Aufgabe 1 (*Dualraum von $L^q(\mu)$*)
Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $\phi \in L^q(\mu)'$. Zeigen Sie: für $v_0 \in L^q(\mu)$ mit $\|v_0\|_{L^q(\mu)} = 1$ und jedes $\varphi \in L^q(\mu)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\phi\Big(\frac{v_0 + t\varphi}{\|v_0 + t\varphi\|_{L^q(\mu)}}\Big)|_{t=0} = \phi(\varphi) - \int \operatorname{sign}(v_0)|v_0|^{q-1}\varphi\, d\mu.$$

Bemerkung. Hat $\phi(v)$ im Punkt v_0 ein Maximum unter der Nebenbedingung $\|v\|_{L^q(\mu)} = 1$, so löst also die Funktion $\operatorname{sign}(v_0)|v_0|^{q-1} \in L^p(\mu)$ das Darstellungsproblem. Dies liefert einen alternativen Ansatz zur L^p-L^q-Dualität.

Aufgabe 2 (*Nicht-Separabilität*)
Sei μ äußeres Maß auf X. Zeigen Sie

$$L^\infty(\mu) \text{ separabel} \quad \Leftrightarrow \quad \dim L^\infty(\mu) < \infty.$$

Hinweis. Laut Aufgabe 3, Serie 4, ist der Folgenraum $\ell^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel.

Aufgabe 3 (*Dualräume*)
Bestimmen Sie die Dualräume:

(a) $\ell_0^\infty(\mathbb{R}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i\to\infty} x^i = 0\}$.

(b) $\ell_*^\infty(\mathbb{R}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i\to\infty} x^i \text{ existiert}\}$.

Aufgabe 4 (*Gleichmäßige Konvexität*)
Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum, das heißt zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass folgende Implikation gilt:

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 1, \ \Big\|\frac{u_1 + u_2}{2}\Big\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|u_1 - u_2\| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie dass die Funktion $\phi(u)$ für $\phi \in X'$ ihr Maximum unter der Nebenbedingung $\|u\| = 1$ annnimmt.
Bemerkung. Man kann zeigen dass der Raum $L^q(\mu)$ für $1 < q < \infty$ gleichmäßig konvex ist (Ungleichung von Clarkson). Zusammen mit Aufgabe 1 folgt dann die Lösbarkeit des Darstellungsproblems.

Abgabe am Mittwoch, 3. Juli.