Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis SoSe 2024, Serie 8
Prof. Dr. Ernst Kuwert, Dr. Florian Johne 19. Juni 2024

Aufgabe 1 (*σ-Endlichkeit bei Radon-Nikodym*)
Betrachten Sie auf dem System der Borelmengen in $[0,1]$ das Zählmass card und das Lebesguemaß $\mathcal{L}^1$. Zeigen Sie: $\mathcal{L}^1$ ist absolutstetig bzgl. card, hat aber keine Darstellung mit einer Radon-Nikodym Dichte bzgl. card.
Hinweis. Zur Definition von card siehe z.B. mein 2021 Skript Analysis 3, Seite 3.

Aufgabe 2 (*σ-Endlichkeit bei Lebesgue-Zerlegung*)
Seien card und $\mathcal{L}^1$ die Maße aus Aufgabe 1. Zeigen Sie dass es keine Lebesguezerlegung $\mathrm{card} = \mathrm{card}_{ac} + \mathrm{card}_s$ (mit den zugehörigen Eigenschaften, siehe Vorlesung) bezüglich des Maßes $\mathcal{L}^1$ gibt.

Aufgabe 3 (*Eindeutigkeit der Hahn-Zerlegung*)
Sei λ ein signiertes Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$. Beweisen Sie dass die Darstellung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ mit zueinander singulären Maßen $\lambda^\pm$ eindeutig ist.

Aufgabe 4 (*L^p-Normen*)
Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \to [0,\infty]$ sei μ-messbar. Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte

$$\lim_{p \to \pm\infty} \phi(p) \quad \text{wobei } \phi(p) = \Big(\int_X u^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Abgabe bis Mittwoch, 26. Juni 2024