---

**Aufgabe 1** (*Zur schwachen Konvergenz*)
Zeigen Sie folgende Eigenschaften der schwachen Konvergenz:

(1) Aus starker Konvergenz folgt schwache/schwach$*$ Konvergenz.

(2) Ist $x_k \to x$ schwach in $X$ und $\phi_k \to \phi$ stark in $X'$, so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(3) Ist $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in $X'$ und $x_k \to x$ stark in $X$, so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(4) Ist $x_k \to x$ schwach in $X$ und $T \in L(X,Y)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ schwach in $Y$.

**Aufgabe 2** (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme I*)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k,k+\frac{1}{2}]}, \quad g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k-\frac{1}{2},k]}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $f_n, g_n : I = (0,1) \to \mathbb{R}$, mit $f_n(x) = f(nx)$ bzw. $g_n(x) = g(nx)$, sowie $h_n = f_n g_n$, schwach$*$ in $L^1(I)'$ gegen Funktionen $f, g, h$ konvergieren, dass aber $h \neq fg$ gilt.

**Aufgabe 3** (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme II*)
Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}}.$$

Bestätigen Sie $\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\pi}$, und untersuchen Sie $f_\varepsilon$ sowie $f_\varepsilon^2$ für $\varepsilon \searrow 0$ auf schwache Konvergenz.

**Aufgabe 4** (*Gegenbeispiel schwach$*$ Folgenkompaktheit*)
Betrachten Sie auf $L^\infty(I)$, $I = (0,1)$, die Funktionale

$$\phi_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f \, d\mathcal{L}^1.$$

Zeigen Sie: zu jeder Folge $\varepsilon_k \to 0$ gibt es ein $f \in L^\infty(I)$, so dass $\phi_{\varepsilon_k}(f)$ nicht konvergiert. Also hat $\phi_{\varepsilon_k}$ keine schwach$*$ konvergente Teilfolge.

*Abgabe am Mittwoch, 10. Juli.*