FUNKTIONALANALYSIS
QUIZ — SOMMERSEMESTER 2024

Dieses Quiz wird als Anwesenheitsübung im ersten Tutorium am Dienstag, 23.04, und Mittwoch, 24.04., in den Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis bearbeitet. Es wird nicht etwartet, dass alle Fragen im Tutorium bearbeitet werden.

In der gesamten Aufgabe bezeichnet $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ den euklidischen Raum, i.e. die Menge $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\|\cdot\|_2$ gegeben durch

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Dies induziert mittels $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Auf dem Raum $C^0([a, b])$ der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verwenden wir die Supremumsnorm gegeben durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

1. Topologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(1) Auf $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abbildung $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ gegeben durch
$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$
Zeigen Sie bitte, dass diese Abbildung eine Metrik (auch *Manhattan-Metrik* or *Taxi-Metrik* genannt) definiert. Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ gilt?

(2) Auf $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Abbildung $d_{\mathrm{SNCF}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ gegeben durch
$$d_{\mathrm{SNCF}}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung,} \\ \|x\| + \|y\| & x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ liegen nicht auf einer Geraden durch den Ursprung.} \end{cases}$$
Zeigen Sie bitte, dass diese Abbildung eine Metrik (auch *Französische Eisenbahnmetrik* gennant) definiert. Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_*$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass $d_{\mathrm{SNCF}}(x, y) = \|x - y\|_*$ gilt?

(3) Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ist die Menge A dann offen oder abgeschlossen?

(4) Sei $O \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Ist $x \in O$ dann ein Häufungspunkt?

(5) Ändert sich die Antwort zur vorherigen Frage, wenn man $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$ betrachtet?

(6) Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Ist die Menge K dann abgeschlossen und beschränkt?

(7) Sei $K \subseteq X$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge. Ist die Menge K dann kompakt?

(8) Sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-leerer und abgeschlossener Teilmengen von X, die $A_{j+1} \subseteq A_j$ erfüllen. Gilt dann, dass der Schnitt $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ nicht-leer ist?

(9) Ändert sich die Antwort zur vorherigen Frage, wenn man abgeschlossen durch kompakt ersetzt?

(10) Sei eine Teilmenge $A \subseteq (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch
$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 2\right\}.$$
Ist diese Menge offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt? Was ist das Innere, der Abschluss, und der Rand?

(11) Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq (C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch
$$\mathcal{A} = \{f \in C([-1,1]) : f \text{ ist eine gerade Funktion}\}\,.$$
Ist die Teilmenge $\mathcal{A}$ abgeschlossen, beschränkt, offen oder kompakt?

2. Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(12) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine Cauchy–Folge? Gilt die Umkehrung?
(13) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine konvergente Teilfolge?
(14) Ändert sich die Antwort zu den vorherigen Fragen, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist?
(15) Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$. Ist diese Folge beschränkt, eine Cauchy–Folge, oder konvergent? Existiert eine konvergente Teilfolge?

3. Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion.

(16) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Ist die Menge $f(A) \subseteq Y$ dann abgeschlossen?
(17) Sei $O \subseteq Y$ offen. Ist die Menge $f^{-1}(O) \subseteq X$ dann offen?
(18) Sei $K \subseteq X$ kompakt. Ist die Menge $f(K) \subseteq Y$ dann kompakt?
(19) Sei $K \subseteq Y$ kompakt. Ist die Menge $f^{-1}(K) \subseteq X$ dann kompakt?
(20) Betrachte die Teilmenge
$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = \cosh(x_3)\right\}$$
des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$. Ist diese Menge offen, abgeschlossen, kompakt, oder beschränkt?
(21) Für gleichmäßig stetige Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Produkt $f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist das Produkt dann stetig, gleichmäßig stetig?
(22) Ändert sich die Antwort zur vorherigen Frage, wenn wir zusätzlich vorraussetzen, dass eine oder beide Funktionen beschränkt sind?