebenfalls a–prim über der leeren Menge, denn alle Modelle sind a–atomar über $\emptyset$, und N besitzt keine überabzählbare Folge von Indiscernibles: Anderenfalls existierte nach Lemma 5.4 eine fast endliche Menge $A \subset N$ und ein Typ $q \in S(A)$, so daß von q eine überabzählbare Morleyfolge in N realisiert würde; wähle $p \in \mathbb{P}$ mit $q \trianglerighteq p$; für eine geeignete fast endliche Menge $B \subset N$ gölte dann $q|B \not\perp^a p|B$, und somit folgte $\Lambda_N(p) \geq dim_{p|B}(N) > \aleph_0$ aus Satz 13.11.

Sei nun M ein a–Modell. M_0 sei ein in M enthaltenes a–Primmodell über $\emptyset$; aus dem vorhergehenden Abschnitt folgt, daß man o.B.d.A. $dim_{p'|M^0}(M) \geq \aleph_0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ voraussetzen kann. Man wähle nun für alle $p \in \mathbb{P}$ eine $p'|M_0$-Basis $\{a^p_\alpha \mid \alpha < \Lambda_M(p)\}$ von M. Die Menge $G := M_0 \cup \{a^p_\alpha \mid p \in \mathbb{P} \wedge \alpha < \Lambda_M(p)\}$ ist dann bis auf Isomorphie durch die Invariantenfunktion Λ_M bestimmt. Sei M_1 das a–Primmodell von G in M. Falls $M_1 \subsetneq M$, so existiert nach Satz 13.15 ein $a \in M \setminus M_1$, so daß $\mathrm{tp}(a/M_1)$ regulär ist. Es gibt dann ein $p \in \mathbb{P}$ mit $\mathrm{tp}(a/M_1) \not\perp p$, und nach Bemerkung 13.12 müßte dann $p'|M_1$ in M realisiert sein, was der Basiseigenschaft von $\{a^p_\alpha \mid \alpha < \Lambda_M(p)\}$ widerspricht. Es folgt somit $M = M_1$; M ist also durch Λ_M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. □

Kapitel 16

D O P

$M_0 \subset M$ seien a–Modelle; $B \subset M$ heißt *reguläre Basis* von M über M_0, wenn B unabhängig ist über M_0, wenn $\mathrm{tp}(b/M_0)$ regulär ist für alle $b \in B$ und wenn B maximal ist mit diesen Eigenschaften. Wenn die Theorie von M nicht multidimensional ist und wenn B eine reguläre Basis von M über M_0 ist, so folgt aus dem Beweis von Satz 15.3, daß M a–prim über BM_0 ist. Für beliebige superstabile Theorien ist das aber falsch: T sei die Theorie einer Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen und ohne endliche Äquivalenzklassen; $M_0 \subset M$ seien Modelle von T. B sei eine reguläre Basis für M über M_0; B besteht aus allen Elementen aus $M \setminus M_0$, die zu einem Element aus M_0 äquivalent sind sowie aus je einem Repräsentanten für die Äquivalenzklassen, die in $M \setminus M_0$ liegen. M ist genau dann a–prim über BM_0, wenn alle Äquivalenzklassen, die in $M \setminus M_0$ liegen, abzählbar sind. Obwohl a–Modelle im allgemeinen also nicht a–prim über regulären Basen sind, gilt dennoch die folgende schwächere Aussage:

Lemma 16.1 *T sei superstabil, $M_0 \subset M$ seien a-Modelle und B sei eine reguläre Basis für M über M_0. Dann gilt $B \triangleright_{M_0} M$.*

Beweis Es genügt zu zeigen, daß $B \triangleright_{M_0} \overline{c}$ für alle $\overline{c} \in M$ gilt. $p_i \in S(M_0)$ seien paarweise orthogonale reguläre Typen mit $\mathrm{tp}(\overline{c}/M_0) \diamond \bigotimes p_i^{m_i}$. M_1 sei eine in M enthaltene a–Primerweiterung von $M_0\overline{c}$. Aus Satz 14.2 folgt, daß in M_1 eine Realisierung $\overline{a} = (a_1, ..., a_r)$ von $\bigotimes p_i^{m_i}$ existiert. Aus Übung 11.3 folgt $\overline{c} \triangleright_{M_0} \overline{a}$ und aus Übung 14.3 folgt $\overline{a} \triangleright_{M_0} \overline{c}$. Wegen der Transitivität der Dominanz genügt es, $B \triangleright_{M_0} \overline{a}$ zu zeigen. Sei X eine Menge mit $X \not\downarrow_{M_0} \overline{a}$. Da B eine reguläre Basis ist, gilt $a_i \not\downarrow_{M_0} B$ für alle i. Aus Korollar 13.8 folgt somit $X \not\downarrow_{M_0} B$. □

Lemma 16.2 *$(A_i)_{i \in I}$ sei eine über B unabhängige Folge, und für jedes i gelte $A_i \triangleright_B \hat{A}_i$; dann ist auch $(\hat{A}_i)_{i \in I}$ über B unabhängig.*

Beweis Man kann o.B.d.A. annehmen, daß I endlich ist. Ersetzt man der Reihe nach jeweils ein A_i durch $\hat{A}_i$, so bleibt die Unabhängigkeit erhalten. □

Lemma 16.3 *Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine über M unabhängige Folge, M_i sei ein a-Primmodell über MA_i und M^* sei ein a-Primmodell über $(M_i)_{i \in I}$. Dann ist M^* a–prim über $M \cup \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.*

Beweis N sei ein $M \cup \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ enthaltendes a–Modell. Für jedes $i \in I$ sei f_i eine MA_i–Einbettung von M_i in N; M_i' sei das Bild von f_i. Aus Übung 11.3 und Lemma 16.2 folgt, daß sowohl $(M_i)_{i \in I}$ als auch $(M_i')_{i \in I}$ über M unabhängig sind. $\bigcup f_i : \bigcup M_i \to \bigcup M_i'$ ist folglich eine elementare Einbettung und kann zu einer Einbettung von M^* in N fortgesetzt werden. □

Da reguläre Basen nicht ausreichen, um Erweiterungen M/M_0 zu charakterisieren, betrachtet man Bäume von Zwischenerweiterungen. Sei B eine unter Anfangsstücken abgeschlossene Teilmenge von ${}^{<\omega}I$. (Im folgenden wird für die Relation „s ist Anfangsstück von t“ die Bezeichnung $s \subset t$ verwendet; ti entstehe aus der Folge t durch Anhängen von i.) Ein *Modell–Baum* ist eine Familie $(M_t)_{t \in B}$ von a–Modellen mit

(i) $M_t \subset M_s$ falls $t \subset s$;

(ii) für jedes $t \in B$ ist $(M_{ti})_{ti \in B}$ unabhängig über M_t;

(iii) $M_{ti} \rhd_{M_t} M_{tij}$.

Lemma 16.4 *T sei superstabil, M sei ein a-Modell von T, $A \subset M$ und $a \in \mathfrak{C}$. Dann gilt $M \rhd_A Ma$ genau dann, wenn $\operatorname{tp}(a/M) \perp A$.*

Beweis Es gelte $M \rhd_A Ma$; da M a–saturiert ist, genügt es, $\operatorname{tp}(a/M) \perp^a q$ zu zeigen für alle Typen $q \in S^n(M)$, die über A nicht forken. Sei $\overline{b}$ eine Realisierung von q; es gilt $\overline{b} \downarrow_A M$, woraus $\overline{b} \downarrow_A M\overline{a}$ und $\overline{b} \downarrow_M \overline{a}$ folgt. Es gelte nun $\operatorname{tp}(a/M) \perp A$; sei $\overline{x}$ ein Tupel mit $\overline{x} \downarrow_A M$. Aus $\operatorname{tp}(a/M) \perp A$ folgt $\operatorname{tp}(a/M) \perp \operatorname{tp}(\overline{x}/M)$, $\overline{x} \downarrow_M a$ und $\overline{x} \downarrow_A Ma$. □

Beispiel 16.1 Sei T die Theorie einer zweisortige Struktur (G, X), die aus einer stabilen Gruppe G und aus einer Menge X besteht. G operiere regulär auf X, und es gebe unendlich viele Bahnen. Dann gibt es a–Modelle $N \prec M$ von T und ein a mit $M \rhd_N a$, aber nicht $M \rhd_N Ma$.

Lemma 16.5 *$A \subset B \subset C \subset D$ seien Mengen mit $B \rhd_A C$ und $C \rhd_B D$. Dann gilt $B \rhd_A D$.*

Beweis Aus $X \downarrow_A B$ folgt $X \downarrow_A C$, $X \downarrow_B C$, $X \downarrow_B D$ und $X \downarrow_A D$. □

Lemma 16.6 *Sei $(M_t)_{t \in B}$ ein Modell–Baum, und sei $\widehat{M_t} := \bigcup\{M_s \mid t \subset s \in B\}$. Für ein festes $t \in B$ ist $(\widehat{M_{ti}})_{ti \in B}$ unabhängig über M_t, und es gilt $M_{ti} \rhd_{M_t} \widehat{M_{ti}}$.*

Beweis Es genügt, das Lemma für endliches B zu zeigen, denn $C \rhd_A D$ gilt genau dann, wenn $C \rhd_A D_0$ für alle endlichen Teilmengen D_0 von D gilt. Die Behauptung soll nun für ein endliches B durch Induktion nach $|B|$ bewiesen werden. O.B.d.A. sei $t = \emptyset$. Die Induktionsvoraussetzung besagt dann $M_{ij} \rhd_{M_i} \widehat{M_{ij}}$; mit $M_i \rhd_{M_\emptyset} M_{ij}$ folgt $M_i \rhd_{M_\emptyset} \widehat{M_{ij}}$ aus Lemma 16.5. Nach Lemma 16.4 ist das gleichbedeutend mit $\operatorname{tp}(\widehat{M_{ij}}/M_i) \perp M_\emptyset$; es folgt $\bigotimes_j \operatorname{tp}(\widehat{M_{ij}}/M_i) \perp M_\emptyset$; da $(\widehat{M_{ij}})_j$ über M_i unabhängig ist (Induktionsvoraussetzung) folgt $\operatorname{tp}\left(\bigcup_j \widehat{M_{ij}}/M\right)_i \perp M_\emptyset$; daraus ergibt sich $M_i \rhd_{M_\emptyset} \bigcup_j \widehat{M_{ij}} = \widehat{M_i}$. Die Unabhängigkeit von $(\widehat{M_i})_i$ über $M_\emptyset$ folgt dann aus Lemma 16.2. □

Satz 16.7 *(Definition): Eine superstabile Theorie hat NDOP, wenn sie eine der drei folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*

(i) für alle a-Modelle $M_\emptyset, M_1$, M_2 und M mit $M_1 \downarrow_{M_\emptyset} M_2$, $M_\emptyset \subset M_1$, $M_\emptyset \subset M_2$ und M a–prim über M_1M_2 und für alle regulären Typen $p \in S(M)$ gilt $p \not\perp M_1$ oder $p \not\perp M_2$.

(ii) für alle a–Modelle $M_\emptyset$, für alle über $M_\emptyset$–unabhängigen Familien $(M_i)_{i \in I}$ von a-Modellen mit $M_\emptyset \subset M_i$ für alle a–Primerweiterungen M von $\bigcup\{M_i \mid i \in I\}$ und für alle regulären Typen $p \in S(M)$ gibt es ein $i \in I$ mit $p \not\perp M_i$;

(iii) für alle Modell –Bäume $(M_t)_{t \in B}$ von a–Modellen, für alle a–Primerweiterungen M von $\bigcup\{M_t \mid t \in B\}$ und für alle regulären Typen $p \in S(M)$ gibt es ein $t \in B$ mit $p \not\perp M_t$.

(Eine Theorie, die NDOP nicht hat, hat DOP (Dimensional Order Property).)

Beweis der Äquivalenz: Es gelte (i); (ii) soll nun gezeigt werden für endliches I durch Induktion nach $|I|$. Für $|I| \leq 2$ ist nichts zu zeigen. Sonst zerlege I in $\{j\} \dot{\bigcup} I'$; es gibt dann nach Lemma 16.3 eine a–Primerweiterung M' von $\bigcup\{M_i \mid i \in I'\}$, so daß M über $M_j \cup M'$ a–prim ist. Aus (i) folgt $p \not\perp M_j$ oder $p \not\perp M'$, und aus der Induktionsvoraussetzung folgt $p \not\perp M_i$ für ein $i \in I$. Damit ist (ii) gezeigt für endliches I.

Sei nun $(M_t)_{t \in B}$ ein Modell–Baum, M eine Primerweiterung von $\bigcup\{M_t \mid t \in B\}$ und p ein regulärer Typ aus M. Es gibt eine endliche Menge $A \subset M$, so daß p über A nicht forkt. Es gibt dann einen endlichen Teilbaum B_0 von B, so daß A in einer Primerweiterung M'' von $(M_t)_{t \in B^0}$ enthalten ist.

$p \restriction M''$ ist regulär und es gilt $p \not\perp p \restriction M''$. Wegen der Invarianz von „ $\not\perp$ “ unter Parallelität genügt es, die Behauptung für endliche B zu beweisen. Der Beweis soll durch Induktion nach $|B|$ geführt werden. Falls B linear geordnet ist, so gilt $M = M_{Max(B)}$ und es ist nichts zu zeigen. Anderenfalls sei $t \in B$ der kleinste Verzweigungspunkt in B. I_0 sei die Menge aller i mit $ti \in B$, und $\widetilde{M_i}$ sei eine a–Primerweiterung von $\widehat{M_{ti}} = \bigcup\{M_s \mid ti \subset s \in B\}$. Die Folge $(\widetilde{M_i})_{i \in I_0}$ ist nach Lemma 16.6 unabhängig; die $\widetilde{M_i}$ können daher nach Lemma 16.3 so in M gewählt werden, daß M a–prim über $\bigcup\{\widetilde{M_i} \mid i \in I_0\}$ ist. Aus der schon gezeigten endlichen Version von (ii) folgt $p \not\perp \widetilde{M_i}$ für ein $i \in I_0$. Es gibt daher einen regulären Typ $q \in S(\widetilde{M_i})$ mit $p \diamond q$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß ein $s \in B_i := \{s \in B \mid ti \subset s\}$ existiert mit $q \not\perp M_s$; dann gilt auch $p \not\perp M_s$, und somit folgt (iii).

Die Implikationen $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ sind trivial. $\square$

Verlangt man in einer der drei Definitionen von NDOP von p nur, daß p stationär und nicht orthogonal zu p ist, so entstehen äquivalente Bedingungen: Nach Lemma 15.1 existiert dann nämlich ein regulärer Typ $p' \in S(M)$ mit $p' \not\perp p$, und aus der Transitivität von „ $\not\perp$ “ (Korollar 13.9) folgt das Gewünschte.

Beispiel 16.2 Standardtheorie mit DOP: T sei die Theorie einer dreisortigen Struktur $M^* := (A, B, C)$ mit einer Surjektion f: $C \to A \times B$, wobei alle Fasern $C_{ab} := f^{-1}(a, b)$ unendlich seien; sei $d \in A$ und $e \in B$; man definiere nun

$$M_1 := (A \smallsetminus \{d\}, B, \bigcup\{C_{ab} \mid a \in A \smallsetminus \{d\} \wedge b \in B\}),$$

$$M_2 := (A, B \smallsetminus \{e\}, \bigcup\{C_{ab} \mid a \in A \wedge b \in B \smallsetminus \{e\}\})$$

und $M := M_1 \cap M_2$; $p \in S(M^*)$ sei der nichtrealisierte Typ, der die Formel $f(x) = (c,$ e) enthält. p ist regulär und es gilt sowohl $p \perp M_1$ als auch $p \perp M_2$. Alle Modelle von T sind a–saturiert. Zu jeder überabzählbaren Kardinalzahl κ gibt es 2^κ–viele Modelle: Beispielsweise kann jeder Graph mit unendlicher Punktmenge A und unendlicher Kantenmenge B durch das Modell (A, B, C), wobei C_{ab} genau dann überabzählbar sei, wenn der Punkt a auf der Kante b liegt, kodiert werden. Allgemein gilt, daß jede Theorie mit DOP in Kardinalitäten $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$ genau 2^κ viele a–Modelle hat.

$M \succ M_\emptyset$ seien a–Modelle. Ein Modell–Baum $(M_t)_{t \in B}$ heißt *regulärer* Baum für $M/M_\emptyset$, falls es zu jedem ti aus B ein a_{ti} aus M_{ti} gibt, so daß $\mathrm{tp}(a_{ti}/M_t)$ regulär ist und M_{ti} über $M_t a_{ti}$ a–prim ist.

Satz 16.8 *T habe NDOP. $(M_t)_{t \in B}$ sei ein maximaler regulärer Baum für $M/M_\emptyset$. Dann ist M a–prim über $\bigcup\{M_t \mid t \in B\}$.*

Beweis Sei $M^* \subset M$ ein a–Primmodell von $\bigcup\{M_t \mid t \in B\}$. Es soll nun $M^* = M$ gezeigt werden. Anderenfalls gibt es ein $a \in M \smallsetminus M^*$, so daß $p := \mathrm{tp}(a/M^*)$ regulär ist. Dann existiert ein $s \in B$ mit $p \not\perp M_s$; s sei minimal mit dieser Eigenschaft. Es gibt dann einen regulären Typ $p' \in S(M_s)$ mit $p' \vartriangleright p$. Sei a' eine Realisierung von $p'|M^*$ in M. Wähle j so, daß $sj \notin B$; M_{sj} sei eine a–Primerweiterung von $M_s a'$ in M. Da $\mathrm{tp}(a'/M^*)$ über M_s nicht forkt, gilt $M_{sj} \mathop{\smile\!\!\!\!|}_{M_s} \bigcup\{M_{si} \mid si \in B\}$. Aus der Minimalität von s folgt $p \perp M_r$, wobei r der Vorgänger von s sei; es folgt $M_s \vartriangleright_{M_r} M_{si}$. Dann ist aber $(M_t)_{t \in B \cup si}$ auch ein regulärer Baum für $M/M_\emptyset$, was der Maximalität von $(M_t)_{t \in B}$ widerspricht. $\square$

Falls alle regulären Bäume von T fundiert sind, so heißt T *flach*; anderenfalls heißt T *tief*. Eine tiefe Theorie hat ebenfalls 2^κ viele a–Modelle in jeder Kardinalität $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$. Falls T jedoch flach ist, so sind die Fundierungsränge der regulären Bäume sogar beschränkt. Die kleinste obere Schranke heißt *Tiefe* von T. $I_a(T, \kappa)$ sei die Anzahl der a–Modelle der Kardinalität κ von T. Falls τ die Tiefe von T ist, so gilt für $\aleph_\alpha \geq 2^{\aleph_0}$

$I_a(T, \aleph_\alpha) \leq \beth_{\tau-1}(\alpha + \aleph_0)^{2^{\aleph_0}}$, falls τ endlich

$I_a(T, \aleph_\alpha) \leq \beth_\tau(\alpha + \aleph_0)$, sonst.

Für total transzendente Theorien T gibt es eine analoge Theorie, die das gleiche Dichotomieresultat für Modelle (nicht nur für a–Modelle) liefert: hat T DOP (für Modelle) oder ist tief, dann ist die Anzahl $I(T, \kappa)$ der Modelle der Mächtigkeit κ in jeder überabzählbaren Mächtigkeit κ genau 2^κ, oder T hat NDOP und ist flach, und dann gilt für $\alpha \geq 1$

$I(T, \aleph_\alpha) \leq \beth_{\tau-1}(\alpha + \aleph_0)^{\aleph_0}$, falls die Tiefe τ endlich ist

$I(T, \aleph_\alpha) \leq \beth_\tau(\alpha + \aleph_0)$, sonst.

Interessiert man sich für die Anzahl der Modelle in einer superstabilen Theorie, so benötigt man die Eigenschaft OTOP bzw NOTOP: Es gilt dann:
Eine Theorie T hat genau dann 2^κ viele Modelle in jeder überabzählbaren Kardinalität, wenn T nicht superstabil ist oder wenn T DOP hat oder wenn T OTOP hat oder wenn T tief ist.

Literaturverzeichnis

[1] Paul Erdös and Michael Makkai. Some remarks on set theory x. *Studia Scientiarum Mathematirum Hungarica*, 1:157–159, 1966.

[2] Ulrich Felgner. Comparison of local and global choice.

[3] Alistair H. Lachlan. The transcendental rank of a theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 34:119–122, 1971.

[4] Alistair H. Lachlan. A remark on the strict order property. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 21:69–76, 1975.

[5] Saharon Shelah. Stability, the f.c.p. and superstability: model theoretic properties of formulas in a first order theory,. *Annals of Mathematical Logic*, 3:271–362, 1971.

[6] B. L. van der Waerden. *Algebra.* Springer Verlag, 1966.

Index