Aufgabe 1(*Hölderstetigkeit*)
Konstruieren Sie bitte eine Folge $f_k \subset C^{0,1}([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f_k \to 0$ in $C^{0,\alpha}([0,1])$ mit $k \to \infty$ für alle $\alpha < 1$.

(2) f_k besitzt keine Teilfolge, die in $C^{0,1}([0,1])$ konvergiert.

Aufgabe 2 (*Hausdorff-Metrik, Teil II*)
Sei $\mathcal{A}$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Metrik (vgl. Serie 1, Aufgabe 3)

$$d(A_1, A_2) = \inf \{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\, A_2 \subset B_\varrho(A_1)\},$$

wobei $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \varrho\}$. Zeigen Sie bitte, dass die Familie $\{A \in \mathcal{A} : A \subset \overline{B_R(0)}\}$ kompakt ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli für die Familie von Funktionen $f_A : \overline{B_R(0)} \to [0, \infty)$ *gegeben durch* $f_A(x) = \operatorname{dist}(x, A)$.

Aufgabe 3 (*Ehrling–Lemma*)
Betrachten Sie auf einem Vektorraum X drei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_3$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jede $\|\cdot\|_1$-beschränkte Folge in X hat eine Teilfolge, die bzgl. $\|\cdot\|_2$ konvergiert.

(2) Es gibt ein $\Lambda < \infty$ mit $\|x\|_3 \leq \Lambda \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Bitte zeigen sie (mit einem indirekten Argument): zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon < \infty$, so dass gilt:

$$\|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_3 \text{ für alle } x \in X.$$

Aufgabe 4 (*Kompaktkeit und Fredholmoperator*)
Sei $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ der Integraloperator (vgl. Serie 02, Aufgabe 02)

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy$$

für einen stetigen Kern $k \in C^0([0,1]^2)$ Zeigen Sie bitte, dass die Menge

$$\mathcal{F} = \{Kf : f \in \overline{B_1(0)}\} \subseteq C^0([0,1])$$

relativ kompakt im Raum $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist (d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$).

Abgabe am Mittwoch, 15. Mai 2024