Aufgabe $1 + 2$ (*Projektion auf konvexe Mengen*)
Sei X reeller Hilbertraum und $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Betrachten Sie für $z \in X$ das Funktional

$$Q : K \to \mathbb{R},\ Q(x) = \frac{1}{2}\|x - z\|^2.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) Es gibt ein $x_0 \in K$ mit $Q(x_0) = \inf_{x \in K} Q(x)$.

(2) Ist $x_0 \in K$ mit $Q(x_0) = \inf_{x \in K} Q(x)$. so folgt

$$\langle x - x_0, z - x_0 \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } x \in K. \tag{1}$$

(3) Es gibt höchstens ein $x_0 \in K$ mit der Ungleichung (1).

Aufgabe 3 (*Schwache Ableitung von* $|u|$)
Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $u \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $|u|$ schwach differenzierbar ist.
Hinweis. Approximieren Sie mit $u_\varepsilon = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}$.

Aufgabe 4 (*Hilbertraum-Adjungierte*)
Berechnen Sie die Hilbertraum-Adjungierte des Ableitungsoperators

$$D : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Abgabe am Mittwoch, 12. Juni 2024. Die Definition von $W_0^{1,2}(\Omega)$ *ist im Skript.*