Aufgabe 1 (*dichter Unterraum*)
Sei $X = (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit Unterraum $V = C^\infty([0,1])$. Zeigen Sie bitte, dass

$$\operatorname{dist}(u, V) = \inf_{v \in V} \|u - v\|_\infty = 0 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Aufgabe 2 (*Norm von Fredholmoperatoren*)
Sei$(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $k \in C^0([0,1] \times [0,1])$. Wir betrachten den Operator

$$K : (C^0(I), \|\cdot\|_\infty) \to (C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$$

gegeben durch

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Bitte berechnen Sie die Operatornorm von K.

Aufgabe 3 (*Abgeschlossenheit versus Vollständigkeit*)
Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge (mit der induzierten Metrik). Zeigen Sie bitte die folgenden Implikationen:

(a) $(Y, d|_Y)$ vollständig $\quad \Longrightarrow \quad Y \subseteq X$ abgeschlossen.

(b) (X, d) vollständig, Y abgeschlossen $\quad \Longrightarrow \quad (Y, d)$ vollständig.

Aufgabe 4(*Kartesisches Produkt von Banachräumen*)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, und

$$\|\cdot\|_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R},\ \|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\left(\|x\|_X, \|y\|_Y\right).$$

Zeigen Sie bitte:

(1) $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist ein normierter Raum.

(2) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, so auch $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$.

Was ändert sich für eine beliebige Norm $\|(a,b)\|$ statt $\max(|a|, |b|)$?

Abgabe am Mittwoch, 2. Mai 2024