
Aufgabe 1 (*Invertierbarkeit von Operatoren*)
Konstruieren Sie einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ und eine bijektive Abbildung $F \in L(X,X)$, für die F^{-1} nicht in $L(X,X)$ liegt.

Aufgabe 2 (*Menge der invertierbaren Operatoren*)
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{GL}(X,Y)$ der invertierbaren linearen Operatoren offen in $L(X,Y)$ ist.
Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \mathrm{Id}$.

Aufgabe 3 (*Differenzerbarkeit der Inversen*)
Zeigen Sie, dass $\phi : \mathrm{GL}(X,Y) \to \mathrm{GL}(Y,X)$, $\phi(A) = A^{-1}$, differenzierbar ist mit

$$D\phi(A) \cdot B = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Hinweis. Betrachten Sie erst den Fall $X = Y$ an der Stelle $A = \mathrm{Id}$.

Aufgabe 4 (*Nirgends differenzierbare Funktionen*)
Betrachten Sie im Banachraum $X = C^0([0,1])$ die Menge M der Funktionen, für die in mindestens einem $x \in [0,1]$ die Ableitung $f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass M von erster Kategorie in X ist.

Anleitung:

(a) $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ mit

$$M_k = \Big\{ f \in X : \exists x \in [0,1] \text{ mit } \sup_{y \neq x} \Big| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Big| \leq k \Big\}.$$

(b) M_k ist abgeschlossen in X.

(c) $\operatorname{int} M_k = \emptyset$ (Addition von Zackenfunktionen).

(d) Die Menge $X \backslash M$ der nirgends differenzierbaren Funktionen ist damit dicht in X, und von zweiter Kategorie.

Abgabe am Dienstag, 5. Juni 2024