Aufgabe 1 (*Fortsetzungsprinzip*)
Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum, und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie bitte: Ist die Abbildung $f : A \to Y$ gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : X \to Y$ mit $\widetilde{f}|_A = f$. Belegen Sie mit einem Beispiel, dass die Voraussetzung der Gleichmäßigkeit benötigt wird.

Aufgabe 2 (*L^2-Norm auf $C^0([-1,1])$*)
Zeigen Sie bitte, dass auf dem Vektorraum $C^0([-1,1])$ durch

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} u(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm gegeben ist, dass aber $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{L^2})$ kein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (*Hausdorff-Metrik*)
Zeigen Sie bitte, dass auf der Menge $\mathcal{A}$ der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Metrik gegeben ist durch

$$d(A_1, A_2) = \inf \{r > 0 : A_1 \subset B_r(A_2),\, A_2 \subset B_r(A_1)\}.$$

Dabei ist $B_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < r\}$.

Aufgabe 4 (*l^p-Räume*)
Sei $1 \leq p < \infty$. Beweisen Sie bitte, dass der Vektorraum

$$l^p = \left\{ x = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} : x^i \in \mathbb{R},\, \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum ist.

Abgabe am Mittwoch, 24. April 2024