
Aufgabe 1 (*Dualraum von* $W_0^{1,2}(\Omega)$)
Sei $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Abbildungen $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to X$, $Ju = (u, Du)$, sowie $P : X \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $P(f, F)(u) = \int_\Omega (fu + \langle F, Du\rangle)$. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ sei so gewählt, dass J isometrisch einbettet. Zeigen Sie:

(1) $X = \ker P \oplus \operatorname{Bild} J$ (orthogonale Summe von abgeschlossenen Unterräumen)

(2) P ist surjektiv, und für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ gilt $\|\varphi\| = \inf\{\|(f, F)\|_{L^2} : P(f, F) = \varphi\}$.

Aufgabe 2 (*Heisenberg Unschärferelation*)
In der Quantenmechanik werden Messgrößen (Observable) als lineare Operatoren A mit $A^* = A$ in einem Hilbertraum H augefasst. Die Elemente $\psi \in H$ mit $\|\psi\| = 1$ stellen Zusände eines Teilchens dar, und man setzt für jedes ψ

$$\begin{aligned} \langle A\rangle &= \langle A\psi, \psi\rangle && \text{(Erwartungswert)},\\ \Delta A &= \langle (A - \langle A\rangle \mathrm{Id})^2\rangle^{1/2} && \text{(Unschärfe, Abweichung)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die Unschärferelation

$$(\Delta A) \cdot (\Delta B) \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle|, \quad \text{wobei } [A, B] = AB - BA.$$

Aufgabe 3 (*adjungierter Operator im Folgenraum* ℓ^2)
Sei $A : \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ stetig und linear, mit $Ae_k = 0$ für $k \geq 2$, $Ae_1 = \sum_{j=1}^\infty e_j/j$. Berechnen Sie A^*.

Aufgabe 4 (*schwaches Neumannproblem*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und äußerer Normale ν, und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie für $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ den schwach definierten Operator

$$L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)',\ Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u),$$

wobei a symmetrisch und elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Zeigen Sie:
für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $a^{\alpha\beta} \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die Gleichung $Lu = f$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) &= f && \text{in } \Omega,\\ \sum_{\alpha,\beta=1}^n (\partial_\alpha u)\, a^{\alpha\beta}\nu_\beta &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Abgabe bis Freitag, 21. Juni 2024