ÄQUIVARIANTE η-INVARIANTEN HOMOGENER RÄUME

Zusammenfassung

In meiner Doktorarbeit berechne ich die G-äquivarianten η-Invarianten einer Familie verallgemeinerter Dirac Operatoren auf Quotienten $M = G/H$ kompakter zusammenhängender Lie-Gruppen. Genauer: Wenn M homogen spin ist, sei ΣM das Spinorbündel, $U^\kappa M$ das von der irreduziblen H-Darstellung mit Höchstgewicht κ induzierte homogene Vektorbündel über M und D^κ_M der natürliche Dirac-Operator auf $\Sigma M \otimes U^\kappa M$. Wir konstruieren einen „reduktiven" Dirac-Operator $\tilde D^\kappa_M$, der mit D^κ_M bis auf Terme nullter Ordnung übereinstimmt.

Seien nun $T \supset S$ maximale Tori von G und H, und sei G/T ebenfalls homogen spin. Dann läßt sich die Berechnung von $\eta_G(\tilde D^\kappa_M)$ auf den Torus T/S zurückführen:

$$\eta_G\bigl(\tilde D^\kappa_M\bigr)(g,s) = \eta_G\bigl(\tilde D^{\kappa+\rho_H}_{G/S}\bigr)(g,s) = \frac{A_G\bigl(\eta_T(\tilde D^{\kappa+\rho_H}_{T/S})(\,\cdot\,,s)\bigr)}{A_G(\rho_G)}\,(g)$$

für $g \in T$ und $s \in \mathbb{C}$; hierbei sind ρ_H und ρ_G Halbsummen positiver Wurzeln, und A_G ist die alternierende Summe über die Weyl-Gruppe von G. Durch Berechnen von $\eta_T(\tilde D^{\kappa+\rho_H}_{T/S})$ erhält man eine explizite Formel für $\eta_G(\tilde D^\kappa_M)$, die mit leichten Modifizierungen auch dann gilt, wenn M oder G/T nicht homogen spin ist. Außerdem verschwindet $\eta_G(\tilde D^\kappa_M)$, wenn $\operatorname{rk} G - \operatorname{rk} H > 1$.

Die Funktion $\eta_G(\tilde D^\kappa_M)$ „approximiert" $\eta_G(D^\kappa_M)$ in einem nicht-technischen Sinn: Eingeschränkt auf die Menge $G_0 \subset G$ der frei auf M operierenden Elemente ist $\eta_G(\tilde D^\kappa_M) - \eta_G(D^\kappa_M)$ ein virtueller Charakter von G, der für den ungetwisteten Dirac-Operator sogar verschwindet. Insbesondere lassen sich gewisse $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-wertige Invarianten flacher Bündel über lokal homogenen Räumen vom Typ $\Gamma\backslash G/H$ mit Hilfe besagter Formel ausrechnen.

Wenn M ein kompakter symmetrischer Raum ist, gilt $\tilde D^\kappa_M = D^\kappa_M$. Wir berechnen die äquivariante η-Invariante des ungetwisteten Dirac-Operators und des Signatur-Rand-Operators für alle irreduziblen symmetrischen Räume mit $\operatorname{rk} G - \operatorname{rk} H = 1$, also für die ungerade-dimensionalen reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten und den Raum $\mathrm{SU}_3/\mathrm{SO}_3$.

Als Funktion auf G kann $\eta_G(D)$ Singularitäten bei allen $g \in G$ haben, die nicht frei operieren. Wenn $M = \partial N$ für eine Mannigfaltigkeit N gilt, auf die sich D und die G-Aktion in verträglicher Weise fortsetzen lassen, kann man die Singularität bei g durch ein Integral über eine äquivariante Differentialform auf der Fixpunktmenge von g beschreiben, und erhält $\eta_G(D)$ so auf ganz G, wenn man nur die Werte auf G_0 kennt und G_0 in G dicht liegt. Mit dieser Methode und der Formel für $\eta_G(\tilde D_M)$ berechnen wir $\eta_G(D_M)$ für die Aloff-Wallach-Mannigfaltigkeiten $M = \mathrm{SU}_3/S^1$.

Sebastian Goette, Math. Inst. der Univ. Freiburg, Eckerstr. 1, 79104 Freiburg, Germany

E-mail address: goette@mathematik.uni-freiburg.de