Aufgabe 1 (*zum Satz von Hahn-Banach I*)
Zeigen Sie bitte, dass eine Teilmenge A eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ genau dann beschränkt ist, wenn $\sup_{x\in A} \phi(x) < \infty$ für jedes Funktional $\phi \in X'$ gilt.

Aufgabe 2 (*zum Satz von Hahn-Banach II*)
Sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten, reellen Folgen $\mathbf{x} = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x^i|$. Finden Sie bitte ein Funktional $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{R})'$ mit $\|\phi\| = 1$ und folgenden weiteren Eigenschaften:

(1) $\phi(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x^i$, falls dieser Grenzwert existiert,

(2) $\liminf_{i\to\infty} x^i \leq \phi(x) \leq \limsup_{i\to\infty} x^i$,

(3) $\phi\big((x^1, x^2, x^3, \ldots)\big) = \phi\big((x^2, x^3, \ldots)\big)$.

Aufgabe 3 (*zur Separabilität*)
Zeigen Sie bitte, dass eine Teilmenge A eines separablen metrischen Raums (X, d) ebenfalls separabel ist (mit der induzierten Metrik). Folgern Sie bitte, dass der Raum $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der beschränkten Folgen mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x^i|$ nicht separabel ist.

Aufgabe 4 (*zum Satz von Hahn-Banach III*)
Sei X ein normierter Raum und $X'' = (X')'$ der Bidualraum von X, d.h.

$$X'' = L\,(X', \mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie bitte, dass $J : X \to X''$, $Jx(\varphi) = \varphi(x)$, isometrisch ist, also $\|Jx\| = \|x\|$.

Abgabe: Mittwoch, 29. Mai 2024