Funktionalanalysis (Sommersemester 2024)

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Thema dieser Vorlesung ist die Lineare Funktionalanalysis. Generell geht es dabei um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Gleichungen

$$Lx = y,$$

das heißt $L : X \to Y$ ist eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen:

$$L(\lambda x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Lx_1 + \lambda_2 Lx_2 \quad \text{für alle } x_{1,2} \in X,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}.$$

Für endlichdimensionale Vektorräume ist dieses Problem in der Linearen Algebra vollständig behandelt worden; das Interesse gilt nun dem Fall $\dim X = \infty$. In diesem Zusammenhang nennt man L auch einen linearen Operator. Ein wichtiges Beispiel ist das Dirichletproblem für die Poissongleichung auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Setze $X = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y = C^0(\Omega)$. Dann ist das Dirichletproblem gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung $Lu = f$ für $L = -\Delta : X \to Y$. Die folgenden Beispiel zeigen, dass die Lösungsmethoden der Linearen Algebra nicht oder jedenfalls nicht unmittelbar anwendbar sind.

Beispiel 0.1 Betrachte den Raum

$$X = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation $(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})_i = \lambda x_i + \mu y_i$. Definiere die linearen Abbildungen, genauer Endomorphismen,

$$\begin{aligned} A : X \to X, &\qquad A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \\ B : X \to X, &\qquad B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots). \end{aligned}$$

A ist injektiv, aber nicht surjektiv; B ist surjektiv, aber nicht injektiv. Im Endlichdimensionalen wäre das nicht möglich.

Beispiel 0.2 Betrachte auf dem Raum $X = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ die lineare Abbildung

$$L : X \to X,\ (Lu)(t) = (\sin t)\, u(t).$$

Angenommen, L hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Funktion $u \in X$, nicht die Nullfunktion, mit $Lu = \lambda u$ bzw.

$$(\sin t)\, u(t) = \lambda u(t) \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Es folgt $\{t \in [-\pi, \pi] : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda\}$. Die rechte Menge ist aber endlich, somit ist u identisch Null, Widerspruch.

Auch zentrale Aussagen der Analysis lassen sich nicht einfach in unendlichdimensionale Räume übertragen.

Beispiel 0.3 Betrachte den Raum

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R},\ \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Nun gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{x}^k\|_\infty = 1 \quad \text{für } \mathbf{x}^k = (0,\ldots,0,\overset{k}{1},0,\ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{R})..$$

Aber $\mathbf{x}^k$ hat keine konvergente Teilfolge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, denn $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\|_\infty = 1$ für $k \neq l$.

Grundsätzlich müssen zu den Methoden der Linearen Algebra geeignete topologische Konzepte hinzukommen, um unendlichdimensionale Probleme zu behandeln. Im $\mathbb{R}^n$ führt jede Norm auf die gleiche Topologie, wie wir jetzt zeigen.

Satz 0.1 (Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$) *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent: zu $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ gibt es $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ mit*

$$\lambda\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \Lambda\,\|x\|_2 \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Insbesondere führen alle Normen zur gleichen Topologie bzw. Konvergenzbegriff.

Beweis: Wir können $X = \mathbb{R}^n$ annehmen, sonst wähle eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ und betrachte auf $\mathbb{R}^n$ die Normen $\|x\|_{1,2} = \|\varphi(x)\|_{1,2}$ mit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Weiter reicht es zu zeigen, dass eine gegebene Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zur Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ist. Mit den Eigenschaften der Norm und Cauchy-Schwarz folgt

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \Lambda\|x\|_2 \quad \text{wobei } \Lambda = \Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, erfüllt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \leq \Lambda\,\|x - y\|_2,$$

d.h. f ist Lipschitzstetig mit Konstante Λ. Setze nun

$$\lambda = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 = 1\}.$$

Die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$ ist abgeschlossen und beschränkt. Da f stetig, wird das Infimum angenommen und es folgt $\lambda > 0$. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\|x\| = \Big\|\frac{x}{\|x\|_2}\Big\|\,\|x\|_2 \geq \lambda\,\|x\|_2.$$

□

Zur Ergänzung sei bemerkt, dass zwei *Metriken* auf $\mathbb{R}^n$ nicht notwendig dieselbe Topologie liefern. Ein triviales Beispiel ist die diskrete Metrik $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$, bezüglich der alle Mengen offen sind. Für die Euklidische Metrik ist das natäurlich nicht der Fall. Wichtiger ist hier allerdings die Tatsache, dass die Äquivalenz der Normen auf unendlichdimensionalen Räumen nicht notwendig gilt.

Beispiel 0.4 Auf $X = C^0(I)$, $I = [0,1]$, haben wir die beiden Normen(!)

$$\|u\|_{C^0(I)} = \max_{x\in I} |u(x)| \quad \text{ und } \quad \|u\|_{L^2(I)} = \Big(\int_0^1 u(x)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Die Standardabschätzung liefert $\|u\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{C^0(I)}$, die Normen sind aber nicht äquivalent. Betrachte die Folge

$$u_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann $\|u_n\|_{C^0(I)} = 1$ und $\|u_n\|_{L^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$ mit $n \to \infty$.

1 Metrische und normierte Räume

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Dann heißt $d : X \times X \to [0,\infty)$ Metrik und (X,d) metrischer Raum, falls Folgendes gilt:*

(1) *$d(x,y) \geq 0$, Gleichheit genau wenn $x = y$ (Positivität),*

(2) *$d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$ (Symmetrie),*

(3) *$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung).*

Definition 1.2 *$U \subset (X,d)$ heißt offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset U$, wobei $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.*

Beispiel 1.1 $B_r(x)$ ist offen, denn für $y \in B_r(x)$ gilt $B_\varrho(y) \subset B_r(x)$ mit $\varrho = r - d(x,y) > 0$. Für $z \in B_\varrho(y)$ liefert nämlich die Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$

Lemma 1.1 (Topologie auf metrischen Räumen) *Sei (X,d) metrischer Raum.*

(1) *Ist U_λ, $\lambda \in \Lambda$, Familie von offenen Mengen in X, so ist $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ offen.*

(2) *Ist U_i, $i \in I$, endliche Familie von offenen Mengen in X, so ist $\bigcap_{i\in I} U_i$ offen.*

(3) *Zu $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es offene U_1, U_2 mit $x_i \in U_i$ für $i = 1,2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Bemerkungen. Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt Topologie, wenn $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten, und außerdem $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ gilt. Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennt man dann offen, ihre Komplemente abgeschlossen. Jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ heißt (offene) Umgebung von x. Eine Folge $x_k \in X$ konvergiert gegen x bezüglich $\mathcal{T}$, falls jede Umgebung von X alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn die Eigenschaft (3) aus dem Lemma erfüllt ist, heißt die Topologie Hausdorffsch und $(X,\mathcal{T})$ Hausdorffraum.[1]

[1] Felix Hausdorff, 1868-1942

Für Mengen $A \subset (X,d)$ sind folgende weitere Bezeichnungen üblich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{int} A &= \{x \in X : \text{ es gibt ein } r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset A\},\\
\overline{A} &= \{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0\},\\
\partial A &= \overline{A} \backslash \operatorname{int} A,\\
\operatorname{diam} A &= \sup_{x,y \in A} d(x,y).
\end{aligned}$$

Eine Menge A heißt beschränkt, falls $\operatorname{diam} A < \infty$. Weiter heißt eine Folge x_k in (X,d)

$$\begin{aligned}
\text{konvergent} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } \lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0,\\
\text{Cauchyfolge} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } K \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_k, x_l) < \varepsilon \text{ für alle } k, l > K.
\end{aligned}$$

Definition 1.3 (Vollständigkeit) *Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.*

Satz 1.1 (Vervollständigung nach Cantor) [2] *Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ und eine isometrische (abstandstreue) Abbildung*

$$J : (X,d) \to (\hat{X},\hat{d}) \qquad \text{mit } J(X) \text{ dicht in } \hat{X}.$$

Eindeutigkeit: ist $(\tilde{X},\tilde{d})$ vollständig und $\tilde{J} : X \to \tilde{X}$ isometrisch mit $\tilde{J}(X)$ dicht in $\tilde{X}$, so gibt es genau eine Isometrie (abstandstreue Bijektion) $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\tilde{J} = \Phi \circ J$.

$$\begin{tikzcd}
 & (X,d) \arrow[dl, "J"'] \arrow[dr, "\tilde{J}"] & \\
(\hat{X},\hat{d}) \arrow[rr, "\Phi"] & & (\tilde{X},\tilde{d})
\end{tikzcd}$$

Beweis: Zur Konstruktion von $\hat{X}$ betrachten wir den Raum der Cauchyfolgen

$$\mathrm{CF}(X) = \{\mathbf{x} = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbf{x} \text{ ist Cauchyfolge in } X.$$

Zu $x \in X$ gibt es viele Folgen mit Grenzwert x. Wir definieren $\hat{X} = CF(X)/\sim$ wobei

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i \to \infty} d(x^i, y^i) = 0.$$

Es ist leicht zu sehen dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $CF(X)$ ist. Weiter definieren wir den Abstand von zwei Punkten in $\hat{X}$ durch

$$\hat{d}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = \lim_{i \to \infty} d(x^i, y^i) \geq 0.$$

Der Grenzwert existiert, denn für i,j hinreichend groß gilt $d(x^i,x^j), d(y^i,y^j) < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$d(x^i,y^i) \leq d(x^i,x^j) + d(x^j,y^j) + d(y^j,y^i) < d(x^j,y^j) + \varepsilon.$$

[2] Georg Cantor, 1845-1918

Wegen Symmetrie folgt $|d(x^i,y^i) - d(x^j,y^j)| < \varepsilon$, also ist $d(x^i,y^i)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent. Der Grenzwert hängt auch nicht von der Wahl der Folgen ab, denn für $\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathbf{x}$ und $\tilde{\mathbf{y}} \sim \mathbf{y}$ haben wir

$$d(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i) \leq d(\tilde{x}^i,x^i) + d(x^i,y^i) + d(y^i,\tilde{y}^i), \quad \text{somit } \lim_{i\to\infty} d(\tilde{x}^i,\tilde{y}^i) \leq \lim_{i\to\infty} d(x^i,y^i).$$

Aus der Definition ergibt sich Symmetrie und Dreiecksungleichung für $\hat{d}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}])$. Ferner gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} d(x^i,y^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{x}] = [\mathbf{y}].$$

Wir definieren $J : X \to \hat{X}$ durch $J(x) = [(x,x,\ldots)]$. Dann ist offenbar $\hat{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$, also J isometrisch. Außerdem ist $J(X)$ dicht in $\hat{X}$, denn für $[\mathbf{x}] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}],J(x^k)) = \lim_{i\to\infty} d(x^i,x^k) < \varepsilon \quad \text{für } k \text{ hinreichend groß.}$$

Es bleibt jetzt noch zu zeigen dass $(\hat{X},\hat{d})$ vollständig ist. Dazu eine einfache Vorbemerkung: ist $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x^{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so definieren beide dasselbe Element von $\hat{X}$, denn es gilt $\lim_{n\to\infty} d(x^n,x^{i_n}) = 0$. Sei nun $[\mathbf{x}_k]$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$, das heißt

$$\lim_{i\to\infty} d(x^i_k,x^i_l) < \varepsilon \quad \text{für } k,l \geq k(\varepsilon). \tag{1.1}$$

Durch Weglassen von endlich vielen Gliedern in jeder Folge $\mathbf{x}_k$ können wir annehmen dass

$$d(x^i_k,x^j_k) < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } i,j \in \mathbb{N}.$$

Jetzt betrachte die Diagonalfolge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$, also $y^k = x^k_k$. Für $k,l \geq k(\varepsilon)$ gilt

$$d(y^k,y^l) \leq d(x^k_k,x^i_k) + d(x^i_k,x^i_l) + d(x^i_l,x^l_l) < \frac{1}{k} + d(x^i_k,x^i_l) + \frac{1}{l}.$$

Mit $i \to \infty$ folgt aus (1.1)

$$d(y^k,y^l) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{l} \quad \text{für } k,l \geq k(\varepsilon).$$

Somit ist $\mathbf{y}$ eine Cauchyfolge in X. Ähnlich sehen wir dass $[\mathbf{x}_k]$ gegen $[\mathbf{y}]$ konvergiert, es ist

$$d(x^i_k,y^i) \leq d(x^i_k,x^j_k) + d(x^j_k,x^j_i) + d(x^j_i,x^i_i) < \frac{1}{k} + d(x^j_k,x^j_i) + \frac{1}{i}.$$

Mit $j \to \infty$ folgt $d(x^i_k,y^i) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{i}$ für $i,k \geq k(\varepsilon)$ nach (1.1), also gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}_k],[\mathbf{y}]) = \lim_{i\to\infty} d(x^i_k,y^i) \leq \frac{1}{k} + \varepsilon \quad \text{für } k \geq k(\varepsilon),$$

das heißt $\hat{d}([\mathbf{x}_k],[\mathbf{y}]) \to 0$ mit $k \to \infty$ wie behauptet. Damit ist $(\hat{X},\hat{d})$ vollständig und die Existenzaussage des Satzes ist bewiesen.

Sei nun $(\tilde{X},\tilde{d})$ vollständig und $\tilde{J} : X \to \tilde{X}$ sei isometrisch mit $\tilde{J}(X)$ dicht in $\tilde{X}$. Da J isometrisch ist und somit injektiv, erhalten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\phi : J(X) \to \tilde{X},\ \phi(p) = \tilde{J}(x) \quad \text{für } p = J(x).$$

Offenbar ist $\phi \circ J = \tilde{J}$, und es gilt für $p = J(x)$ und $q = J(y)$

$$\begin{aligned} \tilde{d}\big(\phi(p), \phi(q)\big) &= \tilde{d}\big(\tilde{J}(x), \tilde{J}(y)\big) \\ &= d(x,y) \quad \text{(da } \tilde{J} \text{ isometrisch)} \\ &= \hat{d}(p,q) \quad \text{(da } J \text{ isometrisch).} \end{aligned}$$

Somit ist ϕ auf $J(X)$ isometrisch, insbesondere gleichmäßig stetig. Da $J(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist und $\tilde{X}$ vollständig, existiert eine stetige Fortsetzung $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ (Serie 1, Aufgabe 1). Diese Fortsetzung ist isometrisch: zu $p, q \in \hat{X}$ gibt es $p_k, q_k \in J(X)$ mit $p_k \to p$, $q_k \to q$. Es folgt dann $\Phi(p_k) \to \Phi(p)$, $\Phi(q_k) \to \Phi(q)$ und weiter

$$\tilde{d}(\Phi(p), \Phi(q)) = \lim_{k\to\infty} \tilde{d}(\Phi(p_k), \Phi(q_k)) = \lim_{k\to\infty} \tilde{d}(\phi(p_k), \phi(q_k)) = \lim_{k\to\infty} \hat{d}(p_k, q_k) = \hat{d}(p,q).$$

Das Bild $\Phi(X)$ enthält $\phi(J(X)) = \tilde{J}(X)$, es ist also dicht in $\tilde{X}$. Aber $\Phi(X)$ ist auch abgeschlossen: sei $\Phi(p_k)$ eine konvergente Folge in $\tilde{X}$. Dann ist p_k eine Cauchyfolge in $\hat{X}$, also gilt $p_k \to p$ in $\hat{X}$ und somit $\Phi(p_k) \to \Phi(p)$. Damit ist $\Phi : \hat{X} \to \tilde{X}$ die gesuchte (bijektive) Isometrie. Schließlich ist Φ eindeutig als stetige (da isometrische) Fortsetzung der Abbildung ϕ, die auf der dichten Teilmenge $J(X)$ gegeben ist. $\square$

Beispiel 1.2 Im Beweis wurden die reellen Zahlen als bekannt vorausgesetzt. Cantor hat das Verfahren benutzt, um $\mathbb{R}$ als Quotient $\mathrm{CF}(\mathbb{Q})/\sim$ zu konstruieren, dies erfordert nur geringfügige Änderungen.

Der folgende Begriff dürfte wohlbekannt sein, er wurde in der Einleitung schon benutzt.

Definition 1.4 (Norm) *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine Funktion $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm, falls gilt:*

(1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ *(Positivität),*

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *für alle* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *(Halblinearität),*

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Wir haben dann auf X die induzierte Metrik $d(x,y) = \|x - y\|$. Ist X mit dieser Metrik vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum.[3]

Ein normierter Raum ist stets ein Vektorraum, während ein metrischer Raum auf irgendeiner Menge gegeben sein kann.

Beispiel 1.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Für $\mathcal{L}^n$-messbare $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sei

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^n\big(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}\big) = 0.$$

Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mathcal{L}^n\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\big\{s > 0 : \mathcal{L}^n\big(\{|f| > s\}\big) = 0\big\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

[3] Stefan Banach, 1892-1945

Damit kann der Raum der L^p-Funktionen wie folgt definiert werden:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar} : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}/\sim .$$

Nach dem Satz von Fischer-Riesz ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ein Banachraum. Nun haben wir die offensichtliche isometrische Abbildung

$$J : (C^0_c(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) \to (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}).$$

Man beachte, dass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ auf $C^0_c(\Omega)$ tatsächlich eine Norm ist. $C^0_c(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ im Fall $p < \infty$ (siehe Skript Kuwert Analysis 3, Satz 6.10). Für $p < \infty$ können wir $L^p(\Omega)$ als (konkrete Realisierung der) Vervollständigung von $(C^0_c(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ansehen.

Die Konstruktion als Äquivalenzklassen von $\mathbb{Q}$-Cauchyfolgen beweist die Existenz der reellen Zahlen, man greift aber in der Analysis nie auf sie zurück, weil die Charakterisierung durch Axiome einfacher und effizienter ist. Auch im Fall der Vervollständigung eines metrischen Raums ist es ebenfalls günstig, eine möglichst konkrete Realiserung zu haben. Zum Beispiel ist es wünschenswert, die Elemente von $L^p(\Omega)$ durch (fast überall definierte) Funktionen zu beschreiben, und nicht nur als Äquivalenzklassen von L^p-Cauchyfolgen in $C^0_c(\Omega)$. Genau das leistet der Satz von Fischer-Riesz.

Definition 1.5 *Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ heißt beschränkt, falls gilt:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < \infty.$$

Die Zahl $\|A\|$ heißt Operatornorm von A. Der Raum

$$L(X, Y) = \{A : X \to Y : A \text{ linear}, \|A\| < \infty\}$$

ist mit $\|\cdot\|$ ein normierter Raum.

Lemma 1.2 (Stetigkeitskriterien für lineare Abbildungen) *Für eine lineare Abbildung $A : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist beschränkt.*

(2) *A ist stetige Abbildung.*

(3) *A ist stetig im Punkt $0 \in X$.*

Beweis: Aus (1) folgt

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \le \|A\| \, \|x - y\|,$$

das heißt die Abbildung ist sogar Lipschitzstetig mit Konstante $\|A\|$. Sei umgekehrt A stetig in $0 \in X$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|Ax\| = \|A(x) - A(0)\| \le 1 \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit} \quad \|x\| = \|x - 0\| \le \delta.$$

Für $x \neq 0$ folgt daraus die Abschätzung

$$\|Ax\| = \frac{\|x\|}{\delta} \underbrace{\Big\|A\Big(\delta \frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|}_{\le 1} \le \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

$\square$

Satz 1.2 (Vollständigkeit von $L(X,Y)$) *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $L(X,Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum.*

Beweis: Sei A_i Cauchyfolge in $L(X,Y)$, also

$$\|A_i x - A_j x\| \leq \|A_i - A_j\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } i,j \geq I(\varepsilon).$$

Somit ist $A_i x$ Cauchyfolge, und $Ax := \lim_{i\to\infty} A_i x$ existiert. Es ist klar dass A linear ist, weiter gilt

$$\big|\|A_i\| - \|A_j\|\big| \leq \|A_i - A_j\| < \varepsilon \quad \text{für } i,j \geq I(\varepsilon).$$

Also existiert $\Lambda := \lim_{i\to\infty} \|A_i\|$, und es folgt

$$\|Ax\| = \lim_{i\to\infty} \|A_i x\| \leq \Lambda \|x\|,$$

das heißt $A \in L(X,Y)$. Schließlich haben wir

$$\|Ax - A_j x\| = \lim_{i\to\infty} \|A_i x - A_j x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } j \geq I(\varepsilon),$$

also $\|A - A_j\| < \varepsilon$ für $j \geq I(\varepsilon)$. □

Definition 1.6 (Dualraum) *Sei X ein normierter Raum. Dann heißt der Banachraum $X' = L(X,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), versehen mit der Operatornorm, Dualraum von X.*

Satz 1.3 (Quotientenräume) *Sei X ein Banachraum und V ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird der Quotient X/V ein Banachraum mit der Norm*

$$\|[x]\| = \inf_{v\in V} \|x+v\|.$$

Die Projektion $p : X \to X/V$ ist offen und hat Operatornorm $\|p\| = 1$ (außer wenn $V = X$).

Beweis: Wir beginnen mit den Normeigenschaften. Ist $\|[x]\| = 0$, so gibt es $v_k \in V$ mit $\|x + v_k\| \to 0$, also $v_k \to -x$. Da V abgeschlossen, folgt $x \in V$ bzw. $[x] = 0$. Weiter gilt für $\lambda \neq 0$ (der Fall $\lambda = 0$ ist klar)

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{v\in V} \|\lambda x + v\| = |\lambda| \inf_{v\in V} \|x + \frac{1}{\lambda} v\| = |\lambda| \, \|[x]\|.$$

Für die Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned}
\|[x_1] + [x_2]\| &= \|[x_1 + x_2]\| \\
&= \inf_{v_1,v_2\in V} \|x_1 + x_2 + v_1 + v_2\| \\
&\leq \inf_{v_1,v_2\in V} \big(\|x_1 + v_1\| + \|x_2 + v_2\|\big) \\
&= \|[x_1]\| + \|[x_2]\|.
\end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass X/V mit dieser Norm ein Banachraum ist. Es gilt

$$\|[y] - [x]\| = \|[y - x]\| = \inf_{v\in V} \|y - x + v\| = \inf_{\tilde{y}\in[y]} \|\tilde{y} - x\|. \tag{1.2}$$

Sei $[x_i]$ Cauchyfolge in X/V. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir bestimmen nun induktiv $\tilde{x}_i \in [x_i]$ mit

$$\|\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i\| < 2^{-i} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Setze $\tilde{x}_1 = x_1$. Ist $\tilde{x}_i \in [x_i]$ schon gefunden für ein $i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\|[x_{i+1}] - [\tilde{x}_i]\| = \|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i},$$

also gibt es $\tilde{x}_{i+1} \in [x_{i+1}]$ mit (1.3). Da X Banachraum, existiert $\tilde{x} = \lim_{i\to\infty} \tilde{x}_i$ und es gilt

$$\|[x_i] - [\tilde{x}]\| = \|[\tilde{x}_i] - [\tilde{x}]\| = \inf_{v \in V} \|\tilde{x}_i - \tilde{x} + v\| \leq \|\tilde{x}_i - \tilde{x}\| \to 0.$$

Damit ist die Vollständigkeit von X/V bewiesen. Wir zeigen als nächstes dass p offen ist. Ist $\|[y] - [x]\| < r$, so gibt es nach (1.2) ein $\tilde{y} \in [y]$ mit $\tilde{y} \in B_r(x)$. Da $[y] = p(\tilde{y})$ folgt $B_r(p(x)) \subset p(B_r(x))$. Ist nun $U \subset X$ offen und $x \in U$, so gilt $B_r(x) \subset U$ für ein $r > 0$ und damit $B_r(p(x)) \subset p(U)$, das heißt $p(U)$ ist offen.

Schließlich zur Norm von p. Wir hatten schon $\|[x]\| \leq \|x\|$, also $\|p\| \leq 1$. Sei jetzt V ein echter Unterraum, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $\|[x]\| = \inf_{v\in V} \|x + v\| > 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{x} = x + v \in [x]$ mit

$$\|\tilde{x}\| < (1+\varepsilon)\|[x]\| = (1+\varepsilon)\|[\tilde{x}]\| = (1+\varepsilon)\|p(\tilde{x})\| \leq (1+\varepsilon)\|p\|\,\|\tilde{x}\|.$$

Dies zeigt $\|p\| \geq 1$. $\square$

Wir kommen schließlich zu Normen, die von einem Skalarprodukt induziert sind.

Definition 1.7 (Skalarprodukt) *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Regeln erfüllt sind:*

(1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist Sesquilinearform:* $\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z\rangle &= \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle \\ \langle x, \lambda y + \mu z\rangle &= \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\langle x, z\rangle. \end{aligned}$

(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist symmetrisch:* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(3) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist positiv definit:* $\langle x, x\rangle \geq 0$, *Gleichheit genau wenn* $x = 0$.

Die Euklidische Norm von $x \in X$ ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Satz 1.4 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) *Sei $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt für alle $x, y \in X$:*

(1) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ *(Ungleichung von Cauchy-Schwarz).*

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Insbesondere ist die Euklidische Norm eine Norm.

Beweis: Sei erst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt bei geeigneter Wahl des Vorzeichens

$$1 - |\langle x, y\rangle| = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle\big) = \frac{1}{2}\| \pm x + y\|^2 \geq 0.$$

Für beliebige $x, y \in X$, ohne Einschränkung $x, y \neq 0$, folgt (1) durch Skalierung:

$$1 \geq \Big|\Big\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\Big\rangle\Big| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, wieder für $\|x\| = \|y\| = 1$ und nun mit $e^{i\theta}$ geeignet,

$$1 - |\langle x, y\rangle| = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2e^{i\theta}\langle x, y\rangle\big) = \frac{1}{2}\|e^{i\theta}x + y\|^2 \geq 0.$$

Ungleichung (1) folgt nun wie oben. Weiter erhalten wir für alle $x, y \in X$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Damit erfüllt $\|\cdot\|$ auch die Dreiecksungleichung. Die weiteren Eigenschaften einer Norm ergeben sich direkt aus der Definition. □

Es stellt sich die Frage, wann eine Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert ist.

Bemerkung 1.1 Ist $\|\cdot\|$ eine Skalarproduktnorm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.4}$$

Umgekehrt ist eine Norm $\|\cdot\|$ mit (1.4) eine Skalarproduktnorm, und zwar ist das zugehörige Skalarprodukt durch folgende Polarisationsformel gegeben:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R},\\
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big) + \frac{i}{4}\big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\big) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Mithilfe der Parallelogrammgleichung kann man zeigen, dass $\langle\cdot, \cdot\rangle$ tatsächlich alle Regeln für ein Skalarprodukt erfüllt.

Definition 1.8 *Ein Hilbertraum*[4] *ist ein Skalarproduktraum* $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$*, der bezüglich der Skalarproduktnorm* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *vollständig ist.*

Beispiel 1.4 Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Raum $L^2(\Omega)$ der quadratintegrierbaren Funktionen mit

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

ein Hilbertraum nach dem Satz von Fischer-Riesz.

[4] David Hilbert, 1862-1943

2 Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition 2.1 *Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X,d) heißt kompakt, falls gilt: jede Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von offenen Mengen mit $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ besitzt eine Teilfamilie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$ mit Λ' endlich und $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$.*

Satz 2.1 (Äquivalenz der Kompaktheitsbegriffe) *Sei (X,d) metrischer Raum. Für $K \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *K ist kompakt.*

(2) *K ist vollständig (mit der induzierten Metrik) und präkompakt, das heißt für jedes $\varrho > 0$ lässt sich K durch endlich viele Kugeln $B_\varrho(x)$, $x \in K$, überdecken.*

(3) *K ist folgenkompakt: jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K besitzt eine Teilfolge, die gegen ein $x \in K$ konvergiert.*

Beweis: (3) $\Rightarrow$ (2): Die Vollständigkeit ist klar, denn mit einer Teilfolge konvergiert schon die ganze Folge. Wäre K nicht präkompakt, so wähle induktiv $x_k \in K$ mit $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_\varrho(x_i)$. Für $k \neq l$ gilt dann $d(x_k, x_l) \geq \varrho$, also kann die Folge x_k keine konvergente Teilfolge haben, Widerpruch zu (3).

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, aber K wird nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt. Konstruiere sukzessive Kugeln $B_k = B_{2^{-k}}(x_k)$ mit $x_k \in K$ und $B_k \cap B_{k-1} \neq \emptyset$, so dass $B_k \cap K$ nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt wird. Ist B_{k-1} schon gefunden, so überdecke $B_{k-1} \cap K$ durch endlich viele Kugeln $B_{2^{-k}}(y_i)$, $1 \leq i \leq N$, mit $y_i \in K$ und $B_{2^{-k}}(y_i) \cap B_{k-1} \neq \emptyset$. Für wenigstens ein i wird $B_{2^{-k}}(y_i) \cap K$ nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt. Im Induktionsanfang wende dieses Argument an mit $B_0 := K$. Nach Konstruktion ist x_k eine Cauchyfolge, also $x_k \to x \in K$. Es ist $x \in U_\lambda$ für ein λ, also $B_k \subset U_\lambda$ für k hinreichend groß, im Widerspruch zur Konstruktion.

(1) $\Rightarrow$ (3): Angenommen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in K. Zu jedem $x \in K$ gibt es dann ein $\varrho > 0$ mit $x_k \in B_\varrho(x)$ höchstens für endlich viele k. Denn sonst finden wir induktiv $k_1 < k_2 < \ldots$ mit $x_{k_j} \in B_{\frac{1}{j}}(x)$, also $x_{k_j} \to x$ im Widerspruch zur Annahme. Wähle nun eine endliche Teilüberdeckung von K mit solchen Kugeln. Es folgt $x_k \in K$ nur für endlich viele k, ein Widerspruch. □

Beispiel 2.1 Sei $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein unendlichdimensionaler Skalarproduktraum. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt findet man dann eine Folge $e_1, e_2, \ldots$ in X mit $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Es folgt

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{für } i \neq j.$$

Es gibt damit keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert. Das bedeutet auch: abgeschlossene und beschränkte Mengen sind nicht notwendig kompakt.

Das Verfahren von Gram-Schmidt ist auf Skalarprodukträume beschränkt, man hat aber in beliebigen normierten Räumen den folgenden Ersatz.

Lemma 2.1 (fast orthogonales Element) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $V \subset X$ ein abgeschlossener, echter Teilraum. Dann gibt es zu $\theta < 1$ ein $x_\theta \in X$ mit*

$$\operatorname{dist}(x_\theta, V) \geq \theta \quad \textit{und} \quad \|x_\theta\| = 1.$$

BEWEIS: Wähle $x \in X \backslash V$. Da V abgeschlossen, gilt $\operatorname{dist}(x, V) > 0$ und es gibt ein $v_\theta \in V$ mit $\|x - v_\theta\| \leq \frac{1}{\theta} \operatorname{dist}(x, V)$. Setze

$$x_\theta = \frac{x - v_\theta}{\|x - v_\theta\|}.$$

Es folgt für alle $v \in V$

$$\|x_\theta - v\| = \frac{1}{\|x - v_\theta\|} \big\|x - \underbrace{v_\theta - \|x - v_\theta\| v}_{\in V}\big\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x, V)}{\|x - v_\theta\|} \geq \theta.$$

□

Satz 2.2 (Heine-Borel) *Für einen normierten Raum X gilt:*

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \dim X < \infty.$$

BEWEIS: Die Implikation $\Leftarrow$ folgt aus der Äquivalenz der Normen, Satz 0.1, und dam Satz von Bolzano-Weierstraß. Für $\Rightarrow$ wähle induktiv mit Lemma 2.1 eine Folge $x_k \in X$ mit

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x_k, \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. □

Für die Existenz von Lösungen von Gleichungen ist die Kompaktheit ein zentraler Begriff der Analysis. In der Funktionalanalysis spielen Kompaktheitskriterien für Teilmengen von Banachräumen (oder metrischen Räumen) eine bedeutende Rolle. Ein bekanntes Beispiel ist der Satz von Arzelà-Ascoli, den wir nun behandeln wollen.

Definition 2.2 *Seien X, Y metrische Räume. Wir setzen*

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \{f : X \to Y : f(X) \text{ ist beschränkt}\}, \\ C^0(X, Y) &= \{f : X \to Y : f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Satz 2.3 *Seien X, Y metrische Räume, Y vollständig.*

(1) *$B(X, Y)$ ist vollständiger metrischer Raum mit $d_B(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.*

(2) *$(C^0 \cap B)(X, Y)$ ist abgeschlossen in $(B(X, Y), d_B)$, insbesondere ist $(C^0 \cap B)(X, Y)$ vollständiger metrischer Raum mit d_B.*

BEWEIS: Es ist klar, dass $d_B(f, g)$ eine Metrik auf $B(X, Y)$ ist. Sei f_k eine Cauchyfolge in $B(X, Y)$, also

$$d(f_k(x), f_l(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X,\ k, l \geq k(\varepsilon).$$

Da Y vollständig, existiert $f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x)$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir

$$d(f_k(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X,\ k \geq k(\varepsilon),$$

also $d_B(f_k, f) \to 0$ mit $k \to \infty$. Außerdem ist f beschränkt, denn für $k = k(\varepsilon)$ ist

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{\leq \operatorname{diam} f_k(X) < \infty} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq \varepsilon}.$$

Ist f_k stetig für $k = k(\varepsilon)$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$, und die Abschätzung liefert

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq\varepsilon} < 3\varepsilon.$$

Also ist $C^0 \cap B(X, Y)$ abgeschlossene Teilmenge. □

Definition 2.3 *Die Oszillation von* $f : (X, d) \to (Y, d)$ *ist die Funktion*

$$\omega_f : (0, \infty) \to [0, \infty],\ \omega_f(\delta) = \sup_{d(x_1,x_2)<\delta} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Gilt $\omega_f(\delta) \to 0$ *mit* $\delta \to 0$*, so heißt* f *gleichmäßig stetig. Eine Familie* $\mathcal{F}$ *von Abbildungen* $f : X \to Y$ *heißt gleichgradig stetig, falls* $\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(\delta) \to 0$ *mit* $\delta \to 0$*.*

Alternativ kann die gleichgradige Stetigkeit wie folgt formuliert werden:

> für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) < \delta$.

Beispiel 2.2 Sei $0 < \alpha \leq 1$. Die α-Hölderkonstante von $f : (X, d) \to (Y, d)$ ist

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

f heißt α-Hölderstetig wenn $[f]_\alpha < \infty$. Offenbar gilt

$$d(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha} d(x, y)^\alpha \leq [f]_\alpha\, \delta^\alpha \quad \text{falls } d(x, y) \leq \delta.$$

Die Oszillation erfüllt also die Abschätzung

$$\omega_f(\delta) \leq [f]_\alpha\, \delta^\alpha. \tag{2.5}$$

Eine Hölderstetige Funktion ist also gleichmäßig stetig, und für jedes $\Lambda < \infty$ ist die Familie $\mathcal{F} = \{f : X \to Y : [f]_\alpha \leq \Lambda\}$ gleichgradig stetig.

Satz 2.4 (Arzelà-Ascoli) [5] *Seien* X, Z *metrische Räume,* X *kompakt und* Z *vollständig. Für* $\mathcal{F} \subset C^0(X, Z)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist gleichgradig stetig und* $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ *ist relativ kompakt in* Z *für jedes* $x \in X$*.*

(2) *Jede Folge* f_k *in* $\mathcal{F}$ *hat eine Teilfolge* f_{k_j}*, die gleichmäßig gegen ein* $f \in C^0(X, Z)$ *gleichmäßig konvergiert.*

(3) $\mathcal{F}$ *ist relativ kompakt in* $(C^0(X, Z), d_B)$*.*

[5] C. Arzelà, 1847-1912 und G. Ascoli, 1843-1896

Eine Teilmenge eines metrischen (oder topologischen) Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist. Beachte weiter: für X kompakt und $f \in C^0(X,Y)$ ist $f(X)$ kompakt, insbesondere beschränkt. Es gilt also $C^0(X,Y) \subset B(X,Y)$.

BEWEIS: (1) $\Rightarrow$ (2) : Da X kompakt, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$. Zum Beispiel kann man dafür X mit endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{\nu}$ überdecken für $\nu = 1, 2, \ldots$; die Menge der Mittelpunkte ist dann dicht. Für jedes $x \in X$ hat die Folge $f_k(x)$ eine konvergente Teilfolge, durch sukzessive Wahl von Teilfolgen erhalten wir für die Diagonalfolge

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ existiert für alle } x \in D.$$

Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $d(x_1,x_2) \leq \delta$, dann folgt

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \lim_{k\to\infty} d(f_k(x_1), f_k(x_2)) \leq \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \omega_\varphi(\delta) =: \omega(\delta) \to 0 \quad \text{ mit } \delta \to 0.$$

Somit ist $f : D \to Z$ gleichmäßig stetig, und es existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $f \in C^0(X,Z)$. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $\delta > 0$ ist $\{B_\delta(x) : x \in D\}$ offene Überdeckung von X, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{B_\delta(y) : y \in D_\delta\}$. Zu $x \in X$ gibt es ein $y \in D_\delta$ mit $d(x,y) < \delta$, und es folgt

$$\begin{aligned} d(f_k(x), f(x)) &\leq d(f_k(x), f_k(y)) + d(f_k(y), f(y)) + d(f(y), f(x)) \\ &\leq \max_{y\in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta). \end{aligned}$$

Das Supremum über $x \in X$ liefert

$$d_B(f_k, f) \leq \max_{y\in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta),$$

und schließlich folgt wie behauptet

$$\limsup_{k\to\infty} d_B(f_k, f) \leq 2\omega(\delta) \to 0 \quad \text{ mit } \delta \to 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Nach Satz 2.1 reicht es zu zeigen dass $\overline{\mathcal{F}}$ folgenkompakt ist. Das folgt leicht aus (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) : Wir zeigen als erstes, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist. Nach Satz 2.1 ist $\overline{\mathcal{F}}$ präkompakt, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\{f_1, \ldots, f_N\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ mit

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(f_j),$$

das heißt zu $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $d_B(f, f_j) \leq \varepsilon$. Es folgt für $d(x,y) \leq \delta$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(y)) + d(f_j(y), f(y)) \\ &\leq \max_{1\leq j\leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Bilde das Supremum über alle $x, y \in X$, $d(x,y) \leq \delta$, und alle $f \in \mathcal{F}$:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(\delta) \leq \max_{1\leq j\leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon.$$

Lass nun $\delta \to 0$. Da $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist wegen X kompakt, gilt $\omega_{f_j}(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$, also

$$\limsup_{\delta\to 0} \big(\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(\delta)\big) \leq 2\varepsilon.$$

Damit ist die gleichgradige Stetigkeit von $\mathcal{F}$ bewiesen. Betrachte schließlich eine Folge $z_k = f_k(x)$ mit $f_k \in \mathcal{F}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $f_k \to f \in C^0(X,Z)$ gleichmäßig, insbesondere $z_k = f_k(x) \to f(x)$. Damit sind beide Aussagen in (1) gezeigt. □

Als Anwendung zeigen wir einen Kompaktheitssatz für Hölderstetige Funktionen. Sei X metrischer Raum. Für $u : X \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} = \|u\|_{C^0(X)} + [u]_{\alpha,X} = \sup_{x\in X} |u(x)| + \sup_{x,y\in X,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Dabei ist $0 < \alpha \leq 1$. Es gilt der

Satz 2.5 $C^{0,\alpha}(X) = \{u \in C^0(X) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} < \infty\}$ *ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(X)}$. Dann ist $u_k \in (C^0 \cap B)(X)$, und u_k ist Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm. Nach Satz 2.3 konvergiert u_k bezüglich der Supremumsnorm gegen ein $u \in (C^0\cap B)(X)$. Nun gilt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

Somit ist $u \in C^{0,\alpha}(X)$, und weiter

$$\frac{|(u-u_k)(x)-(u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_l-u_k)(x)-(u_l-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \limsup_{l\to\infty} \|u_l-u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)}.$$

Es folgt $[u-u_k]_{\alpha,X} < \varepsilon$ für $k \geq k(\varepsilon)$, das heißt die Folge konvergiert gegen u in der $C^{0,\alpha}$-Norm. □

Satz 2.6 (Einbettung von Hölderräumen) *Sei X kompakter metrischer Raum, und $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, eine Folge mit $\|u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq \Lambda < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in C^{0,\alpha}(X)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:*

$$u_k \to u \text{ in } C^{0,\beta}(X) \quad \text{für jedes } 0 \leq \beta < \alpha.$$

Beweis: Nach (2.5) gilt für die Oszillation die Abschätzung

$$\omega_{u_k}(\delta) \leq [u_k]_{\alpha,X}\delta^\alpha \leq \Lambda\delta^\alpha.$$

Damit ist die Folge u_k gleichgradig stetig. Außerdem ist die reelle Folge $u_k(x)$ beschränkt für jedes x, also relativ kompakt in $\mathbb{R}$. Nach Arzelà-Ascoli gibt es ein $u \in C^0(X)$, so dass $u_k \to u$ in $C^0(X)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt $u \in C^{0,\alpha}(X)$, denn

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \Lambda < \infty.$$

Für $d(x,y) \leq \delta$ gilt die Abschätzung

$$\frac{|(u-u_k)(x)-(u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} = d(x,y)^{\alpha-\beta} \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_l-u_k)(x)-(u_l-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta}.$$

Andererseits gilt für $d(x,y) \geq \delta$

$$\frac{|(u-u_k)(x)-(u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} \leq 2\delta^{-\beta}\|u-u_k\|_{C^0(X)}.$$

Also folgt

$$\limsup_{k\to\infty}[u-u_k]_{\beta,X} \leq 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta} \to 0 \quad \text{ mit } \delta \to 0,$$

das heißt $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ wie behauptet. □

Hölderstetige Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der Analysis von elliptischen Differentialgleichungen. Im Folgenden skizzieren wir das am Beispiel eines Randwertproblems. Wir brauchen dafür eine Verallgemeinerung von Satz 2.6 auf die Situation, wenn Ableitungen Hölderstetig sind. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Für $u \in C^k(\Omega)$ setzen wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\Omega)} &= \sum_{0\leq|\gamma|\leq k} \|D^\gamma u\|_{C^0(\Omega)}, \\ \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{\alpha,\Omega}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ die Ableitungsordnung von $D^\gamma = \partial_1^{\gamma_1} \ldots \partial_n^{\gamma_n}$. Wir definieren die Funktionenräume

$$\begin{aligned} C^k(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \text{ ist auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar für alle } |\gamma| \leq k\}, \\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}. \end{aligned}$$

Satz 2.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt:*

(1) *$(C^k(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^k(\Omega)})$ ist ein Banachraum.*

(2) *$(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)})$ ist ein Banachraum.*

Beweis: (1) gilt für $k = 0$ nach Satz 2.3(2). Betrachte für $k = 1$ eine Cauchyfolge $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|u\|_{C^1(\Omega)}$. Dann gilt $u_j \to u \in C^0(\overline{\Omega})$ sowie $\partial_i u_j \to v_i \in C^0(\overline{\Omega})$ gleichmäßig mit $j \to \infty$. Für $x_0 \in \Omega$ und $s \in \mathbb{R}$ hinreichend klein gilt

$$u_j(x_0 + se_i) = u_j(x_0) + \int_0^s \partial_i u_j(x_0 + te_i)\, dt.$$

Mit $j \to \infty$ erhalten wir

$$u(x_0 + se_i) = u(x_0) + \int_0^s v_i(x_0 + te_i)\, dt,$$

also durch Differentiation $\partial_i u(x_0) = v_i(x_0)$. Somit ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\|u - u_j\|_{C^1(\Omega)} \to 0$. Im Fall $k \geq 2$ konvergiert eine Cauchyfolge u_j bezüglich $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ gegen $u \in C^1(\overline{\Omega})$, und nach

Induktion konvergiert $\partial_i u_j$ gegen $v_i \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k-1}(\Omega)}$. Es folgt $v_i = \partial_i u$ und hieraus Behauptung (1).

Sei jetzt $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. Dann gilt zunächst $u_j \to u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ wie gerade gezeigt. Für $|\gamma| = k$ gilt weiter $D^\gamma u_j \to v^\gamma$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nach Satz 2.5. Es folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ und $u_j \to u$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. □

Wir brauchen nun folgenden technischen Begriff.

Definition 2.4 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat Sehnenbogenkonstante $\kappa \in [1,\infty)$, wenn es für alle $x, y \in \Omega$ einen C^1-Weg γ von x nach y gibt mit $L(\gamma) \leq \kappa|x-y|$.*

Satz 2.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Sehnenbogenkonstante $\kappa < \infty$, und seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $k+\alpha > l+\beta$. Ist $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Folge mit $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda < \infty$, so konvergiert eine Teilfolge in $C^{l,\beta}(\overline{\Omega})$.*

Beweis: Wir gehen in vier Schritten vor.
Schritt 1 Der Fall $k = l = 0$ (also $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$) gilt nach Satz 2.6.

Schritt 2: Es gilt $\|u\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{C^1(\Omega)}$:
Für $x, y \in \Omega$ sei $\gamma \in C^1([0,1],\Omega)$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $L(\gamma) \leq \kappa|x-y|$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|u(y)-u(x)| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(\gamma(t))\,dt\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 Du(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\Big| \\
&\leq \|Du\|_{C^0(\Omega)}\int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \kappa\|Du\|_{C^0(\Omega)}|x-y|.
\end{aligned}$$

Schritt 3: Der Fall $k = l \geq 1$, $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$:
Nach Schritt 2 und Schritt 1 gilt induktiv $u_j \to u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, Ferner nach Schritt 1 $D^\gamma u_j \to v^\gamma$ in $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ für $|\gamma| = k$. Wie in Satz 2.7 folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ für $|\gamma| = k$, also $u_j \to u$ in $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$.

Schritt 4: Der Fall $k > l \geq 0$:
Wegen $l+1 \leq k$ gilt $\|u_j\|_{C^{l+1}(\Omega)} \leq C\|u_j\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für $\alpha > 0$ haben wir $u_j \to u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ mit Schritt 3, also $u_j \to u$ in $C^{l,1}(\overline{\Omega})$ nach Schritt 2. Für $\alpha = 0, \beta = 1$ ist $k \geq l+2$. Es gilt dann mit Schritt 2

$$\|u\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq C\|u\|_{C^k(\Omega)} \leq C\Lambda.$$

Nach Schritt 3 folgt $u_j \to u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Jetzt kommen wir (endlich) zu der Anwendung. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet. Betrachte das Randwertproblem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u + cu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Im Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = c = 0$ handelt es sich um die klassische Poissongleichung $\Delta u = f$, allgemein sind die Koeffizienten a_{ij}, b_i, c beliebige Funktionen auf Ω. Wir setzen aber voraus, dass für gewisse Konstanten $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ folgende Bedingungen gelten:

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\ \max_{1\leq i\leq n} \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\ \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Die Voraussetzung (2.7) heißt Elliptizitätsbedingung, salopp gesagt bedeutet sie, dass die Gleichung vom Typ der Poissongleichung ist. Um das Problem funktionalanalytisch zu formulieren, betrachten wir den linearen Operator

$$L : C^2_0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega}),\ Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i u + cu,$$

wobei $C^2_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Das Randwertproblem hat somit die Kurzfassung

$$Lu = f.$$

Die Regularitätsbedingung (2.6) impliziert, dass L ein beschränkter Operator ist:

$$\|Lu\|_{C^0(\Omega)} \leq \Lambda\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|\partial^2_{ij}u\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\Big) = \Lambda\|u\|_{C^2(\Omega)}.$$

Für die Operatornorm gilt also $\|L\| \leq \Lambda$. Wir verwenden ohne Beweis die folgenden a priori Abschätzungen von Schauder[6]. Sie sind ein fundamentales Resultat aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, siehe [**?**, Theorem 6.19].

Satz 2.9 (Regularitätssatz von Schauder) *Seien Ω und L wie oben, und $u \in C^2_0(\overline{\Omega})$ sei Lösung von $Lu = f$. Ist $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von den Daten $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ und Ω abhängt.

Die Aussage des Satzes ist grob gesprochen, dass die Lösung u maximal regulär ist, das heißt u ist so gut wie es die Daten Ω, a_{ij}, b_i, c, f erlauben. Im Fall von C^∞-Daten wäre die Lösung beispielsweise ebenfalls von der Klasse C^∞. Ein anderes, wohlbekanntes Beispiel für eine elliptische Differentialgleichung ist die Cauchy-Riemann Gleichung aus der Funktionentheorie, und man hat dort eine analoge Verbesserung der Regularität: differenzierbare Lösungen sind automatisch unendlich oft differenzierbar. Auch in der Funktionentheorie ist es wichtig, dass nicht nur die Regularität verbessert wird, sondern durch Abschätzungen quantitativ kontrolliert werden kann. Wir interessieren uns nun für die Lösungen des homogenen Problems, also zur rechten Seite $f \equiv 0$.

[6] J. Schauder, 1899-1943

Folgerung 2.1 *Der Kern von $L : C^2_0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ ist endlichdimensional.*

Beweis: Wähle auf $\ker L$ die Norm $\|u\|_{C^0(\Omega)}$. Sei $u_k \in \ker L$ eine beliebige Folge mit $\|u_k\|_{C^0(\Omega)} \leq 1$ für alle k. Aus Satz 2.9 (mit $f \equiv 0$) folgt, dass die Folge u_k in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ beschränkt ist. Nach Satz 2.8 gilt für eine Teilfolge

$$u_k \to u \quad \text{in } C^2(\overline{\Omega}), \text{ insbesondere } u \in \ker L.$$

Die Einheitskugel in $\ker L$ ist somit bezüglich der C^0-Norm kompakt, das heißt $\ker L$ ist endlichdimensional nach dem Satz von Heine-Borel, Satz 2.2. □

3 Existenz linearer Funktionale

In einem endlichdimensionalen, normierten Vektorraum X kann man Funktionale $\varphi \in X'$ durch ihre Werte auf einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ definieren. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ist die gegebene Norm $\|x\|$ äquivalent zu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ nach Satz 0.1, damit ist φ automatisch stetig:

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|\,|x_i| \leq \big(\max_{1\leq i\leq n} |\varphi(e_i)|\big) \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C\|x\|.$$

Für $\dim X = \infty$ könnten Linearformen zwar ebenfalls über eine Basis definiert werden, aber die Stetigkeit bzw. Beschränktheit wäre unklar. Der folgende Satz erlaubt induktiv die Konstruktion von linearen Funktionalen, bei Beibehaltung der Norm. Statt einer Norm wird etwas allgemeiner eine Abschätzung durch eine sublineare Funktion betrachtet.

Satz 3.1 (Hahn-Banach) [7] *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, das heißt*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \text{für alle } \lambda \geq 0,\, x \in X,\\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \text{für alle } x, y \in X. \end{aligned}$$

Sei $V \subset X$ ein Unterraum und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\varphi(v) \leq p(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dann gibt es eine Linearform $\phi : X \to \mathbb{R}$ mit $\phi|_V = \varphi$ und $\phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis:
Schritt 1: Für $x \notin V$ konstruieren wir eine Fortsetzung $\phi : V \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ mit $\phi \leq p$.
Definiere $\phi(v + \alpha x) = \varphi(v) + \alpha s$, wobei $s = \phi(x)$ noch zu bestimmen ist. Damit ist ϕ wohldefiniert, linear, und es gilt $\phi|_V = \varphi$. Wir brauchen

$$p(v + \alpha x) \geq \varphi(v) + \alpha s \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R},\, v \in V. \tag{3.8}$$

Nach Voraussetzung gilt das für $\alpha = 0$. Es reicht $\alpha = \pm 1$, dann folgt für $\alpha > 0$ beliebig

$$p(v \pm \alpha x) = \alpha\, p\Big(\frac{v}{\alpha} \pm x\Big) \geq \alpha\Big(\varphi\Big(\frac{v}{\alpha}\Big) \pm s\Big) = \varphi(v) \pm \alpha s.$$

[7] H. Hahn, 1879-1934

Wir können also $s \in \mathbb{R}$ mit (3.8) wählen, falls gilt:

$$\inf_{v \in V} \big(p(v+x) - \varphi(v)\big) \geq \sup_{v' \in V} \big(\varphi(v') - p(v'-x)\big).$$

Aber nach Voraussetzung haben wir

$$p(v+x) + p(v'-x) \geq p(v+v') \geq \varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v').$$

Damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2: X hat eine abzählbare Basis $\{x_1, x_2, \ldots\}$
Definiere induktiv $i_1 < i_2 < \ldots$ kleinstmöglich mit $x_{i_k} \notin V \oplus \operatorname{span}\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}\}$. Es folgt $X = V \oplus \operatorname{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$. Mit Schritt 1 erhalten wir die verlangte Fortsetzung induktiv auf ganz X.

Schritt 3: Konstruktion für X beliebig
Wir führen die Behauptung auf das Lemma von Zorn zurück[8]. Dieses ist kein Lemma, sondern in unserem Rahmen ein Axiom, das gleichwertig mit dem Auswahlaxiom oder dem Wohlordnungsprinzip ist. Es stellt eine Art verallgemeinerte Induktion dar.

Definition 3.1 (induktive Ordnung) *Eine Menge A mit einer Relation $\leq$ heißt teilweise geordnet, wenn für alle $a, b, c \in A$ Folgendes gilt:*

$$\begin{array}{lll} a \leq a & & \\ a \leq b,\ b \leq a & \Rightarrow & a = b, \\ a \leq b,\ b \leq c & \Rightarrow & a \leq c. \end{array}$$

(1) *$M \subset A$ heißt total geordnet $\Leftrightarrow$ für $a, b \in M$ gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$.*

(2) *$m \in A$ heißt maximales Element $\Leftrightarrow$ aus $m \leq a \in A$ folgt $a = m$.*

(3) *$b \in A$ heißt obere Schranke von M $\Leftrightarrow$ $a \leq b$ für alle $a \in M$.*

(4) *A heißt induktiv geordnet $\Leftrightarrow$ jede total geordnete Menge $M \subset A$ hat eine obere Schranke.*

Zum Beispiel kann man für Punkte a, b auf einem Tannenbaum $a \leq b$ setzen, wenn b ein Wachstums-Nachfolger von a ist. Dann sind nicht alle Punkte vergleichbar, eine gewachsene Folge von Ästen ist aber total geordnet. Jede Zweigspitze ist ein maximales Element.

Lemma von Zorn *Ist $(A, \leq)$ induktiv geordnet, so hat A (mindestens) ein maximales Element.*

Wir zeigen jetzt Satz 3.1 mit dem Lemma von Zorn. Sei A die Menge aller Paare (W, ψ), wobei $W \supset V$ Unterraum, $\psi : W \to \mathbb{R}$ linear mit $\psi|_V = \varphi$ und $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$. Definiere die teilweise Ordnung

$$(W_1, \psi_1) \leq (W_2, \psi_2) \quad \Leftrightarrow \quad W_1 \subset W_2,\ \psi_2|_{W_1} = \psi_1.$$

[8] M. Zorn, 1906-1993

Die Regeln der teilweisen Ordnung sind leicht zu prüfen. Wir zeigen nun, dass A induktiv geordnet ist. Sei dazu $M = (W_i, \psi_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von A. Setze

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i \quad \text{und} \quad \psi : W \to \mathbb{R},\ \psi|_{W_i} = \psi_i.$$

Für $i, j \in I$ gilt $W_i \subset W_j$ und $\psi_j|_{W_i} = \psi_i$, oder umgekehrt. Damit sieht man:

- W ist linearer Unterraum,
- ψ ist wohldefiniert, linear und $\psi|_V = \varphi$,
- $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$.

Somit ist (W, ψ) eine obere Schranke von M, also A induktiv geordnet. Sei nun nach Zorn (W, ϕ) maximales Element von A. Wäre W ein echter Unterraum von X, so könnten wir mit Schritt 1 eine Fortsetzung von (W, ϕ) bestimmen, im Widerspruch zur Maximalität. Die gewünschte Fortsetzung (X, ϕ) ist also gefunden, der Satz von Hahn-Banach bewiesen. □

Satz 3.2 (Hahn-Banach für lineare Funktionale) *Sei X normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \subset X$ Unterraum mit der induzierten Norm. Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi = \varphi \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}.$$

Beweis: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wähle $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$. Dann ist p sublinear, und

$$|\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\| = p(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Fortsetzung $\phi : X \to \mathbb{R}$ nach Satz 3.1 erfüllt $\phi(x) \leq p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$, also gilt $\|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}$ wie verlangt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachte $\varphi_1 = \operatorname{Re} \varphi : V \to \mathbb{R}$, also $|\varphi_1(v)| \leq |\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\|$ für alle $v \in V$. Wähle ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional $\phi_1 : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi_1 = \varphi_1 \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi_1\|_{X'} = \|\varphi_1\|_{V'}.$$

Definiere $\phi(x) = \phi_1(x) - i\phi_1(ix)$. Dann ist ϕ linear über $\mathbb{C}$, denn

$$\phi(ix) = \phi_1(ix) - i\phi_1(-x) = i\big(\phi_1(x) - i\phi_1(ix)\big) = i\phi(x).$$

Weiter folgt für alle $v \in V$

$$\phi(v) = \varphi_1(v) - i\varphi_1(iv) = \operatorname{Re} \varphi(v) - i \operatorname{Re} \varphi(iv) = \operatorname{Re} \varphi(v) + i \operatorname{Im} \varphi(v) = \varphi(v).$$

Schließlich gilt mit geeignetem $\theta \in [0, 2\pi)$

$$|\phi(x)| = e^{i\theta}\phi(x) = \underbrace{\phi(e^{i\theta}x)}_{\in \mathbb{R}} = \phi_1(e^{i\theta}x) \leq \|\varphi_1\|_{V'} \|e^{i\theta}x\| \leq \|\varphi\|_{V'} \|x\|.$$

□

Der Satz von Hahn-Banach ist ein grundlegendes Resultat der Funktionalanalysis. Es ist etwas unbefriedigend, dass es auf das nichtkonstruktive Lemma von Zorn zurückgreifen muss. In vielen Fällen ist das tatsächlich unnötig, was wir kurz erläutern wollen. Ein metrischer Raum (und allgemeiner ein topologischer Raum) heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Für einen normierten Raum X ist das gleichbedeutend damit, dass eine linear unabhängige Menge $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ existiert mit

$$X = \overline{\mathrm{Span}\,(B)}.$$

Eine solche Menge B wird manchmal eine Basis von X genannt (zur Unterscheidung bezeichnet man eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als *Hamel-Basis*[9]; in der Funktional-Analysis spielen Hamel-Basen in aller Regel keine Rolle). Die Äquivalenz ergibt sich wie folgt: hat man eine abzählbare dichte Teilmenge, so kann man wie in Satz 3.1 induktiv Elemente weglassen und gelangt zu einer Basis B. Hat man umgekehrt eine abzählbare Basis B, so sind die Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten abzählbar und dicht in X.

Sei nun X separabel und $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Basis von X. Ein gegebenes Funktional $\varphi : V \to \mathbb{R}$ können wir mit Induktion nach Satz 3.1, Schritt 2, fortsetzen zu

$$\phi : V \oplus \mathrm{Span}\, B \to \mathbb{R},\ \phi|_V = \varphi, \qquad \text{wobei } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Da ϕ Lipschitzstetig ist, existiert dann eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\phi : X = \overline{V \oplus \mathrm{Span}\, B} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Wir können also hier auf das Lemma von Zorn verzichten und stattdessen die Fortsetzung per Stetigkeit verwenden. Ein konkretes Beispiel sind die Räume $L^p(\Omega)$, die für $1 \leq p < \infty$ separabel sind. Wir kommen nun zu Anwendungen. Im Folgenden sind die Normen von linearen Funktionalen auf den jeweiligen Definitionsbereichen zu nehmen.

Folgerung 3.1 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Ist $V \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$ mit $\mathrm{dist}\,(x_0, V) > 0$[10], so gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi|_V = 0,\ \|\phi\| = 1 \qquad \textit{und} \qquad \phi(x_0) = \mathrm{dist}\,(x_0, V).$$

Beweis: Definiere das lineare Funktional $\varphi \in (V \oplus \mathbb{R}x_0)'$ durch $\varphi(v + \alpha x_0) = \alpha\, \mathrm{dist}\,(x_0, V)$. Es gilt $\varphi|_V = 0$, $\varphi(x_0) = \mathrm{dist}\,(x_0, V)$, und für $\alpha \neq 0$, $v \in V$ gilt

$$\|v + \alpha x_0\| = |\alpha|\, \|\frac{v}{\alpha} + x_0\| \geq |\alpha|\ \mathrm{dist}\,(x_0, V) = |\varphi(v + \alpha x_0)|.$$

Also $\|\varphi\| \leq 1$. Da $\mathrm{dist}\,(x_0, V) > 0$ gibt es $v_\varepsilon \in V$ mit $\|v_\varepsilon - x_0\| < (1 + \varepsilon)\, \mathrm{dist}\,(x_0, V)$, also

$$|\varphi(v_\varepsilon - x_0)| = \mathrm{dist}\,(x_0, V) > \frac{1}{1 + \varepsilon} \|v_\varepsilon - x_0\|.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\|\varphi\| \geq 1$. Setze nun φ mit gleicher Norm fort nach Satz 3.2. □

Folgerung 3.2 *In einem normierten Vektorraum X gelten folgende Aussagen:*

(1) *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x_0) = \|x_0\|$.*

[9] G. Hamel, 1877-1954

[10] e.g. V abgeschlossen und $x_0 \notin V$

(2) *Aus* $\phi(x) = 0$ *für alle* $\phi \in X'$ *folgt* $x = 0$.

Beweis: (1) ist der Spezialfall $V = \{0\}$ in Folgerung 3.1, es ist dann $\operatorname{dist}(x_0, V) = \|x_0\|$. Behauptung (2) folgt unmittelbar. □

Die dritte Folgerung bringt das Prinzip zum Ausdruck, dass der Dualraum X' mindestens so groß ist wie der Raum X.

Folgerung 3.3 *Sei* X *normierter Vektorraum. Ist* X' *separabel, so auch* X.

Beweis: Wähle eine dichte Folge ϕ_k in der Menge $\{\phi \in X' : \|\phi\| = 1\}$. Eine solche Folge ergibt sich, indem wir eine beliebige dichte Folge in X' normieren. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\phi_k(x_k) \geq \frac{1}{2}$. Angenommen es ist

$$V = \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \overset{\neq}{\subset} X.$$

Nach Folgerung 3.1 gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_V = 0$ und $\|\phi\| = 1$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt $\phi_k \to \phi$ in X'. Es folgt

$$0 = \phi(x_k) = \phi_k(x_k) + (\phi - \phi_k)(x_k) \geq \frac{1}{2} - \|\phi - \phi_k\| > 0 \quad \text{für } k \text{ groß},$$

ein Widerspruch. □

Wir kommen nun zu Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach auf das Problem, konvexe Mengen durch Hyperebenen zu trennen. Dazu folgendes Lemma.

Lemma 3.1 *Sei* X *normierter Raum. Ist* $K \subset X$ *offen und konvex mit* $0 \in K$, *so ist*

$$p : X \to [0, \infty),\ p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\},$$

sublinear und es gilt $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Beweis: Es gilt $p(0) = 0$ und $B_\varrho(0) \subset K$ für ein $\varrho > 0$. Es folgt $\frac{x}{t} \in K$ für $t > \frac{\|x\|}{\varrho}$, insbessondere $p(x) < \infty$ für alle $x \in X$. Wir behaupten für $x \in X$, $t > 0$ beliebig,

$$\frac{x}{t} \in K \quad \Leftrightarrow \quad p(x) < t. \tag{3.9}$$

Sei $\frac{x}{t} \in K$. Da K offen, gilt $\frac{x}{s} \in K$ für $s < t$ nahe bei t, also $p(x) \leq s < t$. Ist umgekehrt $p(x) < t$, so wähle $s \in (p(x), t)$ mit $\frac{x}{s} \in K$. Wegen K konvex und $0 \in K$ folgt

$$\frac{x}{t} = \frac{s}{t} \cdot \frac{x}{s} \in K.$$

Also ist (3.9) gezeigt, insbesondere $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Für $\lambda > 0$ gilt mit $s = \frac{t}{\lambda}$

$$p(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \frac{\lambda x}{t} \in K\} = \lambda \inf\{s > 0 : \frac{x}{s} \in K\} = \lambda p(x).$$

Es bleibt die Subadditivität. Für $x, y \in X$ wähle $\lambda > p(x)$, $\mu > p(y)$. Dann gilt

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K} \in K,$$

und es folgt

$$1 > p\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}\Big) = p\Big(\frac{x+y}{\lambda+\mu}\Big) = \frac{p(x+y)}{\lambda+\mu}.$$

Mit $\lambda \searrow p(x)$, $\mu \searrow p(y)$ folgt $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. $\square$

Bemerkung. Ist K beschränkt, so gilt $p(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Ist außerdem K symmetrisch bezüglich des Nullpunkts, so ist $p(x)$ eine Norm, die zu der gegebenen Norm äquivalent ist.

Das folgende Lemma ist eine Vorstufe zur Trennung von zwei konvexen Mengen.

Lemma 3.2 *Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ offen und konvex. Zu jedem $x_0 \notin K$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi(x) < \phi(x_0) \quad \textit{für alle } x \in K.$$

Beweis: Durch Translation können wir $0 \in K$ annehmen. Sei $p : X \to [0, \infty)$ wie in Lemma 3.1. Setze $\varphi(tx_0) = t$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
x = tx_0 \text{ mit } t > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{t} = x_0 \notin K, \text{ also } p(x) \geq t = \varphi(x),\\
x = tx_0 \text{ mit } t \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(x) = t \leq 0 \leq p(x).
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.1 gibt es eine lineare Fortsetzung $\phi : X \to \mathbb{R}$ von φ mit $\phi \leq p$. Für $x \in K$ gilt $\phi(x) \leq p(x) < 1$, aber $\phi(x_0) = \varphi(x_0) = 1$. Es bleibt die Stetigkeit von ϕ zu zeigen. Wähle dazu $\overline{B_\varrho(0)} \subset K$ und schätze ab

$$\phi(x) \leq p(x) = \frac{\|x\|}{\varrho}\, p\Big(\varrho \frac{x}{\|x\|}\Big) \leq \frac{1}{\varrho}\|x\|.$$

$\square$

Satz 3.3 (Hahn-Banach für konvexe Mengen) *Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A offen, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi(x) < \phi(y) \quad \textit{für alle } x \in A,\ y \in B.$$

Beweis: Betrachte die Menge

$$K = \{x - y : x \in A,\ y \in B\} = \bigcup_{y \in B} \{x - y : x \in A\} = \text{ offen.}$$

K ist auch konvex, denn es gilt für $x_{1,2} \in A$ und $y_{1,2} \in B$

$$\lambda(x_1 - y_1) + \mu(x_2 - y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) \in K.$$

Ferner ist $0 \notin K$ wegen $A \cap B = \emptyset$. Nach Lemma 3.2 gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\phi(z) < \phi(0) = 0$ für alle $z \in K$, also $\phi(x) < \phi(y)$ für alle $x \in A$, $y \in B$. $\square$

Ist $\phi \in X'$ nicht das Nullfunktional, so nennen wir $H = \{x \in X : \phi(x) = 0\}$ eine Hyperebene. Ist $x_0 \in X$ mit $\phi(x_0) \neq 0$, so folgt für alle $x \in X$

$$\phi\Big(x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} x_0\Big) = \phi(x) - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}\phi(x_0) = 0.$$

Also gilt $x \in H \oplus \mathbb{R}x_0$, das heißt H hat Kodimension Eins. Eine Menge $\{x \in X : \phi(x) = \alpha\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt affine Hyperebene. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in A} \phi(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} \phi(y),$$

so sagen wir, A und B werden durch die affine Hyperebene $\{\phi = \alpha\}$ getrennt. In der Situation von Satz 3.3 können wir $\alpha \in \mathbb{R}$ so wählen, genauer liegt A sogar im offenen Halbraum $\{\phi < \alpha\}$.

Wir brauchen später folgende Variante von Satz 3.3.

Folgerung 3.4 *Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A abgeschlossen und B kompakt, so können A, B strikt getrennt werden, das heißt*

$$\sup_{x \in A} \phi(x) < \inf_{y \in B} \phi(y).$$

Beweis: Betrachte für $\varrho > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} A_\varrho &= A + B_\varrho(0) = \{x + z : x \in A, z \in B_\varrho(0)\}, \\ B_\varrho &= B + B_\varrho(0) = \{y + z : y \in B, z \in B_\varrho(0)\}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass A_ϱ, B_ϱ offen und konvex sind. Da A abgeschlossen und B kompakt, ist $A_\varrho \cap B_\varrho = \emptyset$ für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Nach Satz 3.3 werden A_ϱ, B_ϱ durch ein $\phi \in X'$ getrennt. Für alle $x \in A$, $y \in B$ und $z, z' \in B_\varrho(0)$ folgt

$$\phi(x) + \varrho\phi(z) = \phi(x + \varrho z) \leq \phi(y + \varrho z') \leq \phi(y) + \varrho\phi(z').$$

Bilde links das Supremum über $z \in B_\varrho(0)$, rechts das Infimum über $z' \in B_\varrho(0)$:

$$\phi(x) + \varrho\|\phi\| \leq \phi(y) - \varrho\|\phi\|.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir das Supremum bzw. Infimum bzgl. $x \in A$, $y \in B$ nehmen. □

Eine weitere Anwendung verschärft Lemma 3.2.

Folgerung 3.5 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Ist $0 \notin K$, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und*

$$\phi(x) \leq -\operatorname{dist}(0, K) \quad \textit{für alle } x \in K.$$

Beweis: Setze $R = \operatorname{dist}(0, K)$, also $R > 0$ nach Voraussetzung. Nach Satz 3.3 gibt es ein $\phi \in X'$, so dass K und $B_R(0)$ getrennt werden. Nach Normierung gilt $\|\phi\| = 1$. Es folgt

$$\sup_{x \in K} \phi(x) \leq \inf_{y \in B_R(0)} \phi(y) = R \inf_{z \in B_1(0)} \phi(z) = -R\|\phi\| = -R.$$

□

Beispiel 3.1 Beliebige disjunkte konvexe Mengen A, B können im allgemeinen nicht getrennt werden, das heißt die Voraussetzung A *offen* in Satz 3.3 kann nicht weggelassen werden. Sei A dichter Unterraum eines Banachraums X, und $B = \{x_0\}$ mit $x_0 \notin A$. Angenommen es gibt $\phi \in X'$ mit $\phi(x) < \phi(x_0)$ für alle $x \in A$. Da A dicht, folgt $\phi(x) \leq \phi(x_0)$ für alle $x \in X$ und hieraus $\phi = 0$, ein Widerspruch. Ein konkreter Fall wäre $A = C^0_c(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zum Ende des Abschnitts wollen wir unser Studium von elliptischen Operatoren fortsetzen. Dazu brauchen wir noch eine Eigenschaft der Hölderräume.

Lemma 3.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einer Sehnenbogenbedingung. Für $u, v \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist auch $uv \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt*

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \qquad \text{mit } C = C(k,\Omega).$$

BEWEIS: Durch Induktion über k. Für $k = 0$ schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\frac{|(uv)(x)-(uv)(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \frac{|(u(x)-u(y))v(x)+u(y)(v(x)-v(y))|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq [u]_{\alpha,\Omega}\|v\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}[v]_{\alpha,\Omega} \\
&\leq 2\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sei jetzt die Aussage für $l \leq k-1$ gezeigt. Dann gilt für $|\gamma| \leq k-1$

$$\begin{aligned}
\|\partial_i D^\gamma(uv)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \|D^\gamma\big((\partial_i u)v + u(\partial_i v)\big)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\
&\leq C(k-1,\Omega)\Big(\|\partial_i u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|\partial_i v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\Big) \\
&\leq C(k,\Omega)\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die Konstante hängt von der Sehnenbogenkonstante und vom Durchmesser von Ω ab. □

Wir betrachten den Operator L nun auf den Hölderräumen, also

$$L : C^{2,\alpha}_0(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u + cu. \tag{3.10}$$

Wie in (2.6) und (2.7) sollen die Koeffizienten eine $C^{0,\alpha}$-Schranke $\Lambda < \infty$ haben und die Elliptizitätsbedingung mit $\lambda > 0$ erfüllen. Aus Lemma 3.3 folgt dann eine Abschätzung

$$\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C\Lambda\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)},$$

das heißt L ist stetiger linearer Operator. Der Grund für den Übergang zu den Hölderräumen ist die a priori Abschätzung von Schauder, Satz 2.9. In $C^2_0(\overline{\Omega})$ gilt eine analoge a priori Abschätzung nicht, und auch das folgende Resultat wäre falsch (wie man zeigen kann).

Satz 3.4 *Das Bild des Operators L aus (3.10) ist abgeschlossen in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

BEWEIS: Nach Folgerung 2.1 in Abschnitt 2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Mit Hahn-Banach gibt es dann einen abgeschlossenen Unterraum $X \subset C^{2,\alpha}_0(\overline{\Omega})$ mit

$$C^{2,\alpha}_0(\overline{\Omega}) = \ker L \oplus X \quad \text{(als Banachräume)},$$

siehe Aufgabe 3, Serie 5. Wir behaupten, dass eine Konstante $\mu > 0$ existiert mit

$$\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \geq \mu\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in X. \tag{3.11}$$

Andernfalls gibt es $u_k \in X$ mit

$$\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k}\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Durch Normierung können wir $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$ annehmen, und haben nach Übergang zu einer Teilfolge $u_k \to u$ in $C^0(\overline{\Omega})$ nach Satz 2.8. Mit Satz 2.9 folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C\big(\|Lu_k - Lu_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_k - u_l\|_{C^0(\Omega)}\big) < \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ groß.}$$

Nach Satz 2.7 gilt $u_k \to u$ in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Nun gilt

$$\|Lu - Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \|u - u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \to 0.$$

Wegen $\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k} \to 0$ folgt $Lu = 0$, also $u \in \ker L$. Da X abgeschlossen, gilt aber $u \in X$ und somit $u = 0$, im Widerspruch zu $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$. Damit ist (3.11) bewiesen. Sei nun $f_k \in \operatorname{Bild} L$ mit $f_k \to f$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Es gibt dann $u_k \in X$ mit $Lu_k = f_k$, und mit (3.11) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu} \|f_k - f_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Nach Satz 2.7 folgt $u_k \to u$ in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Durch Grenzübergang ergibt sich $Lu = f$, also ist das Bild von L abgeschlossen. □

4 Das Kategorieprinzip von Baire

Definition 4.1 *Eine Teilmenge S eines metrischen Raums (X, d) ist von erster Kategorie, falls S abzählbare Vereinigung von Mengen ist, die nirgends dicht sind. Dabei heißt A nirgends dicht genau wenn* $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$. *Andernfalls heißt S von zweiter Kategorie.*

Satz 4.1 (Kategorieprinzip von Baire) [11] *In einem vollständigen metrischen Raum X gilt für abgeschlossene Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$, die Implikation*

$$\operatorname{int} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \operatorname{int} A_k \neq \emptyset \quad \textit{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Offene Mengen in X sind also von zweiter Kategorie.

Beweis: Angenommen es ist $\operatorname{int} A_k = \emptyset$ für alle k, aber $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ enthält eine offene Kugel B_0. Wir bestimmen für $k \geq 1$ induktiv Kugeln $B_k = B_{r_k}(x_k)$ mit $0 < r_k \leq \frac{1}{k}$, so dass

$$\overline{B_k} \subset B_{k-1} \backslash A_k.$$

Dies ist möglich, da $B_{k-1} \backslash A_k$ offen und nichtleer ist. Für $l > k$ folgt induktiv $\overline{B_l} \subset B_k$, insbesondere $d(x_l, x_k) \leq \frac{1}{k}$. Also ist x_k eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in X$. Es gilt $x \in \overline{B_k}$ und damit $x \notin A_k$ für alle $k \geq 1$. Aber

$$x \in B_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{ein Widerspruch.}$$

□

[11] R.L. Baire, 1874-1932

Lemma 4.1 *Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, Y normierter Vektorraum, und die Familie $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt:*

$$S(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann gibt es eine (nichtleere) offene Kugel $B \subset X$ mit

$$\sup_{x \in B} S(x) < \infty.$$

Beweis: Die Mengen $A_k = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X : \|f(x)\| \leq k\}$ sind abgeschlossen. Es gilt $x \in A_k$ genau wenn $S(x) \leq k$, also $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Nach Satz 4.1 enthält ein A_k eine offene Kugel B, also gilt $S(x) \leq k$ für alle $x \in B$. □

Satz 4.2 (Banach-Steinhaus) [12] *Sei X ein Banachraum, Y normierter Vektorraum und $\mathcal{F} \subset L(X,Y)$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt:*

$$K(x) = \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt, also $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

Beweis: Nach Lemma 4.1 gibt es ein $x_0 \in X$, $\varrho > 0$ und $C < \infty$ mit $\|Tx\| \leq C$ für $\|x - x_0\| \leq \varrho$. Für $x \in X$ beliebig folgt

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\varrho} \big\| T\big(x_0 + \varrho \frac{x}{\|x\|}\big) - T(x_0) \big\| \leq \frac{2C}{\varrho} \|x\|.$$

Also gilt $\|T\| \leq \frac{2C}{\varrho}$. □

Eine sehr wichtige Anwendung ist die

Folgerung 4.1 *Sei X Banachraum. Die Folge $\phi_k \in X'$ konvergiere schwach* gegen $\phi \in X'$:*

$$\phi_k(x) \to \phi(x) \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann ist die Folge ϕ_k in X' beschränkt, also $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$.

Beweis: Schwache Konvergenz der ϕ_k bedeutet punktweise Konvergenz. Also ist für jedes $x \in X$ die Folge $\phi_k(x)$ beschränkt, und nach Satz 4.2 ist dann auch die Folge $\|\phi_k\|$ beschränkt. □

Die schwache Konvergenz wird noch ausführlich behandelt. Eine zweite Anwendung ist

Beispiel 4.1 Ist eine bilineare Abbildung $B : X \times Y \to Z$ zwischen Banachräumen in jedem Argument stetig, so ist sie insgesamt stetig. Zum Beweis betrachte für $\|x\| \leq 1$ die lineare Abbildung $B_x \in L(Y,Z)$, $B_x(y) = B(x,y)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $y \in Y$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|B_x(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|B(x,y)\| < \infty.$$

[12] Englisch: uniform boundedness principle

Die B_x sind somit auf Y punktweise gleichmäßig beschränkt, aus Satz 4.2 folgt

$$M := \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \|B(x,y)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|B_x\| < \infty.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von B, und zwar hat man mit der Dreiecksungleichung

$$\|B(x,y) - B(x_0,y_0)\| \leq M\big(\|x-x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y-y_0\|\big).$$

Satz 4.3 (von der offenen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume. Ist $T \in L(X,Y)$ surjektiv, so ist T offen, das heißt*

$$\Omega \subset X \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad T(\Omega) \subset Y \text{ offen.}$$

Bemerkung. Ist umgekehrt T offen, so folgt $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ bzw. $B_R(0) \subset T(B_{\frac{R}{\delta}}(0)$, das heißt T ist surjektiv.

Beweis: **Schritt 1** $\overline{T(B_1(0))} \supset B_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$.
Nach Voraussetzung gilt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(B_k(0)).$$

Nach Baire, Satz 4.1, gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\overline{T(B_k(0))} \supset B_\varepsilon(y_0)$, für $y_0 \in Y$ und $\varepsilon > 0$ geeignet. Also gibt es zu jedem $\eta \in B_\varepsilon(0) \subset Y$ eine Folge $x_j \in B_k(0)$ mit $T(x_j) \to y_0 + \eta$. Wähle noch $\xi_j \in B_k(0)$ mit $T(\xi_j) \to y_0$. Dann folgt

$$T\big(\underbrace{\frac{x_j - \xi_j}{2k}}_{\in B_1(0)}\big) = \frac{1}{2k}(T(x_j) - T(\xi_j)) \to \frac{1}{2k}\eta \quad \text{mit } j \to \infty.$$

Dies zeigt $\overline{T(B_1(0))} \supset B_{\frac{1}{2k}}(0) =: B_\delta(0)$.

Schritt 2 $B_\delta(0) \subset T(\overline{B_1(0)}) \subset T(B_2(0))$.
Es ist nur die erste Inklusion zu zeigen; sei dazu $y_0 \in B_\delta(0)$ gegeben. Setze $x_0 = 0$ und konstruiere $x_0, x_1, \ldots$ durch folgende Iteration: ist x_k schon bestimmt mit $\|y_0 - Tx_k\| < 2^{-k}\delta$, so setze $x_{k+1} = x_k + \xi_k$ wobei

$$\xi_k \in B_{2^{-k}}(0) \text{ mit } \|(y_0 - Tx_k) - T\xi_k\| < 2^{-k-1}\delta.$$

Nach Schritt 1 ist diese Wahl möglich. Wegen $\|x_{k+1} - x_k\| < 2^{-k}$ und $x_0 = 0$ konvergiert die Folge x_k gegen ein $x \in \overline{B_1(0)}$, und es folgt $Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_k = y_0$.

Schritt 3 Aus Schritt 2 folgt T offen mit Skalierung, und zwar ist

$$T(B_r(x_0)) = T(x_0) + \frac{r}{2}T(B_2(0)) \supset T(x_0) + \frac{r}{2}B_\delta(0) = B_{\frac{\delta r}{2}}(T(x_0)).$$

□

Der nächste Satz garantiert die Stetigkeit der inversen Abbildung. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, insofern liefert der Satz ein gutes Resultat. Allerdings ist die Voraussetzung der Bijektivität oft schwierig zu verifizieren. In Anwendungen, zum Beispiel auf das Dirichletproblem, läuft die Argumentation in umgekehrter Reihenfolge: erst werden Abschätzungen bewiesen, dann wird aus diesen die Surjektivität gefolgert.

Satz 4.4 (Satz von der inversen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ bijektiv. Dann ist T invertierbar, das heißt T^{-1} ist stetig.*

Beweis: Es gilt $T(0) = 0$, nach Satz 4.3 gibt es also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$, also $T^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$ oder $T^{-1}(B_1(0)) \subset B_{\frac{1}{\delta}}(0)$, das heißt $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$. □

Beispiel 4.2 Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ vollständige Normen auf dem Vektorraum X. Dann gilt

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|x\|_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|x\|_1 < \infty.$$

Betrachte dazu $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ und wende Satz 4.4 an. Es ist allerdings unklar wie die Voraussetzung, dass beide Normen auf demselben Raum X vollständig sind, verifiziert werden kann. Ist X vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$, so natürlich auch bezüglich jeder äquivalenten Norm $\|\cdot\|_2$, aber diese Äquivalenz wollen wir ja nicht voraussetzen sondern folgern.

Satz 4.5 (vom abgeschlossenen Graphen) *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ sei linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Der Unterraum $G_T = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \oplus Y$ ist abgeschlossen.*

(2) *T ist stetig.*

Wir wählen hier $\|(x,y)\|_{X \oplus Y} = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$, damit ist $X \oplus Y$ ein Banachraum.

Beweis: Ist T stetig und $(x_k, Tx_k) \to (x, y)$, so folgt $y = \lim_{k\to\infty} Tx_k = Tx$. Sei umgekehrt G_T abgeschlossen, also Banachraum mit der induzierten Norm auf $X \oplus Y$. Die Projektion $P_1 : G_T \to X$ ist stetig und bijektiv. Nach Satz 4.4 ist dann auch $P_1^{-1} : X \to G_T$ stetig, und somit auch $T = P_2 P_1^{-1} : X \to Y$. □

Satz 4.6 (von der direkten Summe) *Der Banachraum Z sei algebraische direkte Summe der Unterräume X und Y. Sind X, Y abgeschlossene Unterräume, so ist*

$$T : X \oplus Y \to Z,\ T(x,y) = x + y,$$

stetig invertierbar, und die Projektionen $P_X : Z \to X$, $P_Y : Z \to Y$ sind stetig.

Beweis: Nach Voraussetzung ist T bijektiv und stetig, denn

$$\|T(x,y)\|_Z = \|x + y\|_Z \leq 2\max(\|x\|_X, \|y\|_Y) = 2\|(x,y)\|_{X\oplus Y}.$$

Nach Satz 4.4 ist dann auch $T^{-1} : Z \to X \oplus Y$ stetig. Die Projektionen $P_{1,2}$ auf die Komponenten von $X \oplus Y$ sind stetig, damit auch $P_X = P_1 T^{-1}$ bzw. $P_Y = P_2 T^{-1}$. □

5 Hilbertraumtheorie

David Hilbert (1862-1943) ist einer der bedeutendsten Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Die Grundidee der Funktionalanalysis, analytische Probleme mit Konzepten der Geometrie zu studieren, geht auf ihn zurück.

Definition 5.1 *Ein Skalarproduktraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{R}$ heißt Hilbertraum, wenn er bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ vollständig ist.*

Beispiel: ist μ äußeres Maß auf einer Menge Ω, so ist $L^2(\mu)$ Hilbertraum mit

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mu)} = \int_\Omega f g \, d\mu.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir später den Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es spielen auch Hilberträume über $\mathbb{C}$ eine Rolle, etwa in der Quantenmechanik. Die Unterschiede zum reellen Fall sind aber nicht so groß, soweit es unsere Analysis betrifft, aus Zeitgründen bleiben wir deshalb im Reellen. In jedem Hilbertraum X haben wir die Riesz-Abbildung

$$\mathcal{R} : X \to X',\ \mathcal{R}x_0(x) = \langle x, x_0\rangle.$$

Die Abbildung $\mathcal{R}$ ist linear, explizit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\lambda x_0 + \mu x_1)(x) &= \langle x, \lambda x_0 + \mu x_1\rangle \\
&= \lambda\langle x, x_0\rangle + \mu\langle x, x_1\rangle \\
&= \lambda\,\mathcal{R}x_0(x) + \mu\,\mathcal{R}x_1(x) \\
&= (\lambda\,\mathcal{R}x_0 + \mu\,\mathcal{R}x_1)(x).
\end{aligned}$$

Weiter ist $\mathcal{R}$ isometrisch, das heißt es gilt

$$\|\mathcal{R}x_0\| = \|x_0\| \quad \text{für alle } x_0 \in X. \tag{5.12}$$

Denn einerseits gilt nach Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$\|\mathcal{R}x_0\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\mathcal{R}x_0(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, x_0\rangle| \le \|x_0\|.$$

Andererseits ergibt sich durch Wahl von $x = x_0$ (man spricht auch vom Test mit x_0)

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0\rangle = \mathcal{R}x_0(x_0) \le \|\mathcal{R}x_0\|\,\|x_0\| \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}x_0\| \ge \|x_0\|.$$

Der folgende zentrale Satz besagt, dass die Abbildung $\mathcal{R}$ surjektiv ist.

Satz 5.1 (Darstellungssatz von Riesz) *Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Zu jedem $\phi \in X'$ gibt es genau ein $x_0 \in X$ mit $\phi = \mathcal{R}x_0$, also*

$$\phi(x) = \langle x, x_0\rangle \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{5.13}$$

Somit ist die Riesz-Abbildung $\mathcal{R} : X \to X'$ eine Isometrie.

Zusatz. *x_0 ist die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \phi(x)$.*

Beweis: Die lineare Abbildung $\mathcal{R}$ ist injektiv, denn aus $\mathcal{R}x_0 = 0$ folgt $x_0 = 0$ wegen (5.12). Es gibt also höchstens ein x_0 mit $\mathcal{R}x_0 = \phi$ bzw. mit (5.13). Für die Existenz zeigen wir:

(a) Eine Minimalstelle x_0 von Q_ϕ ist Lösung von (5.13).

(b) Es gibt eine Minimalstelle x_0 von Q_ϕ.

Zu (a): Sei x_0 Minimalstelle von Q_ϕ. Für $x \in X$ und $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$Q_\phi(x_0 + tx) = \frac{1}{2}\|x_0 + tx\|^2 - \phi(x_0 + tx) = Q_\phi(x_0) + t\big(\langle x, x_0\rangle - \phi(x)\big) + \frac{t^2}{2}\|x\|^2.$$

Aus der Minimumeigenschaft folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\,Q_\phi(x_0 + tx)|_{t=0} = \langle x, x_0\rangle - \phi(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Damit ist (a) bewiesen. Weiter folgt dass Q_ϕ höchstens eine Minimalstelle haben kann.

Zu (b): Q_ϕ ist nach unten beschränkt, genauer gilt

$$Q_\phi(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|\phi\|\,\|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| - \|\phi\|)^2 - \frac{1}{2}\|\phi\|^2 \geq -\frac{1}{2}\|\phi\|^2.$$

Insbesondere ist $\lambda := \inf_{x\in X} Q_\phi(x) > -\infty$. Sei nun $x_k \in X$ eine Minimalfolge für Q_ϕ, das heißt $Q_\phi(x_k) \to \lambda$ mit $k \to \infty$. Es gilt (Parallelogrammgleichung)

$$\frac{1}{2}\|x_k - x_l\|^2 = \|x_k\|^2 + \|x_l\|^2 - \frac{1}{2}\|x_k + x_l\|^2 = 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4Q_\phi\big(\frac{x_k + x_l}{2}\big).$$

Beachte dass sich rechts die linearen Terme von Q_ϕ wegheben. Es folgt

$$\frac{1}{2}\|x_k - x_l\|^2 \leq 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4\lambda \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Somit existiert $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da Q_ϕ stetig ist, folgt $Q_\phi(x_0) = \lim_{k\to\infty} Q_\phi(x_k) = \lambda$.

□

Folgerung 5.1 *Ein Hilbertraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist reflexiv, das heißt die Abbildung $J_X : X \to X''$, $J_X(x)(\phi) = \phi(x)$, ist surjektiv (sogar Isometrie).*

Beweis: Nach Satz 5.1 ist die Rieszabbildung $\mathcal{R}_X : X \to X'$ eine Isometrie. Es folgt, dass die Norm auf X' durch ein Skalarprodukt induziert ist, und zwar gilt mit $\langle \phi, \psi\rangle := \langle \mathcal{R}_X^{-1}\phi, \mathcal{R}_X^{-1}\psi\rangle$

$$\|\phi\| = \|\mathcal{R}_X\mathcal{R}_X^{-1}\phi\| = \|\mathcal{R}_X^{-1}\phi\| = \sqrt{\langle\phi,\phi\rangle}.$$

Damit ist X' seinerseits ein Hilbertraum, mit Rieszabbildung $\mathcal{R}_{X'} : X' \to (X')' = X''$. Wir zeigen nun $J_X = \mathcal{R}_{X'} \circ \mathcal{R}_X$, für $x \in X$ und $\phi \in X'$ gilt

$$\mathcal{R}_{X'}(\mathcal{R}_X x)(\phi) = \langle \phi, \mathcal{R}_X x\rangle = \langle \mathcal{R}_X^{-1}\phi, x\rangle = \mathcal{R}_X(\mathcal{R}_X^{-1}\phi)(x) = \phi(x) = J_X x(\phi).$$

Nach Satz 5.1 ist J_X surjektiv und isometrisch. □

Folgerung 5.2 *Seien X, Y Hilberträume über $\mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $T \in L(X,Y)$ genau ein $T^* \in L(Y,X)$, den adjungierten Operator, mit*

$$\langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y. \tag{5.14}$$

Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.

Beweis: Für $y \in Y$ betrachte die Linearform $\phi_y : X \to \mathbb{R}$, $\phi_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Mit Cauchy-Schwarz folgt $\phi_y \in X'$, genauer gilt

$$\sup_{\|x\|\le 1} |\phi_y(x)| \le \Big(\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|\Big) \|y\| = \|T\|\,\|y\|.$$

Gleichung (5.14) besagt nun $\langle x, T^* y\rangle = \phi_y(x)$ für alle $x \in X$, das heißt ϕ_y wird durch T^*y dargestellt. Insbesondere ist T^*y und damit T^* eindeutig bestimmt nach Satz 5.1. Wir definieren nun $T^*y = \mathcal{R}^{-1}\phi_y$, damit gilt (5.14). Die Abbildung T^* ist linear, denn

$$T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \mathcal{R}^{-1}\phi_{\lambda y_1 + \mu y_2} = \mathcal{R}^{-1}(\lambda \phi_{y_1} + \mu \phi_{y_2}) = \lambda T^* y_1 + \mu T^* y_2.$$

Da $\mathcal{R}$ isometrisch ist, folgt weiter

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\|\le 1} \|T^* y\| = \sup_{\|y\|\le 1} \|\phi_y\| \le \|T\|.$$

Nun ist $(T^*)^* = T$, und damit $\|T^*\| = \|T\|$. □

Sei Z Hilbertraum. Der Orthogonalraum zu einem Unterraum $X \subset Z$ ist

$$X^\perp = \{y \in Z : \langle x, y\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in X\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $X^\perp$ immer ein abgeschlossener Unterraum von Z ist, und dass $X \cap X^\perp = \{0\}$ ist. Angenommen es gilt $Z = X \oplus X^\perp$, das heißt jedes $z \in Z$ hat eine Darstellung $z = x + y$ mit $x \in X$ und $y \in X^\perp$. Es folgt dann

$$z \in X \quad \Leftrightarrow \quad \langle z, y'\rangle = 0 \text{ für alle } y' \in X^\perp \quad \Leftrightarrow \quad z \in (X^\perp)^\perp.$$

Die Darstellung $Z = X \oplus Xperp$ kann also nur gelten, wenn X selbst abgeschlossen ist. Ein Standard Gegenbeispiel ist $X = C_c^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum $Z = L^2(\Omega)$, nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist

$$X^\perp = \Big\{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in Y\Big\} = \{0\}.$$

Folgerung 5.3 *Ist X abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums Z, so gilt $Z = X \oplus X^\perp$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist X mit dem induzierten Skalarprodukt ein Hilbertraum. Für $z \in Z$ betrachte $\phi \in X'$, $\phi(x) = \langle x, z\rangle$. Nach Satz 5.1 gibt es ein $x_0 \in X$ mit

$$\phi(x) = \langle x, x_0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, z - x_0\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Also ist $z = x_0 + (z - x_0) \in X \oplus X^\perp$. □

Man bezeichnet Folgerung 5.3 auch als Projektionssatz. Denn mit der Summe $Z = X \oplus X^\perp$ haben wir auch die Orthogonalprojektion auf X, und zwar

$$P : Z \to X,\ Pz = x \quad \text{für } z = x + y.$$

Unter allen $x \in X$ hat Pz den kleinsten Abstand zu z, denn wegen $z - Pz \in X^\perp$ folgt

$$\|z - x\|^2 = \|z - Pz + Pz - x\|^2 = \|z - Pz\|^2 + \|Pz - x\|^2 \geq \|z - Pz\|^2,$$

mit Gleichheit genau wenn $x = Pz$. Man sieht leicht $\|P\| = 1$ außer wenn $X = \{0\}$. Weiter hat man die Relationen $P^2 = P$ und $P^* = P$. In einem Hilbertraum kann allgemeiner die Projektion auf jede konvexe, abgeschlossene Teilmenge definiert werden, das wird als Übungsaufgabe behandelt.

Im zweiten Teil des Kapitels geht es um die Anwendung der Hilbertraumtheorie auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ, genauer die Existenz von Lösungen mit vorgeschriebenen Randwerten. Für die Formulierung der Gleichung im Kontext der Hilberträume brauchen wir das Konzept der verallgemeinerten oder schwachen Ableitung.

Definition 5.2 (schwache Ableitung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von $u(x)$ nach der Variablen x_i, falls gilt:*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega g \varphi \quad \text{\textit{für alle} } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Notation: $\partial_i u = g$ *schwach.*

Die schwache Ableitung sollte eindeutig sein. Tatsächlich folgt aus $\partial_i u = g_{1,2}$ schwach

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\varphi = - \int_\Omega u \partial_i \varphi + \int_\Omega u \partial_i \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega),$$

und daraus $g_1 = g_2$ mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Weiter sollte für $u \in C^1(\Omega)$ die klassische Ableitung gleich der schwachen Ableitung sein. Dies ergibt sich durch partielle Integration, es gilt

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega (\partial_i u)\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Natürlich ist weiter zu prüfen, ob und in welchem Sinne die Differentiationsregeln auch für das schwache Konzept gelten. Hier nur zur Linearität: sind $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwach nach x_i differenzierbar, so auch $\alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; es gilt $\partial_i(\alpha u + \beta v) = \alpha \partial_i u + \beta \partial_i v$. Denn wir berechnen für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\alpha u + \beta v)\partial_i \varphi &= \alpha \int_\Omega u \partial_i \varphi + \beta \int_\Omega v \partial_i \varphi \\
&= -\alpha \int_\Omega (\partial_i u)\varphi - \beta \int_\Omega (\partial_i v)\varphi \\
&= - \int_\Omega (\alpha \partial_i u + \beta \partial_i v)\varphi.
\end{aligned}$$

Beispiel 5.1 Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),\ u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $u(x)$ schwache Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$? Auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist $u(x)$ glatt, die schwache Ableitung muss dort die klassische sein:

$$\partial_i u(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|} =: g_i(x) \quad \text{für } x \neq 0.$$

Für $\alpha > 1 - n$ ist $g_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, wir zeigen $\partial_i u = g_i$ schwach. Und zwar gilt für $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u\, \partial_i \varphi &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varrho(0)} (\partial_i (u\varphi) - (\partial_i u)\varphi) \\
&= \lim_{\varrho \searrow 0} \Big(- \underbrace{\int_{\partial B_\varrho(0)} u\varphi \langle e_i, \nu \rangle \, d\mu}_{\leq C\varrho^{n-1+\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varrho(0)} g_i \varphi \Big) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} g_i \varphi.
\end{aligned}$$

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $p = 2$, so dass wir es mit Hilberträumen zu tun haben.

Definition 5.3 (Sobolevraum) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega) \text{ für } i = 1, \ldots, n\},$$

mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Analog werden auch die lokalen Sobolevräume $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ erklärt.

Satz 5.2 *$W^{1,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis: Ist u_k eine Cauchyfolge in $W^{1,2}(\Omega)$, so sind u_k sowie $\partial_i u_k$ Cauchyfolgen in $L^2(\Omega)$. Nach Fischer-Riesz gilt dann $u_k \to u$, $\partial_i u_k \to g_i$ in $L^2(\Omega)$. Für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ folgt

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \partial_i \varphi = - \lim_{k \to \infty} \int_\Omega (\partial_i u_k)\varphi = \int_\Omega g_i \varphi.$$

Also gilt $\partial_i u = g_i$ schwach, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ und $u_k \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$. □

Für Funktionen $u \in C^0(\overline{\Omega})$ sind die Randwerte als Einschränkung $u|_{\partial\Omega}$ gegeben. Dies kann nicht einfach auf Funktionen in $W^{1,2}(\Omega)$ übertragen werden, diese haben im allgemeinen keinen stetigen Repräsentanten. Wir definieren Funktionen mit verallgemeinerten Nullrandwerten wie folgt.

Definition 5.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir bezeichnen mit $W^{1,2}_0(\Omega)$ den Abschluss von $C^\infty_c(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$.*

Es ist berechtigt zu fragen, in welchem Sinn diese Funktionen Randwerte Null haben. Wir wollen das hier nicht voll diskutieren, zeigen aber eine Teilaussage. Diese wird später nicht wirklich benötigt, sie soll zum Verständnis der Randbedingung beitragen. Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ bezeichnet hier die Menge aller Funktionen $u \in C^1(\Omega)$, für die u und alle Ableitungen $\partial_i u$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind. Eine solche Fortsetzung ist natürlich eindeutig bestimmt.

Lemma 5.1 (Nullrandwerte) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet der Klasse C^1. Dann gilt für Funktionen $u \in C^1(\overline{\Omega})$*

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Beweis: Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, das heißt es gibt eine Folge $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to u$ und $\partial_i u_k \to \partial_i u$ in $L^2(\Omega)$. Für $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ folgt dann

$$\partial_i(u_k\varphi) = (\partial_i u_k)\varphi + u_k(\partial_i\varphi) \to (\partial_i u)\varphi + u(\partial_i\varphi) = \partial_i(u\varphi) \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Beachte dass φ und $\partial_i\varphi$ auf $\overline{\Omega}$ beschränkt sind. Es folgt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} u\langle\nu, e_i\rangle\varphi = \int_\Omega \partial_i(u\varphi) = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \partial_i(u_k\varphi) = 0.$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung, angewandt in Randkarten von Ω, zeigt nun $u\langle\nu, e_i\rangle = 0$ auf $\partial\Omega$ für $i = 1, \ldots, n$ und damit $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Die umgekehrte Richtung zeigen wir erst auf dem Hallbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Sei $u \in C^1(\overline{H})$ mit kompaktem Träger in $\overline{H}$ und $u = 0$ auf ∂H. Wir konstruieren eine Approximation durch Funktionen $u_\varepsilon \in C_c^1(H)$, Glättung liefert dann leicht eine Approximation mit Funktionen in $C_c^\infty(H)$. Wähle $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } |t| \ge 1, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad 0 \le \eta'(t) \le C.$$

Definiere $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x_n)u(x)$ wobei $\eta_\varepsilon(t) = \eta\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)$. Damit ist $u_\varepsilon \in C_c^1(H)$ und

$$\partial_i u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x_n)\partial_i u(x) + \delta_{in}\frac{1}{\varepsilon}\eta'\Big(\frac{x_n}{\varepsilon}\Big)u(x).$$

Es folgen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon - u| &\le \chi_{\{x_n \le \varepsilon\}}|u|, \\ |\partial_i u_\varepsilon - \partial_i u| &\le \chi_{\{x_n \le \varepsilon\}}|\partial_i u| + \frac{C}{\varepsilon}\chi_{\{x_n \le \varepsilon\}}|u| \end{aligned}$$

Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gehen die Funktionen $\chi_{\{x_n\le\varepsilon\}}|u|$ und $\chi_{\{x_n\le\varepsilon\}}|\partial_i u|$ in $L^2(H)$ gegen Null. Aus der Voraussetzung $u(\cdot, 0) = 0$ folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\varepsilon |u(x', x_n)|^2\,dx_n dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\varepsilon \Big|\int_0^{x_n} \partial_n u(x', z)\,dz\Big|^2\,dx_n dx' \\ &\le \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\varepsilon |\partial_n u(x', z)|^2\,dz dx'. \end{aligned}$$

Damit geht auch $\frac{1}{\varepsilon}\chi_{\{x_n\le\varepsilon\}}|u|$ in $L^2(H)$ gegen Null, wieder nach Lebesgue. Also ist u_ε die gesuchte Approximation. Ein allgemeines Gebiet Ω überdecken wir mit endlich vielen inneren Umgebungen und Randumgebungen. Wir zerlegen dann u mittels einer untergeordneten Teilung der Eins mit kompakten Trägern. Die Randumgebungen sind C^1-diffeomorph zu Gebieten im Halbraum, und durch Hin- und Rücktransport mit dem Diffeomorphismus erhalten wir für sie eine Approximation wie oben. Addition der lokalen Funktionen liefert die gewünschte die Approximation. $\square$

Jetzt aber zum Randwertproblem. Auf einem offenen und beschränkten beschränkten C^1-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Differentialoperator

$$L : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega),\ Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u). \tag{5.15}$$

Die Koeffizienten a^{ij} seien in $C^1(\overline{\Omega})$, der Operator ist also durch (11.49) wohldefiniert. Paradefall ist (minus) der Laplaceoperator

$$Lu = -\Delta u = -\sum_{i=1}^n \partial_i^2 u, \qquad \text{also } a^{ij} = \delta_{ij}.$$

Weiter sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ gegeben. Das klassische Dirichletproblem besteht in der Konstruktion einer Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ der Randwertaufgabe

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \tag{5.16}$$

Wir wollen für eine Lösung von (5.16) eine Gleichung in einem Hilbertraum herleiten, die sogenannte schwache Formulierung des Problems. Es geht erstmal um die Motivation dieser Version, dazu können wir zusätzlich $u \in C^1(\overline{\Omega})$ annehmen. Aus der Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt dann $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, siehe Lemma 5.1. Weiter folgt durch Multiplikation der Differentialgleichung $Lu = f$ mit einer Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, und anschliessende partielle Integration

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Da die Koeffizienten a^{ij} beschränkt sind, existiert die linke Seite allgemeiner für Funktionen $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir definieren nun den schwachen Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ (Lu)(\varphi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi. \tag{5.17}$$

Als rechte Seite wählen wir $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ beliebig, wir erhalten das schwache Dirichletproblem

$$Lu = \phi \qquad \text{für gesuchtes } u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{5.18}$$

Ist die rechte Seite durch Integration gegen f gegeben, so ist $\phi = \phi_f$ mit

$$\phi_f(v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{5.19}$$

Für eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt also

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad Lu = \phi_f. \tag{5.20}$$

In der Herleitung tritt kein Informationsverlust auf: sei umgekehrt $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der schwachen Formulierung (5.20). Dann wählen wir dort $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ als Testfunktion und integrieren zurück partiell, es folgt

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - f\Big)\varphi = \int_\Omega a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi - \int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt die klassische Gleichung $Lu = f$. Außerdem folgt aus $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die klassische Dirichlet Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$, wie in Lemma 5.1 gezeigt. Zusammengefasst ist die schwache Version (5.20) für reguläre Funktionen äquivalent zur klassischen Version (5.16), aber sie ist im Hilbertraumkontext formuliert. Unser Ziel ist ein Existenzsatz für das schwache Problem. Dazu brauchen wir folgende Ungleichung.

Satz 5.3 (Poincaré) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d\,\|Du\|_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{wobei } d = \operatorname{diam}(\Omega).$$

Beweis: Wir können $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen mit $\operatorname{spt} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq d\}$. Für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, d]$ folgt mit Cauchy-Schwarz

$$|u(x', x_n)|^2 = \Big|\int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', z)\, dz\Big|^2 \leq d \int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^2(x', z)\, dz.$$

Es folgt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d |u(x', x_n)|^2\, dx_n\, dx' \\
&\leq d \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^2(x', z)\, dz\, dx_n\, dx' \\
&= d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|^2(x', z)\, dz\, dx' \\
&\leq d^2 \int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

□

Für die schwache Lösung brauchen wir für die Koeffizienten nur gewisse Strukturvoraussetzungen, die wesentliche ist die Elliptizität des Operators L.

Satz 5.4 (Existenz der schwachen Lösung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und*

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Lu(v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v =: A(u, v).$$

Dabei seien $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ symmetrisch, also $a^{ij} = a^{ji}$, und elliptisch: es gibt eine Konstante $\lambda > 0$ so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \qquad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.21}$$

Dann ist L beschränkt invertierbar, und es gilt die Abschätzung

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{d^2 + 1}{\lambda} \qquad \textit{wobei } d = \operatorname{diam}(\Omega). \tag{5.22}$$

Zusatz. *Die Lösung von $Lu = \phi$ ist die eindeutige Minimalstelle des Funktionals*

$$Q : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R},\ Q(u) = \frac{1}{2} A(u, u) - \phi(u).$$

Beweis: Wegen $a^{ij} = a^{ji}$ ist die Bilinearform $A(u,v)$ symmetrisch. Wir zeigen dass sie ein Skalarprodukt auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert, das äquivalent zum gegebenen $W^{1,2}$-Skalarprodukt ist. Wir beginnen mit der Abschätzung nach oben. Setze dazu

$$X = \sum_{j=1}^n X^j e_j \quad \text{wobei } X^j = \sum_{i=1}^n a^{ij} \partial_i u.$$

Es folgt dann mit Cauchy-Schwarz

$$|A(u,v)| = \Big| \int_\Omega \sum_{j=1}^n X^j \partial_j v \Big| \leq \Big(\int_\Omega |X|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |Dv|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Weiter haben wir die Ungleichung, für $M = \max_{1 \leq i,j \leq n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$|X|^2 = \sum_{j=1}^n \Big| \sum_{i=1}^n a^{ij} \partial_i u \Big|^2 \leq M^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2 = nM^2 |Du|^2.$$

Durch Einsetzen ergibt sich also

$$|A(u,v)| \leq \sqrt{n} M \, \|Du\|_{L^2(\Omega)} \|Dv\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.23}$$

insbesondere folgt die Abschätzung nach oben

$$A(u,u) \leq \sqrt{n} M \, \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{5.24}$$

Nach Satz 5.3, der Poincaré-Ungleichung, gilt

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (d^2+1) \|Du\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Mit der Elliptizität folgt nun die Abschätzung nach unten

$$A(u,u) \geq \lambda \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\lambda}{d^2+1} \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{5.25}$$

Damit ist $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit der Norm $\|u\|_A = A(u,u)^{1/2}$ ein Hilbertraum. Nach Riesz, Satz 5.1, gibt es zu $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$A(u,v) = \phi(v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dieses u ist die eindeutige Lösung von $Lu = \phi$, und die Minimalstelle von Q in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Durch Testen mit u ergibt sich wegen $Lu(u) = A(u,u)$

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{d^2+1}{\lambda} Lu(u) = \frac{d^2+1}{\lambda} \phi(u) \leq \frac{d^2+1}{\lambda} \|\phi\| \, \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Nun ist $u = L^{-1}\phi$, und nach Kürzen

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{d^2+1}{\lambda} \|\phi\|.$$

□

Für das Funktional ϕ_f gilt $|\phi_f(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$, der Satz liefert für die Lösung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{d^2+1}{\lambda}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Diese Abschätzung kann modifiziert bzw. verbessert werden, aber das wollen wir jetzt nicht vertiefen. Um auch den Fall zu behandeln, wenn die Koeffizientenmatrix nicht symmetrisch ist, brauchen wir eine geringfügige Verallgemeinerung des Satzes von Riesz, den Satz von Lax und Milgram.

Lemma 5.2 (Darstellung von Bilinearformen) *Sei X Hilbertraum, und $B : X \times X \to \mathbb{R}$ sei stetige Bilinearform auf X, das heißt*

$$\|B\| = \sup_{\|u\|,\|v\| \leq 1} |B(u,v)| < \infty.$$

Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X,X)$ mit

$$B(u,v) = \langle u, Tv\rangle \quad \textit{für alle } u,v \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|B\|$.

Beweis: Die Eindeutigkeit von T ist klar. Für die Existenz betrachte, für $v \in X$ fest, das Funktional $B(\cdot, v)$. Erhalte mit Satz 5.1 eine wohldefinierte Abbildung $T : X \to X$ mit

$$B(u,v) = \langle u, T(v)\rangle \quad \text{für alle } u,v \in X.$$

Man sieht leicht, dass T linear ist. Mit $u = Tv$ für $\|v\| \leq 1$ folgt

$$\|Tv\|^2 = B(Tv,v) \leq \|B\|\,\|Tv\|,$$

also $\|T\| \leq \|B\|$. Die Ungleichung $\|B\| \leq \|T\|$ ist offensichtlich. □

Satz 5.5 (Lax-Milgram) *Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ Bilinearform auf dem Hilbertraum X mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *B ist stetig: es gibt ein $M < \infty$ mit $|B(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$ für alle $u,v \in X$.*

(2) *B ist koerziv: es gibt ein $\mu > 0$ mit $B(u,u) \geq \mu\|u\|^2$ für alle $u \in X$.*

Dann ist der Operator $L : X \to X'$, $(Lu)(v) = B(u,v)$, invertierbar, und es gilt

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}. \tag{5.26}$$

Ist B symmetrische Bilinearform, so ist die Lösung von $Lu = \phi$ die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - \phi(v)$.

Beweis: Durch Testen mit u folgt aus der Koerzivität

$$\mu\|u\|^2 \leq B(u,u) = Lu(u) \leq \|Lu\|\,\|u\|,$$

das heißt $\|u\| \leq \frac{1}{\mu}\|Lu\|$. Insbesondere ist L injektiv. Sobald zusätzlich die Surjektivität von L bewiesen ist, folgt außerdem die Abschätzung (5.26).

Ist B symmetrische Bilinearform, so ist $B(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum X mit äquivalenter Norm, genauer gilt

$$\sqrt{\mu}\|u\| \leq \|u\|_B = \sqrt{B(u,u)} \leq \sqrt{M}\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Die Surjektivität von L folgt dann direkt aus Satz 5.1. Im Fall B nicht symmetrisch wähle $T \in L(X,X)$ mit $B(u,v) = \langle u, Tv\rangle$, siehe Lemma 5.2. Es gilt dann

$$\mu\|u\|^2 \leq B(u,u) = \langle u, Tu\rangle \leq \|u\|\,\|Tu\|,$$

also $\|Tu\| \geq \mu\|u\|$. Betrachte nun die Bilinearform $A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle$. Es gilt $\|A\| \leq \|T\|^2 = \|B\|^2$ nach Lemma 5.2, sowie

$$A(u,u) = \|Tu\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Wie gezeigt ist $K : X \to X'$, $(Ku)(v) = A(u,v)$, beschränkt invertierbar. Aber

$$(Ku)(v) = A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle = B(Tu,v) = L(Tu)(v).$$

Dies zeigt $LT = K$, also ist auch L surjektiv. □

Wir erhalten insgesamt folgenden Existenzsatz.

Satz 5.6 (Lösung des Dirichletproblems) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und*

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Lu(v) = B(u,v) \quad \text{mit } B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j v.$$

Dabei sei $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ elliptisch mit $\lambda > 0$. Dann ist L beschränkt invertierbar, und

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{d^2+1}{\lambda} \quad \text{wobei } d = \operatorname{diam}(\Omega).$$

Beweis: $B(u,v)$ ist stetig und koerziv mit Konstante $\mu = \frac{\lambda}{d^2+1}$, die Behauptung folgt somit aus Satz 5.5. □

Bei nichtsymmetrischen Koeffizienten a^{ij} kann die Lösung nicht als Minimalstelle des quadratischen Funktionals $Q_\phi(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - \phi(u)$ interpretiert werden, denn die quadratische Form $B(u,u)$ hängt nur vom symmetrischen Anteil $\frac{1}{2}(a^{ij} + a^{ji})$ ab.

6 Satz von Radon-Nikodym

Bevor wir in das Thema einsteigen kurz ein paar Regeln zur Summation. Sei I eine abzählbare (evtl. endliche) Indexmenge. Die Summe von Zahlen $\lambda_i \in [0,\infty]$, $i \in I$, ist

$$\sum_{i\in I} \lambda_i = \sup\Big\{\sum_{i\in I'} \lambda_i : I' \text{endlich}\Big\}.$$

Ist $|I| = \infty$ so liefert jede Abzählung eine Reihe, die gegen die Summe konvergiert. Für $\lambda_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ betrachten wir $\lambda_i^\pm = \max(\pm\lambda_i, 0)$. Wir sagen, die Zahlen λ_i, $i \in I$, sind summierbar oder die Summe der λ_i existiert, wenn mindestens eine der Summen der λ_i^+ oder λ_i^- endlich ist. In diesem Fall setzen wir

$$\sum_{i\in I} \lambda_i = \sum_{i\in I} \lambda_i^+ - \sum_{i\in I} \lambda_i^- \in [-\infty, \infty].$$

Dieser Summationsbegriff ist gleichbedeutend mit dem Lebesgueintegral auf I bezüglich des Zählmaßes card. Sei nun X eine Menge und $\mathcal{E} \in 2^X$ eine σ-Algebra.

Definition 6.1 *Eine Funktion $\lambda : \mathcal{E} \to [-\infty, \infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$ heißt signiertes Maß auf $\mathcal{E}$, falls gilt: ist $E_i \in \mathcal{E}$, $i \in I$, eine abzählbare, paarweise disjunkte Familie, so ist $\lambda(E_i)$ summierbar und es gilt*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \sum_{i\in I} \lambda(E_i). \tag{6.27}$$

Wir bemerken, dass λ höchstens einen der Werte $\pm\infty$ annehmen kann. Denn sonst gilt

$$\begin{aligned} \infty = \lambda(A) &= \lambda(A \backslash B) + \lambda(A \cap B), \\ -\infty = \lambda(B) &= \lambda(B \backslash A) + \lambda(A \cap B). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda(A\cap B) > -\infty$, aus der zweiten $\lambda(A\cap B) < \infty$. Die Mengen $A\backslash B$ und $B\backslash A$ sind dann disjunkt mit λ-Maß $\pm\infty$, also sind $\lambda(A\backslash B)$ und $\lambda(B\backslash A)$ nicht summierbar im Widerspruch zur Definition.

Beispiel 6.1 Sei μ ein Maß auf $\mathcal{E}$. Das Integral der Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ sei definiert, das heißt θ ist $\mathcal{E}$-messbar und (mindestens) eines der Integrale von $\theta^\pm$ ist endlich. Wir erhalten dann ein signiertes Maß auf $\mathcal{E}$ durch

$$\lambda : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \lambda(E) = \int_E \theta \, d\mu = \int_X \theta\chi_E \, d\mu.$$

$\lambda(E)$ ist definiert, denn mindestens eins der Integrale $\int_X \theta^\pm\chi_E \, d\mu$ ist endlich. Sei nun $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ abzählbare, paarweise disjunkte Vereinigung von Mengen $E_i \in \mathcal{E}$. Dann ist die Summe der $\lambda(E_i)$ definiert, denn es gilt

$$\sum_{i\in I} \lambda(E_i)^\pm = \sum_{i\in I} \Big(\int_X \theta\chi_{E_i} \, d\mu\Big)^\pm \le \sum_{i\in I} \int_X \theta^\pm\chi_{E_i} \, d\mu = \int_X \theta^\pm\chi_E \, d\mu.$$

Der letzte Schritt verwendet monotone Konvergenz. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \int_X \theta^+\chi_E \, d\mu - \int_X \theta^-\chi_E \, d\mu \\ &= \int_X \sum_{i\in I} \theta^+\chi_{E_i} \, d\mu - \int_X \sum_{i\in I} \theta^-\chi_{E_i} \, d\mu \\ &= \sum_{i\in I} \int_X \theta^+\chi_{E_i} \, d\mu - \sum_{i\in I} \int_X \theta^-\chi_{E_i} \, d\mu \\ &= \sum_{i\in I} \lambda(E_i). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass mit $\mu(E) = 0$ auch $\lambda(E) = 0$ gilt. Der Satz von Radon-Nikodm liefert eine Darstellung als Integral für jedes signierte Maß λ mit dieser Eigenschaft, siehe unten.

Definition 6.2 *Sei λ signiertes Maß auf $\mathcal{E}$. Eine Menge $P \in \mathcal{E}$ heißt positiv bzgl. λ, falls*

$$\lambda(E) \geq 0 \quad \textit{für alle } E \subset P \qquad (E \in \mathcal{E}).$$

Analog: $Q \in \mathcal{E}$ negativ, sowie $N \in \mathcal{E}$ Nullmenge.

Satz 6.1 (Zerlegungssatz von Hahn)[13] *Sei λ signiertes Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $X = P \cup Q$ mit P positiv, Q negativ bezüglich λ.*

Beweis:
Schritt 1 P_j, $j \in \mathbb{N}$, positiv $\quad \Rightarrow \quad P = \bigcup_{j=1}^\infty P_j$ positiv
Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subset P$. Definiere induktiv

$$E_1 = E \cap P_1, \quad E_j = E \cap P_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i.$$

Die $E_j \subset P_j$ sind paarweise disjunkt mit $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Es folgt

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^\infty \lambda(E_j) \geq 0.$$

Schritt 2 Ist $E \in \mathcal{E}$ mit $\lambda(E) \in (0, \infty)$, so gibt es $P \subset E$ positiv mit $\lambda(P) > 0$.
Ist E selbst positiv, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls bestimme induktiv $E_k \subset E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$, $E_k \in \mathcal{E}$ mit $k = 1, 2, \ldots$, nach folgendem Verfahren:

- Setze $\lambda_k = \inf \big\{ \lambda(E') : E' \subset E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j,\ E' \in \mathcal{E} \big\}$, offenbar $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$.
- Wähle $E_k \subset E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$, $E_k \in \mathcal{E}$, mit

$$\lambda(E_k) < \max\left(\frac{\lambda_k}{2}, -1\right).$$

Fall 1 $\lambda_k \geq 0$ für ein erstes $k \in \mathbb{N}$
Dann ist $E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ positiv und es gilt

$$0 < \lambda(E) = \lambda\Big(E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\Big) + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{\lambda(E_j)}_{<0}, \qquad \text{die Behauptung folgt.}$$

Fall 2 $\lambda_k < 0$ für alle $k \in N$
Setze $P = E \backslash \bigcup_{j=1}^\infty E_k$. Dann gilt

$$0 < \lambda(E) = \lambda(P) + \sum_{k=1}^\infty \lambda(E_k) < \lambda(P) + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\max\left(\frac{\lambda_k}{2}, -1\right)}_{<0}.$$

Es folgt $\lambda(P) > 0$ und $\lambda_k \nearrow 0$. Für $F \subset P$, $F \in \mathcal{E}$, gilt $F \subset E \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ für alle k, also $\lambda(F) \geq \lambda_k \to 0$ mit $k \to \infty$. Somit ist P positiv bzgl. λ.

[13]Hans Hahn (1879-1934, Wien)

Schritt 3 Beweis des Satzes
Wir nehmen an dass λ den Wert ∞ nicht annimmt, andernfalls betrachte $-\lambda$. Setze

$$\Lambda = \sup\{\lambda(E) : E \text{ positiv bzgl. } \lambda\}.$$

Es gilt $\Lambda \geq 0$ wegen $\lambda(\emptyset) = 0$. Wähle P_k positiv mit $\lambda(P_k) \nearrow \Lambda$ und setze $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Nach Schritt 1 ist P positiv, insbesondere $\Lambda \geq \lambda(P)$. Andererseits gilt

$$\lambda(P) = \lambda(P_k) + \lambda(P \backslash P_k) \geq \lambda(P_k) \nearrow \Lambda,$$

also folgt $\lambda(P) = \Lambda$ (insbesondere $\Lambda = \lambda(P) < \infty$). Ist $P' \subset X \backslash P$ positiv, so folgt

$$\Lambda \geq \lambda(P \cup P') = \lambda(P) + \lambda(P') = \Lambda + \lambda(P'), \quad \text{ also } \lambda(P') = 0.$$

Nach Schritt 2 ist $Q := X \backslash P$ negativ bzgl. λ, und die Zerlegung $X = P \cup Q$ ist gefunden. □

Definition 6.3 *Seien λ, μ (nichtnegative) Maße auf $\mathcal{E} \subset 2^X$.*

(1) λ heißt absolutstetig bzgl. μ (Notation: $\lambda \ll \mu$), falls gilt:

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0.$$

(2) λ, μ heißen zueinander singulär (Notation: $\lambda \perp \mu$) falls $E \in \mathcal{E}$ existiert mit

$$\lambda(X \backslash E) = 0 \quad \text{ und } \quad \mu(E) = 0.$$

Folgerung 6.1 *Sei λ signiertes Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann besitzt λ eine eindeutige Darstellung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, wobei $\lambda^{\pm}$ zueinander singuläre Maße auf $\mathcal{E}$ sind. Das Maß $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$ heißt Totalvariation von λ.*

Beweis: Die Existenz folgt aus Satz 6.1, in dem wir setzen

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap Q).$$

Eindeutigkeit: Übungsaufgabe. □

Lemma 6.1 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Gegeben seien Mengen $Q_\alpha \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_0^+$, so dass*

$$\mu(Q_\alpha \backslash Q_\beta) = 0 \text{ für } \alpha < \beta \quad \text{ und } \quad Q_0 = \emptyset.$$

Dann gibt es $\theta : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-messbar mit

$$\begin{cases} \theta(x) \leq \beta & \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in Q_\beta \\ \theta(x) \geq \beta & \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in X \backslash Q_\beta. \end{cases}$$

Beweis: Wir setzen $\theta(x) = \inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ : x \in Q_s\}$. Nach Definition gilt

$$\theta(x) < \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{\alpha < \beta} Q_\alpha.$$

Insbesondere ist θ messbar bezüglich $\mathcal{E}$. Offenbar ist $\theta(x) \leq \beta$ auf Q_β, andererseits folgt

$$\{x \in X \backslash Q_\beta : \theta(x) < \beta\} \subset \bigcup_{\alpha < \beta} Q_\alpha \backslash Q_\beta = \mu\text{-Nullmenge}.$$

□

Satz 6.2 (Radon-Nikodym) *Seien λ, μ Maße auf $\mathcal{E} \subset 2^X$, μ sei σ-endlich. Ist λ absolutstetig bzgl. μ, so existiert eine $\mathcal{E}$-messbare Funktion $\theta : X \to [0,\infty]$ mit*

$$\lambda(E) = \int_E \theta \, d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Die Funktion θ ist eindeutig bis auf Abänderung in einer μ-Nullmenge, und heißt Radon-Nikodym Dichte von λ bzgl. μ.

Beweis: Wir setzen zunächst $\mu(X) < \infty$ voraus.

Eindeutigkeit. Seien $\theta_{1,2} : X \to [0,\infty]$ wie in der Behauptung. Betrachte für $\varepsilon > 0$

$$E_\varepsilon = \{x \in X : \theta_2(x) > \theta_1(x) + \varepsilon\}.$$

Angenommen es ist $\mu(E_\varepsilon) > 0$. Da $\theta_1(x) < \infty$ für $x \in E_\varepsilon$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(E_{\varepsilon,k}) > 0 \quad \text{wobei } E_{\varepsilon,k} = \{x \in E_\varepsilon : \theta_1(x) \leq k\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\lambda(E_{\varepsilon,k}) &= \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_1 \, d\mu \leq k\mu(E_{\varepsilon,k}) < \infty, \\
\lambda(E_{\varepsilon,k}) &= \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_2 \, d\mu \geq \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_1 \, d\mu + \underbrace{\varepsilon\mu(E_{\varepsilon,k})}_{>0} > \lambda(E_{\varepsilon,k}),
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also ist $\{x : \theta_2(x) > \theta_1(x)\} = \bigcup_{j=1}^\infty E_{\frac{1}{j}}$ eine μ-Nullmenge.

Existenz. Da $\mu(X) < \infty$ ist $\lambda - \alpha\mu$, $\alpha \in \mathbb{Q}_0^+$, ein signiertes Maß. Betrachte dazu die Hahn-Zerlegung $X = P_\alpha \cup Q_\alpha$, oBdA $Q_0 = \emptyset$. Für $\alpha < \beta$ gilt $Q_\alpha \backslash Q_\beta = Q_\alpha \cap P_\beta$, also

$$(\lambda - \alpha\mu)(Q_\alpha \backslash Q_\beta) \leq 0 \quad \text{und} \quad (\lambda - \beta\mu)(Q_\alpha \backslash Q_\beta) \geq 0.$$

Es folgt $(\beta - \alpha)\,\mu(Q_\alpha \backslash Q_\beta) \leq 0$, also $\mu(Q_\alpha \backslash Q_\beta) = 0$. Sei $\theta : X \to [0,\infty]$ die $\mathcal{E}$-messbare Funktion aus dem Lemma, also μ-fast überall

$$\theta(x) \leq \beta \text{ auf } Q_\beta, \quad \theta(x) \geq \beta \text{ auf } X \backslash Q_\beta.$$

Für $E \in \mathcal{E}$ beliebig betrachte für $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$E_k = E \cap Q_{\frac{k+1}{N}} \backslash \bigcup_{j=1}^k Q_{\frac{j}{N}} \quad \text{sowie} \quad E_\infty = E \backslash \bigcup_{k=1}^\infty Q_{\frac{k}{N}}.$$

Dann ist $E = E_\infty \cup \bigcup_{k=0}^\infty E_k$ disjunkte Vereinigung, also

$$\lambda(E) = \lambda(E_\infty) + \sum_{k=0}^\infty \lambda(E_k).$$

Es gilt $E_k \subset Q_{\frac{k+1}{N}} \backslash Q_{\frac{k}{N}}$, daraus folgt

$$\frac{k}{N} \leq \theta \leq \frac{k+1}{N} \quad \mu\text{-fast überall auf } E_k.$$

Durch Integration folgt
$$\frac{k}{N}\,\mu(E_k) \le \int_{E_k} \theta\,d\mu \le \frac{k+1}{N}\,\mu(E_k).$$
Aber $E_k \subset Q_{\frac{k+1}{N}}$ sowie $E_k \subset P_{\frac{k}{N}}$ (siehe oben), also nach Definition der Hahn-Zerlegung
$$\frac{k}{N}\,\mu(E_k) \le \lambda(E_k) \le \frac{k+1}{N}\,\mu(E_k),$$
Durch Kombination folgt
$$\lambda(E_k) - \frac{1}{N}\,\mu(E_k) \le \int_{E_k} \theta\,d\mu \le \lambda(E_k) + \frac{1}{N}\,\mu(E_k).$$
Auf E_∞ ist μ-fast überall $\theta(x) = \infty$. Weiter haben wir $E_\infty \subset P_{\frac{k}{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, daraus folgt $(\lambda - \frac{k}{N}\mu)(E_\infty) \ge 0$. Es folgt

- ist $\mu(E_\infty) > 0$, so folgt $\lambda(E_\infty) = \infty$.
- ist $\mu(E_\infty) = 0$, so folgt $\lambda(E_\infty) = 0$ wegen Absolutstetigkeit.

In jedem der Fälle gilt
$$\lambda(E_\infty) = \int_{E_\infty} \theta\,d\mu.$$
Durch Summation über $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ folgt schließlich
$$\lambda(E) - \frac{1}{N}\,\mu(E) \le \int_E \theta\,d\mu \le \lambda(E) + \frac{1}{N}\,\mu(E),$$
also mit $N \to \infty$ die Behauptung des Satzes.

Sei jetzt μ nur σ-endlich, also $X = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ mit $X_k \subset \mathcal{E}$ und $\mu(X_k) < \infty$. Die Eindeutigkeit der Dichte θ folgt sofort, denn $\theta|_{X_k}$ ist Radon-Nikodym-Dichte auf X_k und dort eindeutig bis auf eine μ-Nullmenge. Zur Existenz schränke λ, μ auf X_k ein, erhalte Dichte $\theta_k : X_k \to [0,\infty]$. Setze fort durch $\theta_k = 0$ auf $X \backslash X_k$. Wegen Eindeutigkeit gilt $\theta_l = \theta_k$ μ-fast überall auf X_k für $l > k$, also konvergiert θ_k monoton gegen $\theta : X \to [0,\infty]$ nach Abänderung in μ-Nullmengen. Damit folgt wegen monotoner Konvergenz
$$\lambda(E) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E \cap X_k) = \lim_{k\to\infty} \int_E \theta_k\,d\mu = \int_E \theta\,d\mu.$$
$\square$

Satz 6.3 (Lebesgue-Zerlegung) *Seien λ, μ σ-endliche Maße auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann gilt*
$$\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s, \;\; \textit{wobei} \;\begin{cases} \lambda_{ac}(E) = \int_E \theta\,d\mu & \textit{absolutstetig bzgl. } \mu, \\ \lambda_s(E) = \lambda(E \cap N) & \textit{für eine } \mu\textit{-Nullmenge } N. \end{cases}$$
Die Maße λ_{ac} und λ_s sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\nu = \lambda + \mu$ ein σ-endliches Maß, und λ, μ sind absolutstetig bzgl. ν. Nach Radon-Nikodym gibt es $\mathcal{E}$-messbare Funktionen $f, g : X \to [0,\infty]$ mit

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\nu \quad \text{und} \quad \mu(E) = \int_E g\,d\mu \quad \forall E \subset \mathcal{E}.$$

Setze $N = \{x \in X : g(x) = 0\}$, also $\mu(N) = 0$, und

$$\lambda_{ac}(E) = \int_{E \backslash N} f\,d\nu, \quad \lambda_s(E) = \lambda(E \cap N).$$

Es folgt $\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s$, zu zeigen ist nur noch dass λ_{ac} absolutstetig ist bzgl. μ. Aus $\mu(E) = 0$ folgt $g = 0$ für ν-fast-alle $x \in E$, also $\nu(E\backslash N) = 0$ und somit

$$\lambda_{ac}(E) = \int_{E\backslash N} f\,d\nu = 0.$$

Die Eindeutigkeit ist den LeserInnen überlassen. □

Beispiel 6.2 Im Satz von Radon-Nikodym kann die Voraussetzung, dass μ σ-endlich ist, nicht weggelassen werden. Betrachte dazu auf dem System der Borelmengen in $[0,1]$ das Zählmaß card und das Lebesguemaß $\mathcal{L}^1$. Es gilt $\mathrm{card}(E) = 0$ genau wenn $E = \emptyset$, also ist $\mathcal{L}^1$ absolutstetig bezüglich card. Hätte $\mathcal{L}^1$ eine Darstellung mit einer Dichte $\theta : [0,1] \to [0,\infty]$ bezüglich card, so folgt für beliebiges $x \in [0,1]$

$$0 = \mathcal{L}^1(\{x\}) = \int_{\{x\}} \theta\,d\mathrm{card} = \theta(x),$$

also ist θ die Nullfunktion und damit $\mathcal{L}^1 = 0$, Widerspruch.

Beispiel 6.3 Im Zerlegungssatz von Lebsgue kann auf die σ-Endlichkeit von λ nicht verzichtet werden. Betrachte dazu nochmal die Maße card und $\mathcal{L}^1$ auf der Borelalgebra von $[0,1]$. Angenommen es gibt eine Zerlegung $\mathrm{card} = \mathrm{card}_{ac} + \mathrm{card}_s$ wie im Satz 6.3. Sei N die zugehörige $\mathcal{L}^1$-Nullmenge und $B = [0,1]\backslash N$. Es gilt dann für $x \in B$

$$\mathrm{card}_s(\{x\}) = \mathrm{card}(\{x\} \cap N) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{card}_{ac}(\{x\}) = \int_{\{x\}} \theta\,d\mathcal{L}^1 = 0.$$

Damit folgt $1 = \mathrm{card}(\{x\}) = 0$, Widerspruch.

7 Dualität der L^p-Räume

Im folgenden ist μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$.

Lemma 7.1 *Seien $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, im Fall $p = \infty$ sei μ σ-endlich. Dann ist*

$$I : L^p(\mu) \to L^q(\mu)',\ If(g) = \int_X fg\,d\mu$$

eine isometrische Injektion.

Beweis: Wir zeigen die Aussage in drei Schritten.

Schritt 1 Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$|If(g)| \leq \int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q},$$

also ist $If \in L^q(\mu)'$ mit $\|If\| \leq \|f\|_{L^p}$. Dies gilt auch wenn $p \in \{1,\infty\}$.

Schritt 2 Der Fall $1 \leq p < \infty$
Sei $f \in L^p(\mu)$, $f \neq 0$. Im Fall $p > 1$ ist $q = \frac{p}{p-1}$, und mit $g = \operatorname{sign}(f)|f|^{p-1}$

$$\|g\|_{L^q} = \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p}^{p-1}.$$

Im Fall $p = 1$ setze $g = \operatorname{sign}(f)$, also $\|g\|_{L^\infty} = 1$. Für alle $p \in [1,\infty)$ ergibt sich

$$If(g) = \int |f|^p\,d\mu = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \qquad \text{also } \|If\| \geq \|f\|_{L^p}.$$

Schritt 3 Der Fall $p = \infty$
Sei $f \in L^\infty(\mu)$, $f \neq 0$. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ mit $X_n \in \mathcal{E}$, $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ und $\mu(X_n) < \infty$. Für $\alpha < \|f\|_{L^\infty}$ ist $\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0$, also für n groß

$$\mu(X_{n,\alpha}) \in (0,\infty), \text{ wobei } X_{n,\alpha} = X_n \cap \{|f| > \alpha\}.$$

Mit $g = \operatorname{sign}(f)\chi_{X_{n,\alpha}}$ ergibt sich

$$If(g) = \int_{X_{n,\alpha}} |f|\,d\mu \geq \alpha\mu(X_{n,\alpha}) = \alpha\|g\|_{L^1(\mu)}, \qquad \text{also } \|If\| \geq \alpha \nearrow \|f\|_{L^\infty}.$$

□

Wir brauchen folgende Hilfsaussage, eine Modifikation von Lemma 7.1. Es ist hier wichtig dass $f \in L^p(\mu)$ nicht vorausgesetzt wird, sondern gefolgert.

Lemma 7.2 *Sei $\mu(X) < \infty$, $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^1(\mu)$ sei*

$$\|If\|_{L^q_T(\mu)'} = \sup\{If(\psi) : \psi \textit{ Treppenfunktion}, \|\psi\|_{L^q} \leq 1\} < \infty.$$

Dann ist $f \in L^p(\mu)$ und es gilt $\|f\|_{L^p} \leq \|If\|_{L^q_T(\mu)'}$.

Beweis: Wähle Folge $\varphi_k \geq 0$ von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \nearrow |f|$ punktweise auf X.

Fall 1 $1 < p,q < \infty$
Wir betrachten die Treppenfunktion $\psi_k = \operatorname{sign}(f)\varphi_k^{p-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\psi_k\|_{L^q} &= \Big(\int_X \varphi_k^p\,d\mu\Big)^{\frac{p-1}{p}} = \|\varphi_k\|_{L^p}^{p-1},\\ If(\psi_k) &= \int_X |f|\varphi_k^{p-1}\,d\mu \geq \|\varphi_k\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Nach Definiton der $L^q_T(\mu)'$-Norm folgt mit monotoner Konvergenz

$$\|If\|_{L^q_T(\mu)'} \geq \|\varphi_k\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p} \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Fall 2 $p = \infty$, $q = 1$
Betrachte die Treppenfunktion $\psi = \chi_{\{|f|>\alpha\}}\operatorname{sign}(f)$, wobei $\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0$. Es gilt

$$\|\psi\|_{L^1} = \mu(\{|f| > \alpha\}) \quad \text{und} \quad If(\psi) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu \geq \alpha\mu(\{|f| > \alpha\}).$$

Also folgt $\|If\|_{L^1_T(\mu)'} \geq \alpha$, und $\|f\|_{L^\infty} = \sup\{\alpha : \mu(\{|f| > \alpha\}) > 0\} \leq \|If\|_{L^1_T(\mu)'}$. □

Satz 7.1 (L^p-L^q-Dualität) *Sei μ Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$ und $1 < p \leq \infty$. Im Fall $p = \infty$ sei μ σ-endlich. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist dann die Abbildung*

$$I : L^p(\mu) \to L^q(\mu)',\, If(g) = \int_X fg\, d\mu,$$

surjektiv, und damit eine Isometrie.

Beweis: Sei $\phi \in L^q(\mu)'$ gegeben.

Fall 1 $\mu(X) < \infty$
Für $E \subset \mathcal{E}$ gilt $\|\chi_E\|_{L^q} = \mu(E)^{\frac{1}{q}} < \infty$. Wir definieren

$$\lambda(E) = \phi(\chi_E), \text{ also } |\lambda(E)| \leq \|\phi\|\mu(E)^{\frac{1}{q}}.$$

Offenbar ist $\lambda(\emptyset) = 0$. Für $E_j \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkt berechnen wir

$$\Big\|\sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}\Big\|_{L^q}^q = \int_X \Big|\sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}\Big|^q d\mu = \int_X \sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}\, d\mu = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) < \infty.$$

Aus der Stetigkeit von ϕ folgt

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) = \phi\Big(\sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}\Big) = \sum_{j=1}^\infty \phi(\chi_{E_j}) = \sum_{j=1}^\infty \lambda(E_j).$$

Also ist λ Maß auf $\mathcal{E}$, und absolutstetig bzgl. μ. Nach dem Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße (= Lebesgue-Zerlegung im Fall $\lambda \ll \mu$) gibt es eine Funktion $f \in L^1(\mu)$ mit

$$\phi(\chi_E) = \int_E f\, d\mu = \int_X f\chi_E\, d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Es folgt für alle μ-Treppenfunktionen ψ

$$\int_X f\psi\, d\mu = \phi(\psi) \leq \|\phi\|\, \|\psi\|_{L^q}.$$

Nach Lemma 7.2 folgt $f \in L^p(\mu)$ mit $\|f\|_{L^p} \leq \|\phi\|$. Da $q < \infty$ sind Treppenfunktionen dicht in $L^q(\mu)$. Es folgt wegen ϕ stetig

$$\phi(g) = \int fg\, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Also gilt $\phi = If$, der Satz ist bewiesen.

Fall 2 μ ist σ-endlich
Sei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ mit $X_n \in \mathcal{E}$, $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ und $\mu(X_n) < \infty$. Wende Fall 1 an auf das Maß $\mu_n = \mu \llcorner X_n$, also $\mu_n(E) = \mu(E \cap X_n)$, und auf das Funktional

$$\phi_n : L^q(\mu_n) \to \mathbb{R}, \quad \phi_n(g) = \phi(\chi_{X_n}\, g).$$

Für $g \in L^q(\mu_n)$ gilt die Abschätzung

$$|\phi_n(g)| \leq \|\phi\|\, \|\chi_{X_n}\, g\|_{L^q(\mu)} = \|\phi\|\, \|g\|_{L^q(\mu_n)}.$$

Nach Fall 1 gibt es ein $f_n \in L^p(\mu_n)$ mit $\|f_n\|_{L^p(\mu_n)} = \|\phi_n\| \leq \|\phi\|$ mit

$$\phi_n(g) = \int_X f_n g \, d\mu_n \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu_n).$$

Für $g \in L^q(\mu)$ mit $g = 0$ auf $X \backslash X_n$ folgt

$$\phi(g) = \phi_n(g) = \int_X f_n g \, d\mu_n = \int_{X_n} f_n\, g \, d\mu.$$

Wegen Eindeutigkeit gilt nach Abänderung in einer μ-Nullmenge $f_m = f_n$ auf X_n für alle $m \geq n$. Wir erhalten somit eine wohldefinierte Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f = f_n$ auf X_n. Wegen monotoner Konvergenz ist

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f_n|^p \, d\mu \leq \|\phi\|.$$

Für $g \in L^q(\mu)$ haben wir wegen dominierter Konvergenz

$$\int_X |g - \chi_{X_n} g|^q \, d\mu = \int_{X \backslash X_n} |g|^q \to 0.$$

Nach Hölderscher Ungleichung ist $|fg| \in L^1(\mu)$, also folgt wieder mit dominierter Konvergenz

$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \phi(\chi_{X_n} g) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n g\, \chi_{X_n} \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

Fall 3 μ beliebig und $1 < p < \infty$
Für $E \subset X$ σ-endlich gibt es $f_E \in L^p(\mu)$ mit $f = 0$ auf $X \backslash E$, so dass gilt

$$\phi(g) = \int f_E g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu),\ g = 0 \text{ auf } X \backslash E.$$

Dies folgt durch Anwendung von Fall 2 auf $\mu \llcorner E$. Für $E \subset E'$ gilt $f_E = f_{E'}$ μ-fast-überall auf E, wegen Eindeutigkeit. Setze

$$\lambda(E) = \int_X |f_E|^p \, d\mu.$$

Dann gilt $\lambda(E)| \leq \|\phi\|^p$ und $\lambda(E) \leq \lambda(E')$ für $E \subset E'$. Wähle $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ σ-endlich mit

$$\lambda(E_k) \nearrow \Lambda = \sup\{\lambda(E) : E\ \sigma\text{-endlich}\}.$$

Dann ist $Y = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ wieder σ-endlich, also

$$\Lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \leq \lambda(Y) \leq \Lambda.$$

Sei nun E σ-endlich mit $E \supset Y$. Dann gilt $f_E = f_Y$ μ-fast überall auf Y, und weiter

$$\int_X |f_E|^p \, d\mu = \lambda(E) \leq \lambda(Y) = \int_X |f_Y|^p \, d\mu = \int_Y |f_E|^p \, d\mu.$$

Das bedeutet $f_E = 0$ auf $X \backslash Y$, und damit $f_E = f_Y$ μ-fast-überall auf X. Wir zeigen nun dass f_Y die Darstellungseigenschaft hat. Für $g \in L^q(\mu)$ gilt für $\varepsilon > 0$ nach Tschebyscheff

$$\varepsilon^q \, \mu(\{|g| \geq \varepsilon\}) \leq \int_X |g|^q \, d\mu < \infty.$$

Also folgt

$$\big\{|g| > 0\big\} = \bigcup_{k=1}^\infty \Big\{|g| > \frac{1}{k}\Big\} \quad \text{wobei } \mu\Big(\Big\{|g| > \frac{1}{k}\Big\}\Big) < \infty,$$

das heißt $E_+ = \{|g| > 0\}$ ist σ-endlich. Dann ist auch $Y \cup E_+$ σ-endlich, und damit

$$\phi(g) = \int f_{Y \cup E_+} g \, d\mu = \int f_Y g \, d\mu.$$

□

Beispiel 7.1 Wir zeigen hier, dass für $I = [0,1]$ die Abbildung $I : L^1(I) \to L^\infty(I)'$ nicht surjektiv ist. Dazu verwenden wir, dass $C^0(I)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty(I)$ ist. Denn für $f \in C^0(I)$ gilt

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{L}^1(\{|f| > t\}) = 0\} = \|f\|_{C^0(I)}.$$

$C^0(I)$ ist ein Banachraum, also als Unterraum von $L^\infty(I)$ abgeschlossen. Da $C^0(I)$ echter Unterraum ist, gibt es nach Folgerung 3.1 ein $\phi \in L^\infty(I)'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi|_{C^0(I)} = 0$. Angenommen ϕ ist durch ein $f \in L^1([0,1])$ darstellbar, also

$$\phi(g) = \int_I fg \, d\mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } g \in L^\infty(I).$$

Insbesondere haben wir

$$\int_I fg \, d\mathcal{L}^1 = 0 \quad \text{für alle } g \in C^0(I).$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung impliziert dann $f = 0$ fast überall auf I. Das bedeutet aber $\phi = 0$, ein Widerspruch.

Tatsächlich spielt der Dualraum von $L^\infty(\mu)$ keine große Rolle. In Kapitel **??** werden wir den Dualraum von $C^0(X)$ bestimmen, wobei X kompakter metrischer Raum ist. Dieser Satz von Riesz-Radon ist von fundamentaler Bedeutung.

8 Dualität der L^p-Räume*

Hier geben wir einen alternativen Zugang zur L^p-L^q-Dualität, das Kapitel ist optional. μ sei ein äußeres Maß auf einer Menge X. Für μ-messbare Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ haben wir

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \begin{cases} \Big(\int_X |u(x)|^p\,d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \le p < \infty,\\ \inf\{s > 0 : \mu(\{f > s\}) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases} \tag{8.28}$$

Sei $\mathcal{N}$ der Raum aller Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ mit $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Die L^p-Räume sind

$$L^p(\mu) = \{u \ \mu\text{-messbar} : \|u\|_{L^p(\mu)} < \infty\}/\mathcal{N}. \tag{8.29}$$

Da sich äquivalente Funktionen nur auf einer Nullmenge unterscheiden, ist $\|u\|_{L^p(\mu)}$ auf dem Quotienten wohldefiniert, und ist eine Norm nach der Ungleichung von Minkowski. In Analysis III wird gezeigt:

Satz 8.1 (Fischer-Riesz) *Für $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\mu)$ mit Norm $\|u\|_{L^p(\mu)}$ ein Banachraum.*

Lemma 8.1 *Sei $1 \le p \le \infty$ und μ sei ein äußeres Maß auf X, σ-endlich im Fall $p = 1$. Für $1 \le q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist dann die Abbildung*

$$I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)',\ (I_q v)(u) = \int_X uv\,d\mu, \tag{8.30}$$

eine isometrische Injektion.

Bemerkung. $L^2(\mu)$ ist Hilbertraum, und I_2 ist die Rieszabbildung $\mathcal{R}$ aus Kapitel 5.

Beweis: Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$|I_q v(u)| = \Big|\int_X uv\,d\mu\Big| \le \|u\|_{L^p(\mu)}\|v\|_{L^q(\mu)},$$

also $I_q v \in L^p(\mu)'$ mit Norm $\|I_q v\| \le \|v\|_{L^q(\mu)}$. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen.

Fall 1: $1 < p \le \infty$.
Wir setzen $S^q(\mu) = \{u \in L^q(\mu) : \|u\|_{L^q(\mu)} = 1\}$ und betrachten die Abbildung

$$T_q : S^q(\mu) \to S^p(\mu),\ T_q(v) = \operatorname{sign}(v)|v|^{q-1}. \tag{8.31}$$

Sei $v \in S^q(\mu)$ gegeben. Für $p < \infty$ ist $(q-1)p = q$, und mit $u = T_q(v)$ folgt

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \Big(\int_X |T_q(v)|^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_X |v|^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{8.32}$$

Für $p = \infty$ ist $T_q(v) = \operatorname{sign}(v)$, also ebenfalls

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \|\operatorname{sign}(v)\|_{L^\infty(\mu)} = 1. \tag{8.33}$$

Aber nun liefert Testen mit $u = T_q(v)$

$$I_q v(u) = \int_X \operatorname{sign}(v)|v|^{q-1} v\,d\mu = \int_X |v|^q\,d\mu = 1 = \|u\|_{L^p(\mu)},$$

also $\|I_q v\| \geq 1 = \|v\|_{L^q(\mu)}$ und insgesamt $\|I_q v\| = \|v\|_{L^q(\mu)}$.

Fall 2: $p = 1$
Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ mit E_j μ-messbar, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $\mu(E_j) < \infty$. Sei $v \in L^\infty(\mu)$ mit $\|v\|_{L^\infty(\mu)} = 1$ gegeben. Wir betrachten für $\theta < 1$ die Mengen $E_{j,\theta} = \{x \in E_j : v(x) > \theta\}$, also $\{v > \theta\} = \bigcup_{j=1}^\infty E_{j,\theta}$. Es folgt

$$0 < \mu(\{v > \theta\}) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_{j,\theta}).$$

Berechne nun für $u = \chi_{E_{j,\theta}}$

$$I_\infty v(u) = \int_X \chi_{E_{j,\theta}} v \, d\mu = \int_{E_{j,\theta}} v \, d\mu \geq \theta \mu(E_{j,\theta}) = \theta \|u\|_{L^1(\mu)}.$$

Mit $\theta \nearrow 1$ sehen wir $\|I_\infty v\| \geq 1 = \|v\|_{L^\infty(\mu)}$, also $\|I_\infty v\| = \|v\|_{L^\infty(\mu)}$. $\square$

Satz 8.2 (L^p-L^q-Dualität) *Sei μ ein äußeres Maß auf X und $1 \leq p < \infty$. Im Fall $p = 1$ sei zusätzlich μ σ-endlich. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung*

$$I_q : L^q(\mu) \to L^p(\mu)', \, I_q v(u) = \int_X uv \, d\mu,$$

surjektiv, also eine Isometrie.

Zu jedem $\phi \in L^p(\mu)'$ gibt es also genau ein $v \in L^q(\mu)$ mit

$$\phi(u) = \int_X uv \, d\mu \quad \text{für alle } u \in L^p(\mu).$$

Beweis: Wir nehmen zuerst $1 < p < \infty$ an. Sei $\phi \in L^p(\mu)'$ gegeben, ohne Einschränkung $\|\phi\| = \sup_{u \in S^p(\mu)} \phi(u) = 1$.

Schritt 1. *Ist $u_0 \in S^p(\mu)$ mit $\phi(u_0) = 1$, so gilt $I_q(T_p(u_0)) = \phi$, also ist $v_0 = T_p(u_0)$ Lösung des Darstellungsproblems.*

Wir berechnen die notwendige Bedingung im Maximum u_0. Für $u \in L^p(\mu)$ beliebig und $|t| \leq 1$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_t |u + tu|^p = p \,\mathrm{sign}\,(u_0 + tu)|u_0 + tu|^{p-1} u, \quad \text{also } \left|\partial_t |u_0 + tu|^p\right| \leq p(|u_0| + |u|)^p \in L^1(\mu).$$

Also ergibt sich durch Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dt} \|u_0 + tu\|_{L^p(\mu)}|_{t=0} = \int_X \mathrm{sign}\,(u_0)|u_0|^{p-1} u \, d\mu = \int_X T_p(u_0) u = I(T_p(u_0))(u).$$

Aus der Maximaleigenschaft von u_0 folgt nun

$$0 = \frac{d}{dt} \phi\Big(\frac{u_0 + tu}{\|u_0 + tu\|_{L^p(\mu)}}\Big)|_{t=0} = \phi(u) - I(T_p(u_0))(u).$$

Damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2. *Es gibt ein $u_0 \in S^p(\mu)$ mit $\phi(u_0) = 1$.*

Wir zeigen, dass jede Maximalfolge eine Cauchyfolge ist; daraus folgt, dass es genau eine Maximalstelle gibt. Wir verwenden dazu folgenden Begriff:

Definition 8.1 *Ein normierter Vektorraum heißt gleichmäßig konvex, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass folgende Implikation gilt:*

$$\|u_1\| = \|u_2\| = 1,\ \Big\|\frac{u_1 + u_2}{2}\Big\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|u_1 - u_2\| < \varepsilon. \tag{8.34}$$

Wir zeigen unten, dass die L^p-Räume für $1 < p < \infty$ gleichmässig konvex sind, und wenden das hier an. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie in Definition 8.1 gewählt. Für die Maximalfolge u_k gilt

$$\Big\|\frac{u_k + u_l}{2}\Big\|_{L^p(\mu)} \geq \phi\Big(\frac{u_k + u_l}{2}\Big) = \frac{1}{2}\big(\phi(u_k) + \phi(u_l)\big) > 1 - \delta \quad \text{für } k, l \text{ hinreichend groß},$$

und damit $\|u_k - u_l\|_{L^p(\mu)} < \varepsilon$. Das zeigt Schritt 2, und damit den Satz für $p > 1$.

Schritt 3. *Für μ σ-endlich ist $I_\infty : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)'$ surjektiv.*

Sei $\phi \in L^1(\mu)'$. Für $E \subset X$ μ-messbar, $\mu(E) < \infty$ und $1 < p < \infty$ betrachte

$$\phi_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R},\ \phi_p(u) = \phi(\chi_E u).$$

Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt nach Hölder $\|\chi_E u\|_{L^1(\mu)} \leq \mu(E)^{1/q}\|u\|_{L^p(\mu)}$, also

$$\|\phi_p\| \leq \|\phi\|\,\mu(E)^{1/q}.$$

Wie bewiesen gibt es genau ein $v_p \in L^q(\mu)$ mit

$$I_q v_p(u) = \phi_p(u) = \phi(\chi_E u) \quad \text{für alle } u \in L^p(\mu).$$

Daraus folgt für alle $u \in L^p(\mu)$

$$I_q(\chi_{X\backslash E} v_p)(u) = I_q v_p(\chi_{X\backslash E} u) = \phi(\chi_E \chi_{X\backslash E} u) = 0.$$

Wegen I_q injektiv ist $v_p = 0$ μ-fast-überall auf $X\backslash E$. Sei nun $1 < p' < p$, also $q < q' < \infty$. Dann gilt $v_{p'} \in L^q(\mu)$ wegen $v_{p'} = 0$ auf $X\backslash E$ und $\mu(E) < \infty$. Wir berechnen für $u \in L^p(\mu)$, also $\chi_E u \in L^{p'}(\mu)$,

$$I_q v_{p'}(u) = \int_X \chi_E u v_{p'}\, d\mu = I_{q'} v_{p'}(\chi_E u) = \phi(\chi_E \chi_E u) = \phi(\chi_E u) = I_q v_p(u).$$

Aus I_q injektiv folgt $v_{p'} = v_p =: v$ fast überall, und nach Lemma 8.1

$$\|v\|_{L^{q'}(\mu)} = \|v_{p'}\|_{L^{q'}(\mu)} = \|\phi_{p'}\| \leq \|\phi\|\,\mu(E)^{\frac{1}{q'}} \to \|\phi\| \quad \text{mit } p' \searrow 1.$$

Dies zeigt $\|v\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\phi\|$. Setze nun für $u \in L^1(\mu)$ und $k \in \mathbb{N}$

$$u_k(x) = \begin{cases} k & \text{falls } u(x) \geq k, \\ -k & \text{falls } u(x) \leq -k, \\ u(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dannn ist $\chi_E u_k \in L^p(\mu)$ und und $\chi_E u_k \to \chi_E u$ in $L^1(\mu)$. Es folgt

$$\int_X uv\,d\mu = \int_X \chi_E uv\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \chi_E u_k v\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \phi(\chi_E u_k) = \phi(\chi_E u).$$

Schließlich sei $X = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ mit μ-messbaren E_k, $\mu(E_k) < \infty$ und $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Seien $v_k \in L^\infty(\mu)$ wie oben konstruiert, dann folgt für $u \in L^1(\mu)$ und $k < k'$

$$I_\infty(\chi_{E_k} v_{k'})(u) = \int_X \chi_{E_k} u v_{k'}\,d\mu = \phi(\chi_{E_{k'}}\chi_{E_k} u) = \phi(\chi_{E_k} u) = I_\infty v_k(u).$$

Wieder wegen Eindeutigkeit ist $v_{k'} = v_k$ auf E_k fast überall. Es gibt daher $v \in L^\infty(\mu)$ so dass $\chi_{E_k} v = v_k$ fast überall, genauer gilt $\|v\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\phi\|$. Dieses v hat die Darstellungseigenschaft, denn für alle $u \in L^1(\mu)$ folgt

$$I_\infty v(u) = \lim_{k\to\infty} Iv(\chi_{E_k} u) = \lim_{k\to\infty} I_\infty v_k(\chi_{E_k} u) = \lim_{k\to\infty} \phi(\chi_{E_k} u) = \phi(u).$$

$\square$

Wir zeigen nun

Satz 8.3 *Für $1 < p < \infty$ ist $L^p(\mu)$ gleichmäßig konvex.*

Beweis: Wir zeigen für alle $u, v \in L^p(\mu)$ folgende Ungleichungen, mit $\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\mu)}$ und einer Konstante $c = c(p) > 0$:

$$\frac{1}{2}(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p) - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p \geq c \begin{cases} \|u-v\|_p^p & \text{für } p \geq 2, \\ (\|u\|_p + \|v\|_p)^{p-2}\|u-v\|_p^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases} \tag{8.35}$$

Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes. Der Beweis von (8.35) beruht auf der Konvexität der Funktion $f(u) = |u|^p$, genauer behaupten wir für $|u| + |v| > 0$ mit $c = c(p) > 0$

$$\frac{1}{2}(|u|^p + |v|^p) - \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p \geq c \begin{cases} |u-v|^p & \text{für } p \geq 2, \\ (|u| + |v|)^{p-2}|u-v|^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases} \tag{8.36}$$

Im Fall $p \geq 2$ folgt (8.35) direkt aus (8.36), indem wir $u = u(x)$, $v = v(x)$ einsetzen und integrieren. Im Fall $1 < p < 2$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung, mit Exponenten $2/(2-p)$ bzw. $2/p$, und aus (8.36) mit $X^+ = \{x \in X : |u(x)| + |v(x)| > 0\}$

$$\begin{aligned} \|u-v\|_p^2 &= \Big(\int_{X^+} (|u|+|v|)^{\frac{p}{2}(2-p)}(|u|+|v|)^{\frac{p}{2}(p-2)}|u-v|^p\,d\mu\Big)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq \Big(\int_{X^+} (|u|+|v|)^p\,d\mu\Big)^{\frac{2-p}{p}} \Big(\int_{X^+} (|u|+|v|)^{p-2}|u-v|^2\,d\mu\Big) \\ &\leq C(p)\Big(\|u\|_p + \|v\|_p\Big)^{2-p} \int_X \Big(\frac{1}{2}(|u|^p + |v|^p) - \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p\Big)\,d\mu. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Minkowski-Ungleichung in $L^p(\mu)$ und (8.36) benutzt. Insgesamt bleibt nun (8.36) zu zeigen. Durch Vertauschen von u, v und Skalierung können wir dazu annehmen, dass $u = 1$ und $v \in [-1, 1]$. Betrachte also die Funktionen

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \frac{1}{2}(1 + |v|^p) - \Big(\frac{1+v}{2}\Big)^p, \\ \tau(v) &= \begin{cases} (1-v)^p & \text{für } p \geq 2, \\ (1+|v|)^{p-2}(1-v)^2 & \text{für } 1 < p < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir berechnen $\sigma'(v) = \frac{p}{2}\Big(\operatorname{sign}(v)|v|^{p-1} - \big(\frac{1+v}{2}\big)^{p-1}\Big) < 0$ für $v < 1$, also

$$\sigma(1) = \sigma'(1) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma''(1) = \frac{p(p-1)}{4} > 0.$$

Weiter ist $0 \leq \tau(v) \leq \max(2^p, 4)$ auf $[-1,1]$, und

$$\tau(1) = \tau'(1) = 0, \quad \tau''(1) = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 2, \\ 2^{p-1} & \text{für } 1 < p \leq 2, \end{cases}.$$

Wähle $\alpha = \alpha(p) > 0$ mit $\sigma''(1) - \alpha\tau''(1) > 0$. Nach Taylor gibt es dann ein $\delta = \delta(p) > 0$ mit

$$\sigma(v) - \alpha\tau(v) \geq 0 \quad \text{für } v \in [1-\delta, 1].$$

Weiter folgt für alle $v \in [-1, 1-\delta]$

$$\sigma(v) \geq \sigma(1-\delta) \geq \frac{\sigma(1-\delta)}{\max(2^p,4)}\tau(v).$$

Somit ist $\sigma(v) \geq c(p)\tau(v)$ auf ganz $[-1,1]$, also gilt (8.36), womit der Satz bewiesen ist. □

Optimale Versionen der obigen Ungleichung sind von J.A. Clarkson bewiesen worden (1936), aber diese werden hier nicht gebraucht.

9 Der Satz von Riesz-Radon*

Wir beginnen mit ein paar Grundlagen zu Borelmaßen und Radonmaßen. Einige der folgenden Überlegungen sind im Fall des Lebesguemaßes wohlbekannt. Im folgenden ist X stets ein lokalkompakter, separabeler metrischer Raum.

Definition 9.1 *Ein äußeres Maß μ auf X heißt Borelregulär, wenn gilt:*

(1) *Jede Borelmenge $B \subset X$ ist μ-messbar.*

(2) *Zu jedem $S \subset X$ gibt es eine Borelmenge $B \supset S$ mit $\mu(B) = \mu(S)$.*

Das Maß heißt Radonmaß, wenn zusätzlich $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten $K \subset X$.

Lemma 9.1 *Sei μ Borelreguläres Maß auf X und $E \subset X$. Das Maß $(\mu \llcorner E)(S) = \mu(S \cap E)$ ist ebenfalls Borelregulär, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(1) *E ist Borelmenge*

(2) *E ist σ-endlich, das heißt $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ für μ-messbare E_j mit $\mu(E_j) < \infty$.*

Beweis: Wir zeigen erst, dass jede Borelmenge B messbar ist bezüglich $\mu \llcorner E$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu \llcorner E)(S) &= \mu(E \cap S) \\ &= \mu\big((E \cap S) \cap B\big) + \mu\big((E \cap S) \backslash B\big) \\ &= \mu\big(E \cap (S \cap B)\big) + \mu\big(E \cap (S \backslash B)\big) \\ &= (\mu \llcorner E)(S \cap B) + (\mu \llcorner E)(S \backslash B). \end{aligned}$$

Eigenschaft (2) aus Definition 9.1 zeigen wir für $\mu\llcorner E$ in drei Fällen:

Fall 1: Sei E Borelmenge. Wähle zu $S \subset X$ eine Borelmenge $B_1 \supset E \cap S$ mit $\mu(B_1) = \mu(E \cap S)$. Dann ist $B = B_1 \cup (X \backslash E)$ Borel mit $B \supset S$ und es gilt

$$(\mu\llcorner E)(B) = \mu(E \cap B_1) \leq \mu(B_1) = (\mu\llcorner E)(S).$$

Fall 2: Sei E μ-messbar mit $\mu(E) < \infty$. Wähle $B \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$. Wir zeigen $\mu\llcorner E = \mu\llcorner B$, die Behauptung folgt dann aus Fall 1. Für $S \subset X$ gilt

$$(\mu\llcorner B)(S) = \mu(B \cap S) \leq \mu(E \cap S) + \mu(B \backslash E) = \mu(E \cap S) + \mu(B) - \mu(E) = (\mu\llcorner E)(S).$$

Fall 3: Sei $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit E_j μ-messbar und $\mu(E_j) < \infty$. Wir können $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ annehmen. Wie gezeigt gibt es zu $S \subset X$ Borelmengen $B_j \supset S$ mit $\mu\llcorner E_j(B_j) = \mu\llcorner E_j(S)$. Dann ist $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ Borel mit $B \supset S$, und es gilt

$$\mu\llcorner E(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j \cap B) \leq \limsup_{j\to\infty} \mu(E_j \cap B_j) \leq \limsup_{j\to\infty} \mu(E_j \cap S) \leq (\mu\llcorner E)(S).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Satz 9.1 (Caratheodory-Kriterium) *Sei μ äußeres Maß auf dem metrischen Raum (X, d) mit folgender Eigenschaft:*

$$A, B \subset X,\ \mathrm{dist}\,(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Dann sind alle Borelmengen μ-messbar.

Beweis: Wir zeigen dass jede abgeschlossene Menge $C \subset X$ messbar ist, dass also gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap C) + \mu(S \backslash C) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Natürlich können wir dazu $\mu(S) < \infty$ annehmen. Setze $C_k = \{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathrm{dist}\,(S \cap C, S \backslash C_k) \geq \frac{1}{k} > 0$ gilt nach Voraussetzung

$$\mu(S \cap C) + \mu(S \backslash C_k) = \mu\big((S \cap C) \cup (S \backslash C_k)\big) \leq \mu(S).$$

Es reicht also aus zu zeigen

$$\mu(S \backslash C) = \lim_{k\to\infty} \mu(S \backslash C_k). \tag{9.37}$$

Die Folge $S \backslash C_k$ ist aufsteigend mit $S \backslash C = \bigcup_{k=1}^{\infty} S \backslash C_k$. Allerdings folgt (9.37) daraus nicht direkt, denn die Mengen sind eventuell nicht messbar. Betrachte

$$S_k = \Big\{x \in S : \frac{1}{k+1} < \mathrm{dist}\,(x, C) \leq \frac{1}{k}\Big\}.$$

Da C abgeschlossen, gilt für $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung $S \backslash C = S \backslash C_k \cup \bigcup_{j=k}^{\infty} S_j$, und es folgt

$$\mu(S \backslash C) \leq \mu(S \backslash C_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu(S_j).$$

Also reicht es zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$ konvergiert. Aber es gilt

$$\operatorname{dist}(S_i, S_j) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} > 0 \quad \text{für } j \geq i+2.$$

Durch Induktion erhalten wir aus der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mu(S_{2i}) &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} S_{2i}\Big) \leq \mu(S) < \infty, \\
\sum_{i=1}^{N} \mu(S_{2i-1}) &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} S_{2i-1}\Big) \leq \mu(S) < \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz gezeigt. $\square$

Die folgende Approximationseigenschaft ist für $\mu = \mathcal{L}^n$ wohlbekannt.

Satz 9.2 (Approximationssatz) *Sei μ ein Borelreguläres Maß auf (X,d). Es gebe eine Ausschöpfung $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen und $\mu(X_j) < \infty$. Dann gilt:*

(1) $\mu(A) = \inf_{A \subset U \text{ offen}} \mu(U)$ *für alle $A \subset X$.*

(2) $\mu(A) = \inf_{C \subset A \text{ abgeschlossen}} \mu(C)$ *für alle messbaren $A \subset X$.*

Beweis: Wir zeigen (1) erst im Fall $\mu(X) < \infty$, und zwar behaupten wir

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ Borel, (1) gilt}\} \text{ ist die Borelalgebra.}$$

Mit Definition 9.1(2) folgt daraus (1) für alle Mengen A. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen ist. Seien $A_j \in \mathcal{A}$. Dann gibt es $U_j \supset A_j$ offen mit

$$\mu(U_j \backslash A_j) = \mu(U_j) - \mu(A_j) < 2^{-j}\varepsilon.$$

Links wurde A_j messbar verwendet. Es folgt

$$\mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\big) - \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \backslash \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \backslash A_j\big) < \varepsilon.$$

Nun gilt $\lim_{k\to\infty} \mu\big(\bigcap_{j=1}^{k} U_j\big) = \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\big)$, wobei $\mu(X) < \infty$ benutzt wird. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\big(\bigcap_{j=1}^{k} U_j\big) < \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) + \varepsilon.$$

Das beweist $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Weiter folgt

$$\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\big) - \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \geq \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\big) - \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \backslash A_j\big) \geq \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\big) - \varepsilon.$$

Also ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Es ist nicht direkt klar, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der Bildung von Komplementmengen ist. Wir können uns aber mit einem Trick behelfen: das System $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : X \backslash A \in \mathcal{A}\}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung, und auch abgeschlossen unter abzählbaren Vereingungen wegen $X \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} X \backslash A_j$. Ferner enthält $\mathcal{A}'$ die offenen Mengen, denn für $C \subset X$ abgeschlossen gilt

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) > \frac{1}{j}\} \in \mathcal{A}.$$

Somit ist $\mathcal{A}'$, und damit auch $\mathcal{A}$, die Borelalgebra. Im Fall $\mu(X) < \infty$ ist (1) bewiesen.

Sei nun $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen und $\mu(X_j) < \infty$. Nach Lemma 9.1 ist dann $\mu \llcorner X_j$ Borelregulär. Wie bewiesen gibt es zu $\varepsilon > 0$ demnach $U_j \supset A$ offen mit

$$(\mu \llcorner X_j)(U_j) \leq (\mu \llcorner X_j)(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Wir können wieder A Borel annehmen, insbesondere ist A messbar bezüglich $\mu \llcorner X_j$ und

$$(\mu \llcorner X_j)(U_j \backslash A) = (\mu \llcorner X_j)(U_j) - (\mu \llcorner X_j)(A) \leq 2^{-j}\varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j)\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j) \cap A\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j) \backslash A\Big) \\ &= \mu(A) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \cap (U_j \backslash A)\Big) \\ &\leq \mu(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung (1) allgemein bewiesen.

Wir kommen nun zu (2), erst im Fall $\mu(X) < \infty$. Nach (1) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $U \supset X \backslash A$ offen mit $\mu(U) < \mu(X \backslash A) + \varepsilon$. Dann ist $C = X \backslash U \subset A$ abgeschlossen, und es folgt

$$\mu(C) = \mu(X \backslash U) = \mu(X) - \mu(U) > \mu(X) - \mu(X \backslash A) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon.$$

Im letzten Schritt wurde die Messbarkeit von A benutzt. Ist nur $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen, $\mu(X_j) < \infty$, so gibt es $C_j \subset A$ abgeschlossen mit $\mu \llcorner X_j(C_j) \geq \mu \llcorner X_j(A) - \varepsilon$. Wir können $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ annehmen. Es folgt

$$\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(X_j \cap A) \leq \lim_{j \to \infty} \mu(C_j) + \varepsilon.$$

Also gilt (2) auch in diesem Fall. $\square$

Ab jetzt setzen wir voraus, dass Abstandskugeln in (X, d) relativ kompakt sind:

(9.38) *Für alle $x \in X$, $\varrho > 0$ ist $\overline{B_\varrho(x)} = \{y \in X : d(x, y) \leq \varrho\}$ kompakt.*

Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist das natürlich erfüllt, ebenso in abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es gilt folgende Version von Satz 9.2.

Folgerung 9.1 *Sei X metrischer Raum mit (9.38). Dann gilt für ein Radonmaß μ auf X*

(1) $\mu(A) = \inf_{A \subset U \text{ offen}} \mu(U)$ *für alle $A \subset X$.*

(2) $\mu(A) = \sup_{K \subset A \text{ kompakt}} \mu(K)$ *für alle* $A \subset X$ *messbar.*

Beweis: Da μ Radonmaß, gilt $\mu(\overline{B_\varrho(x)}) < \infty$. Wegen $X = \bigcup_{j=1}^\infty B_j(0)$ folgt Aussage (1) aus Satz 9.2. Für $C \subset X$ abgeschlossen ist $C \cap \overline{B_j(0)}$ kompakt und $\lim_{j\to\infty} \mu(C \cap \overline{B_j(0)}) = \mu(C)$. Aussage (2) folgt wieder mit Satz 9.2. □

Satz 9.3 (Riesz-Radon) *Sei $\phi : C^0(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional auf einem kompakten metrischen Raum (X, d). Dann gilt:*

(1) *Auf X ist ein Radonmass μ, das Variationsmaß von ϕ, wie folgt definiert:*

- $\mu(U) = \sup\{\phi(f) : |f| \leq 1, \operatorname{spt} f \subset U\}$ *für U offen,*
- $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ offen}\}$ *für E beliebig.*

(2) *Es gibt $\eta : X \to \mathbb{R}^k$ μ-messbar mit $|\eta(x)| = 1$ für μ-fast-alle $x \in X$, so dass*

$$\phi(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X, \mathbb{R}^k). \tag{9.39}$$

(3) *Das Maß μ und die Funktion η mit $|\eta| = 1$ sind durch (9.39) eindeutig bestimmt.*

Im Fall reellwertiger Funktionen ist $\eta : X \to \{\pm 1\}$, dann ist $\lambda = \mu \llcorner \eta$ ein signiertes Radonmass. Der Beweis des Satzes erfordert einige Vorbereitungen aus der Maßtheorie und ist relativ lang, siehe mein FA-Skript aus dem Jahr 2014. Es gibt eine offensichtliche Verallgemeinerung auf σ-kompakte metrische Räume, man muss dann mit Funktionen $f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$ arbeiten.

Beweis:

Schritt 1: *$|\phi|$ ist ein äußeres Maß.*

Für $U = \emptyset$ ist nur die Nullfunktion in Definition **??**(1) zulässig, also ist $|\phi|(\emptyset) = 0$. Seien U_j, $j \in \mathbb{N}$, offen und $f \in C^0_c(X)$ mit $|f| \leq 1$ und $\operatorname{spt} f \subset \bigcup_{j=1}^\infty U_j$. Nach Heine-Borel gilt

$$\operatorname{spt} f \subset \bigcup_{j=1}^N U_j \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}.$$

Wähle eine untergeordnete Teilung der Eins $\chi_j \in C^0_c(X)$:

$$\operatorname{spt} \chi_j \subset U_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \chi_j = 1 \text{ auf } \operatorname{spt} f.$$

Für $f_j = \chi_j f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$ ist $\operatorname{spt} f_j \subset U_j$, sowie $|f_j| \leq 1$ und $f = \sum_{j=1}^N f_j$. Also folgt

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^N \phi(f_j) \leq \sum_{j=1}^N |\phi|(U_j) \leq \sum_{j=1}^\infty |\phi|(U_j).$$

Bilden wir das Supremum über alle solche Funktionen f, so folgt

$$|\phi|(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(U_j).$$

Sei nun $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit E, E_j beliebig. Wähle zu $\varepsilon > 0$ offene $U_j \supset E_j$ mit $|\phi|(U_j) < |\phi|(E_j) + 2^{-j}\varepsilon$; dies geht nach Definition **??**. Es folgt $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ und weiter

$$|\phi|(E) \le |\phi|(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(U_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(E_j) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Subadditivität von $|\phi|$.

Schritt 2: *Borelmengen sind $|\phi|$-messbar.*
Das zeigen wir mit Caratheodory. Seien $A, B \subset X$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Zu zeigen ist

$$|\phi|(W) \ge |\phi|(A) + |\phi|(B) \quad \text{für alle offenen } W \supset (A \cup B).$$

Für $\delta > 0$ hinreichend klein sind $U = B_\delta(A) \cap W$ und $V = B_\delta(B) \cap W$ disjunkt. Seien $f, g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{spt} f \subset U$, $\operatorname{spt} g \subset V$ und $|f|, |g| \le 1$, so gilt $\operatorname{spt}(f+g) \subset (\operatorname{spt} f \cup \operatorname{spt} g) \subset W$ und $|f+g| \le 1$ auf ganz X. Es folgt

$$\phi(f) + \phi(g) = \phi(f+g) \le |\phi|(W).$$

Durch Bilden des Supremums über alle f, g ergibt sich

$$|\phi|(A) + |\phi|(B) \le |\phi|(U) + |\phi|(V) \le |\phi|(W).$$

Schritt 3: *Konstruktion der Borelhülle und Endlichkeit auf kompakten Mengen.*
Für $E \subset X$ mit $|\phi|(E) < \infty$ wähle offene $U_j \supset E$ mit $|\phi|(U_j) \le |\phi|(E) + \frac{1}{j}$, ohne Einschränkung sei $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$. Dann ist $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \supset E$ Borelmenge mit

$$|\phi|(B) \le \lim_{j\to\infty} |\phi|(U_j) = |\phi|(E).$$

Somit ist $|\phi|$ Borelregulär. Ist schließlich K kompakt, so gibt es nach Voraussetzung $U \supset K$ offen mit $\overline{U}$ kompakt, also nach Voraussetzung (9.38)

$$|\phi|(K) \le |\phi|(U) \le C(\overline{U}) < \infty.$$

$\square$

Ergänzung. Wir wollen noch die Teilung der Eins konstruieren. Sei $K \subset X$ kompakt, $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ mit U_λ offen. Zu $x \in K$ bestimme $r(x) > 0$ und $\lambda(x) \in \Lambda$ mit

$$\overline{B_{2r(x)}(x)} \subset U_{\lambda(x)}.$$

Nach Heine-Borel ist $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{r_j}(x_j)$ mit $r_j = r(x_j)$. Wähle $\tilde{\chi}_j \in C_c^0(X)$ nichtnegativ mit

$$\tilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r_j}(x_j) \\ 0 & \text{auf } X \backslash B_{2r_j}(x_j). \end{cases}$$

Setze $\chi = \sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j$. Dann gilt $\chi \geq 1$ auf K, also $\chi > \frac{1}{2}$ auf einer offenen Umgebung U von K. Wähle $\eta \in C^0_c(X)$ mit spt $\eta \subset U$ und $\eta|_K = 1$, und setze schließlich

$$\chi_j = \eta\tilde{\chi}_j/\chi \in C^0_c(X).$$

Nach Konstruktion ist dann spt $\chi_j \subset \overline{B_{2r_j}(x_j)} \subset U_{\lambda(x_j)}$, und $\sum_{j=1}^N \chi_j = 1$ auf K.

Unser Ziel ist folgendes Darstellungsresultat.
Wir brauchen zum Beweis folgendes Approximationsresultat.

Satz 9.4 (Lusin) *Sei μ ein Radonmaß auf (X,d), und $A \subset X$ mit $\mu(A) < \infty$. Ist $g : X \to \mathbb{R}$ messbar, so gibt es ein $\tilde{g} \in C^0(X)$ mit*

$$\mu(\{x \in A : \tilde{g}(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \|\tilde{g}\|_{C^0(X)} \leq \sup_{x \in A} |g(x)|.$$

Wir werden das später beweisen, und nun den Darstellungssatz angehen.

Beweis: *(Eindeutigkeit)* Sei λ, ζ auch mit mit der Darstellungseigenschaft, das heißt

$$\phi(f) = \int_X \langle f, \zeta\rangle \, d\lambda \quad \text{für alle } f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k).$$

Ist spt $f \subset U$ und $|f| \leq 1$, so folgt $\phi(f) \leq \lambda(U)$ und hieraus $\mu(U) = |\phi|(U) \leq \lambda(U)$. Mit Folgerung 9.1(1) haben wir $\mu \leq \lambda$. Sei andererseits $K \subset X$ kompakt. Zu $U \supset K$ offen mit $\overline{U}$ kompakt und zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lusin ein $\tilde{\zeta} \in C^0(X, \mathbb{R}^k)$, so dass gilt:

$$\lambda(E) < \varepsilon \text{ mit } E = \{x \in U : \tilde{\zeta}(x) \neq \zeta(x)\} \quad \text{und} \quad \|\tilde{\zeta}\|_{C^0(X)} \leq \sup_{x \in U} |\zeta| \leq 1.$$

Satz 9.4 liefert $|\tilde{\zeta}_i| \leq 1$ für jede Komponente, man kann $\tilde{\zeta}$ dann noch auf die Einheitskugel projizieren. Wähle $\chi \in C^0_c(X)$, $0 \leq \chi \leq 1$, mit spt $\chi \subset U$ und $\chi \equiv 1$ auf K. Schätze dann ab

$$\begin{aligned}
\mu(U) &\geq \phi(\chi\tilde{\zeta}) \quad \text{(Definition von } \mu(U) = |\phi|(U)) \\
&= \int_U \langle \chi\tilde{\zeta}, \zeta\rangle \, d\lambda \\
&= \int_U \chi \, d\lambda - \int_U \chi(\langle \tilde{\zeta}, \zeta\rangle - 1) \, d\lambda \\
&\geq \lambda(K) - 2\lambda(E) \\
&\geq \lambda(K) - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ und $U \searrow K$ folgt $\mu(K) \geq \lambda(K)$, somit $\mu = \lambda$ auf Borelmengen nach Folgerung 9.1(2). Zu $E \subset X$ gibt es $B, B' \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$ und $\lambda(B') = \lambda(E)$. Wir können $B = B'$ annehmen, sonst gehe über zu $B \cap B'$. Es folgt $\mu(E) = \lambda(E)$ allgemein.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^k$ fest. Für alle $f \in C^0_c(X)$ ist dann $fv \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$, also gilt

$$\int_X \langle fv, \eta\rangle \, d\mu = \int_X \langle fv, \zeta\rangle \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0_c(X).$$

$C^0_c(X)$ ist dicht in $L^1(\mu)$[14], und beide Seiten sind stetig unter $L^1(\mu)$-Konvergenz. Es folgt

$$\int_X f\langle v,\eta\rangle\,d\mu = \int_X f\langle v,\zeta\rangle\,d\mu \quad \text{für alle } f\in L^1(\mu).$$

Die Funktionen $\langle v,\eta\rangle$, $\langle v,\zeta\rangle \in L^\infty(\mu)$ stellen also dasselbe lineare Funktional in $L^1(\mu)'$ dar, und sind damit μ-fast-überall gleich nach Lemma 8.1. μ muss dabei σ-endlich sein, das ist erfüllt wegen (9.38). Indem wir für v die Standardvektoren des $\mathbb{R}^k$ wählen, folgt $\zeta = \eta$ μ-fast-überall auf X. $\square$

Beweis: *Existenz:* Wir wählen $\mu = |\phi|$, das Variationsmaß. Für $v\in\mathbb{R}^k$, $|v|=1$, sei

$$\phi_v : C^0_c(X)\to\mathbb{R},\ \phi_v(f) = \phi(fv).$$

Wir wollen zeigen, dass ϕ_v als stetiges lineares Funktional auf $L^1(\mu)$ fortgesetzt werden kann. Dann erhalten wir die Komponente von η bezüglich v aus der Dualität $L^1(\mu)' = L^\infty(\mu)$. Um ϕ_v abzuschätzen, betrachten wir das Funktional

$$\varphi : C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0)\to\mathbb{R}^+_0,\ \varphi(f) = \sup\{\phi(g) : g\in C^0_c(X,\mathbb{R}^k),\ |g|\le f\}.$$

Nach Definition von $\mu = |\phi|$ des Variationsmaßes gilt

$$\varphi(f) \le \mu(\operatorname{spt} f)\|f\|_{C^0(X)}. \tag{9.40}$$

Da $g = \pm fv$ in (9) zulässig ist, gilt

$$|\phi_v(f)| \le \varphi(f) \quad \text{für alle } f\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0). \tag{9.41}$$

Es gilt

$$\mu(U) = \sup\{\varphi(\chi) : \chi\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0),\ \operatorname{spt}\chi\subset U,\ \chi\le 1\}. \tag{9.42}$$

Denn ist $g\in C^0_c(X,\mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{spt} g\subset U$ und $|g|\le 1$, so folgt

$$\phi(g) \le \varphi(|g|) \le \sup\{\varphi(\chi) : \chi\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0),\ \operatorname{spt}\chi\subset U,\ \chi\le 1\}.$$

Ist andererseits $\chi\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0)$ gegeben mit $\chi\le 1$, so folgt

$$\varphi(\chi) = \sup\{\phi(g) : g\in C^0_c(X,\mathbb{R}^k),\ |g|\le\chi\} \le \mu(U).$$

Behauptung 1: φ ist halblineares Funktional auf $C^0_c(X)$, das heißt

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f) &= \alpha\varphi(f) \quad \text{für } f\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0),\ \alpha\ge 0,\\ \varphi(f_1+f_2) &= \varphi(f_1)+\varphi(f_2) \quad \text{für } f_{1,2}\in C^0_c(X,\mathbb{R}^+_0).\end{aligned}$$

Beweis: Die erste Zeile gilt nach Definition. Für die zweite wähle $g_{1,2}\in C^0_c(X,\mathbb{R}^k)$ mit $|g_i|\le f_i$ und $\phi(g_i)\ge\varphi(f_i)-\varepsilon$. Es folgt, bei geigneter Wahl des Vorzeichens,

$$\varphi(f_1)+\varphi(f_2)-2\varepsilon \le |\phi(g_1)|+|\phi(g_2)| = |\phi(g_1\pm g_2)| \le \varphi(f_1+f_2).$$

[14] Aufgabe 1, Serie 9

Für die umgekehrte Ungleichung sei $g \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$ mit $|g| \leq f_1 + f_2$. Betrachte dann

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i}{f_1+f_2} g & \text{falls } f_1 + f_2 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $|g_i| \leq f_i$, insbesondere $g_i \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$. Wegen $g = g_1 + g_2$ folgt

$$|\phi(g)| \leq |\phi(g_1)| + |\phi(g_2)| \leq \varphi(f_1) + \varphi(f_2),$$

und hieraus $\varphi(f_1 + f_2) \leq \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$.

Behauptung 2: Es gilt $\varphi(f) = \int_X f \, d\mu$ für alle $f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^+_0)$.
BEWEIS: Wähle zu $\varepsilon > 0$ Zwischenwerte $0 = t_0 < \ldots < t_N < \infty$ mit

$$|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon, \quad t_N > \max f \quad \text{und} \quad \mu(f^{-1}\{t_i\}) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, N.$$

Dies ist möglich, denn die Menge der $t > 0$ mit $\mu(f^{-1}\{t\}) > 0$ ist abzählbar wegen $\mu(\text{spt } f) < \infty$. Wir setzen $U_i = f^{-1}(t_{i-1}, t_i)$ für $i = 1, \ldots, N$; diese Mengen sind offen.

Abschätzung von $\varphi(f)$ nach unten:
Seien $\chi_i \in C^0_c(X, \mathbb{R}^+_0)$ mit spt $\chi_i \subset U_i$, $\chi_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, N$. Dann gilt $\sum_{i=1}^N t_{i-1}\chi_i \leq f$. Nach Definition ist φ monoton, also haben wir

$$\sum_{i=1}^N t_{i-1}\varphi(\chi_i) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^N t_{i-1}\chi_i\Big) \leq \varphi(f).$$

Bilde das Supremum über die χ_i. Mit (9.42) folgt $\sum_{i=1}^N t_{i-1}\mu(U_i) \leq \varphi(f)$, und weiter

$$\int_X f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^N t_i \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^N (t_{i-1} + \varepsilon)\mu(U_i) \leq \varphi(f) + \varepsilon\mu(\text{spt } f).$$

Abschätzung von $\varphi(f)$ nach oben:
Für $i = 1, \ldots, N$ wähle $V_i \supset \overline{U}_i \cup f^{-1}(\{t_i\})$ offen mit $\mu(V_i) \leq \mu(\overline{U}_i) + \frac{\varepsilon}{N}$. Es gibt $\chi_i \in C^0_c(V_i)$ mit spt $\chi_i \subset V_i$, $0 \leq \chi_i \leq 1$ und $\chi_i \equiv 1$ auf $\overline{U}_i \cup f^{-1}(\{t_i\})$. Es folgt $f \leq \sum_{i=1}^N t_i\chi_i$ und hieraus

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &\leq \sum_{i=1}^N t_i\varphi(\chi_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^N (t_{i-1} + \varepsilon)\mu(V_i) \quad \text{(nach (9.42))} \\
&\leq \sum_{i=2}^N (t_{i-1} + \varepsilon)\big(\mu(U_i) + \frac{\varepsilon}{N}\big) + \varepsilon\big(\mu(\overline{U}_1) + \frac{\varepsilon}{N}\big) \\
&\leq \int f \, d\mu + \varepsilon\mu(\text{spt } f) + \varepsilon\|f\|_{C^0(X)} + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ in beiden Abschätzungen folgt Behauptung 2.

Beweis des Satzes: Für $f \in C^0_c(X)$ haben wir $\phi_v(f) = \phi_v(f^+) - \phi_v(f^-)$, also

$$|\phi_v(f)| \leq |\phi_v(f^+)| - |\phi_v(f^-)| \leq \varphi(f^+) + \varphi(f^-) = \int_X f \, d\mu.$$

Da $C^0_c(X)$ dicht in $L^1(\mu)$[15] hat ϕ_v eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung als lineares Funktional auf $L^1(\mu)$. Nach Satz 8.2 gibt es eine Funktion $\eta_v \in L^\infty(\mu)$ mit

$$\phi_v(f) = \int_X f\eta_v \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mu).$$

Wähle für v die Standardvektoren $e_i \in \mathbb{R}^k$ und setze

$$\eta : X \to \mathbb{R}^k,\ \eta = \sum_{i=1}^k \eta_{e_i} e_i.$$

Dann folgt für $g \in C^0_c(X, \mathbb{R}^k)$

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^k \phi_{e_i}(g_i) = \sum_{i=1}^k \int_X g_i \eta_{e_i} \, d\mu = \int_X \langle g, \eta \rangle \, d\mu.$$

Wir zeigen noch $|\eta| = 1$ μ-fast-überall: betrachte $\tilde{\mu} = \mu \llcorner |\eta|$ und

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x)/|\eta(x)| & \text{falls } \eta(x) \neq 0, \\ 0 & \text{falls } \eta(x) = 0. \end{cases}$$

Es folgt $|\tilde{\eta}(x)| = 1$ für $\tilde{\mu}$-fast-alle $x \in X$, und

$$\phi(g) = \int_X \langle g, \eta \rangle \, d\mu = \int_X \langle g, \tilde{\eta} \rangle \, |\eta| \, d\mu = \int_X \langle g, \tilde{\eta} \rangle \, d\tilde{\mu}.$$

Das Paar $\tilde{\mu}, \tilde{\eta}$ hat also die gewünschte Darstellungseigenschaft, womit die Existenz bewiesen ist. $\square$

Jetzt tragen wir den Beweis des Satzes von Lusin nach. Dazu verwenden wir das

Lemma 9.2 (von Tietze) *Sei (X, d) metrischer Raum. Ist $C \subset X$ abgeschlossen und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^0(X)$ mit $\|\tilde{f}\|_{C^0(X)} = \sup_{x \in C} |f(x)|$.*

Beweis: OBdA $1 \leq f \leq 2$, sonst betrachte $2 + \frac{2}{\pi} \arctan f$. Definiere die Fortsetzung durch

$$\tilde{f}(x) = \inf_{y \in C} f(y) \frac{d(x,y)}{d(x,C)} \quad \text{falls } x \in X \backslash C, \text{ bzw. äquivalent } d(x,C) > 0.$$

Dann ist $\inf f \leq \tilde{f} \leq \sup f$: die untere Abschätzung folgt aus $d(x,y)/d(x,C) \leq 1$, die obere Abschätzung ergibt sich durch Wahl von $y \in C$ mit $d(x,y) < (1+\varepsilon) d(x,C)$. Wir zeigen die Stetigkeit erst im Fall $x_0 \in \partial C$. Sei $x \in B_\delta(x_0) \backslash C$ und $y \in C$ mit $d(x,y) < (1+\alpha) d(x,C)$; dabei sei $\alpha \in (0,1]$. Dann gilt

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x,y) < d(x_0,x) + (1+\alpha) d(x,C) < (2+\alpha) d(x_0,x) \leq 3\delta.$$

Mit $\varepsilon(\delta) = \sup_{|y - x_0| \leq \delta} |f(y) - f(x_0)|$ folgt die Abschätzung

$$f(x_0) - \varepsilon(3\delta) \leq f(y) \frac{d(x,y)}{d(x,C)} \leq (1+\alpha) f(x_0) + 2\varepsilon(3\delta).$$

[15] Aufgabe 1, Serie 9

Für $d(x,y) \geq 2d(x,C)$ haben wir die triviale Abschätzung

$$f(y)\frac{d(x,y)}{d(x,C)} \geq 2\inf f \geq f(x_0).$$

Mit $\alpha = 1$ ergibt sich insgesamt die untere Abschätzung

$$\tilde{f}(x) \geq f(x_0) - \varepsilon(3\delta) \to f(x_0) \quad \text{mit } \delta \searrow 0.$$

Andererseits gibt es zu jedem $\alpha > 0$ Punkte $y \in C$ mit $d(x,y) < (1+\alpha)d(x,C)$, und mit $\alpha \searrow 0$ folgt die obere Abschätzung

$$\tilde{f}(x) \leq f(x_0) + 2\varepsilon(3\delta) \to f(x_0) \quad \text{mit } \delta \searrow 0.$$

Auf $X \backslash C$ folgt die Stetigkeit leicht mit der Dreiecksungleichung: Wegen $1 \leq f \leq 2$ gilt

$$\inf_{y \in C} f(y)d(x_1,y) \leq \inf_{y \in C} f(y)d(x_2,y) + 2d(x_1,x_2).$$

Also ist $\inf_{y \in C} f(y)d(x,y)$ (Lipschitz-)stetig auf $X \backslash C$. Dasselbe gilt für $d(x,C)$, somit ist $\tilde{f}$ als Quotient von stetigen Funktionen stetig auf $X \backslash C$. □

Beweis: (*von Satz 9.4*) Betrachte die Mengen

$$A_{j,k} = \{x \in A : \frac{k}{j} \leq f(x) < \frac{k+1}{j}\} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Da $\mu \llcorner A$ Radonmaß, gibt es zu $\varepsilon > 0$ kompakte Mengen $K_{j,k} \subset A_{j,k}$ mit $\mu(A_{j,k} \backslash K_{j,k}) < 2^{-j-|k|}\varepsilon/3$. Es folgt

$$\lim_{N \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{k=-N}^{N} K_{j,k}\Big) = \mu\Big(A \backslash \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} K_{j,k}\Big) < \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j-|k|}\varepsilon/3 = 2^{-j}\varepsilon.$$

Für hinreichend großes $N_j \in \mathbb{N}$ gilt dann mit $K_j = \bigcup_{k=-N_j}^{N_j} K_{j,k}$ auch $\mu(K_j) < 2^{-j}\varepsilon$. Für $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ folgt

$$\mu(A \backslash K) \leq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \backslash K_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \backslash K_j) < \varepsilon.$$

Betrachte nun die Funktionen $f_j : A \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = \frac{j}{k}$ für $x \in A_{j,k}$. Aus Kompaktheitsgründen haben die $K_{j,k} \subset A_{j,k}$ positiven Abstand, somit ist f_j lokal konstant (insbesondere stetig) auf $K_j \supset K$. Aber $|f(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{j} \to 0$ mit $j \to \infty$. Als gleichmäßiger Grenzwert ist damit $f|_K$ stetig. Mit der Fortsetzung nach Lemma 9.2 folgt nun die Behauptung. □

10 Schwache Konvergenz

Betrachte eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Folgenraum $\ell^p(\mathbb{R})$ mit $\|x_k\|_p \leq 1$ für alle k. Wie schon festgestellt, existiert im allgemeinen keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ konvergiert. Das bekannte Beispiel ist die Koordinatenfolge $(x_k)^i = \delta_{ik}$, mit $\|x_k - x_l\|_p = 2^{1/p}$ für $k \neq l$. Andererseits ist für $i \in \mathbb{N}$ fest die Folge $(x_k)^i_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt, genauer ist $|(x_k)^i| \leq \|x_k\|_p \leq 1$.

Mit einem Diagonalverfahren finden wir dann eine Teilfolge, so dass nach Umnummerierung gilt: $x^i := \lim_{k\to\infty}(x_k)^i$ existiert für alle $i \in \mathbb{N}$. Es folgt dann

$$\Big(\sum_{i=1}^N |x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^N |(x_k)^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_p.$$

Mit $x = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt also $\|x\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_p \leq 1$, insbesondere ist $x \in \ell^p(\mathbb{R})$. Obwohl die Folge in $\ell^p(\mathbb{R})$ im allgemeinen nicht konvergiert, erhalten wir einen geeigneten Grenzwert mittels koordinatenweise Konvergenz. Das Konzept des schwachen Grenzwerts verallgemeinert diese Situation.

Definition 10.1 (schwache Grenzwerte) *Sei X ein Banachraum.*

(1) *Die Folge $x_k \in X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ ($x_k \rightharpoonup x$), falls :*

$$\phi(x_k) \to \phi(x) \text{ für alle } \phi \in X'.$$

(2) *Die Folge $\phi_k \in X'$ konvergiert schwach∗ gegen $\phi \in X'$ ($\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$), falls gilt:*

$$\phi_k(x) \to \phi(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Die schwach∗ Konvergenz ist genau punktweise Konvergenz der $\phi_k : X \to \mathbb{R}$.

Beispiel 10.1 In einem Hilbertraum X gilt nach Satz 5.1

$$x_k \to x \text{ schwach} \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in X.$$

Beispiel 10.2 Sei $1 < p \leq \infty$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$g_k \to g \text{ schwach in } L^q(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f g_k \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^p(\mu). \tag{10.43}$$

Dies folgt aus der L^p-L^q-Dualität, Satz 8.2, wobei μ σ-endlich im Fall $p = \infty$.

Beispiel 10.3 Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f_k, f \in L^p(\mu)$ sagen wir

$$f_k \to f \text{ schwach}* \text{ in } L^q(\mu)' \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f_k g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu). \tag{10.44}$$

Für die schwach∗ Konvergenz brauchen wir hier nur, dass Funktionen in $L^p(\mu)$ als Funktionale in $L^q(\mu)'$ aufgefasst werden könen, dies gilt nach Lemma 8.1. Im Fall $p = \infty$ muss μ zusätzlich σ-endlich sein. Für $1 \leq p < \infty$ stimmen schwache Konvergenz und schwach∗ Konvergenz überein, die Testfunktionen sind jeweils in $L^q(\mu)$.

Beispiel 10.4 Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Nach Definition ist

$$\phi_k \to \phi \text{ schwach}* \text{ in } C^0(X)' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_k(f) \to \phi(f) \text{ für alle } f \in C^0(X).$$

Sind μ_k, μ Radonmaße auf X, so können sie als (nichtnegative) lineare Funktionale auf $C^0(X)$ aufgefasst werden. Damit ergibt sich folgender Konvergenzbegriff:

$$\mu_k \to \mu \text{ schwach} \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f \, d\mu_k \to \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X). \tag{10.45}$$

Eigentlich müsste es *schwach∗* heißen; man spricht auch von Konvergenz im Sinne von Radonmaßen. Die folgende Charakterisierung ist jedenfalls nützlich.

Satz 10.1 (schwache Konvergenz von Radonmaßen) *Sei (X,d) kompakter metrischer Raum. Für Radonmaße μ_k, μ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mu_k \to \mu$ *schwach als Radonmaße*

(2) $\mu(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U)$ *für alle* $U \subset X$ *offen,*
$\mu(K) \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(K)$ *für alle* $K \subset X$ *kompakt.*

(3) $\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(B)$ *für jede Borelmenge* B *mit* $\mu(\partial B) = 0$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$(2): Sei U offen. Für $K \subset U$ kompakt und $\chi \in C^0(X)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ auf K, spt $\chi \subset U$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \int_X \chi\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \chi\, d\mu_k \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U), \\ \mu(U) &\geq \int_X \chi\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \chi\, d\mu_k \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(K). \end{aligned}$$

Aus den Approximationseigenschaften von Radonmaßen folgt

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \sup\{\mu(K) : K \subset U,\, K \text{ kompakt}\} \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U), \\ \mu(K) &= \inf\{\mu(U) : U \supset K,\, U \text{ offen}\} \geq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(K). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$(3): Dies folgt direkt aus der Zeile

$$\mu(B) = \mu(\text{int } B) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(\text{int } B) \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B).$$

(3) $\Rightarrow$(1): Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $t_0 < t_1 < \ldots t_N$ mit $t_0 < \min f \leq \max f < t_N$ und $|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$. Da μ Radonmaß, ist die Menge der $t \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{f = t\}) > 0$ abzählbar, also können wir $\mu(\{f = t_i\}) = 0$ für $i = 1, \ldots, N$ annehmen. Setze $B_i = \{t_{i-1} < f \leq t_i\}$ für $i = 1, \ldots, N$, also $\mu(\partial B_i) = 0$ und $X = \bigcup_{i=1}^N B_i$ disjunkt. Es folgt

$$\begin{aligned} \Big| \int_X f\, d\mu_k - \int_X f\, d\mu \Big| &\leq \Big| \int_X f\, d\mu_k - \sum_{i=1}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) \Big| + \Big| \sum_{i=1}^N t_{i-1}(\mu_k(B_i) - \mu(B_i)) \Big| \\ &\quad + \Big| \sum_{i=1}^N t_{i-1} \mu(B_i) - \int_X f\, d\mu \Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^N t_{i-1} |\mu_k(B_i) - \mu(B_i)| + \varepsilon(\mu_k(X) + \mu(X)). \end{aligned}$$

Jetz folgt (1) mit $k \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$. □

In Aufgabe 4, Serie 4. hatten wir schon folgende Tatsache.

Lemma 10.1 *Sei X normierter Raum. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$J : X \to X'',\ Jx(\phi) = \phi(x) \quad \textit{für alle } \phi \in X',$$

eine isometrische Einbettung.

Beweis: Es gilt $\|Jx\| = \sup_{\|\phi\|\leq 1} |Jx(\phi)| = \sup_{\|\phi\|\leq 1} |\phi(x)| \leq \|x\|$. Andererseits gibt es zu $x \in X$, nach Folgerung 3.2(1), ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x) = \|x\|$. Das bedeutet

$$\|Jx\| \geq |Jx(\phi)| = |\phi(x)| = \|x\|.$$

□

Satz 10.2 (Grundtatsachen zur schwachen Konvergenz) *Es gilt:*

(1) *Schwache bzw. schwach$*$ Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.*

(2) *Schwache bzw. schwach$*$-konvergente Folgen sind beschränkt.*

(3) *Unterhalbstetigkeit der Normen:*

$$\begin{aligned} x_k \to x \text{ schwach} \quad &\Rightarrow \quad \|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|. \\ \phi_k \to \phi \text{ schwach}* \quad &\Rightarrow \quad \|\phi\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|. \end{aligned}$$

Beweis: Angenommen $x_k \to x$ sowie $x_k \to y$ schwach in X. Dann gilt für jedes $\phi \in X'$

$$\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) - \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = 0.$$

Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.2(2), folgt $x = y$. Für schwach$*$ Grenzwerte ist die Eindeutigkeit trivial.

Die Beschränktheit von schwach$*$ konvergenten Folgen in X' wurde schon in Folgerung 4.1 mit Banach-Steinhaus gezeigt. Sei nun $x_k \to x$ schwach in X, und $J : X \to X''$ die kanonische isometrische Einbettung. Dann gilt für alle $\phi \in X'$

$$Jx(\phi) = \phi(x) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} Jx_k(\phi),$$

also $Jx_k \to Jx$ schwach$*$ in $X'' = (X')'$. Also ist Jx_k beschränkt in X''. Da $J : X \to X''$ isometrisch nach Lemma 10.1, ist die Folge x_k in X beschränkt.

In (3) betrachten wir wieder erst die schwach$*$ Konvergenz $\phi_k \to \phi$ in $X = Y'$. Ist $y \in Y$ mit $\|y\| \leq 1$, so gilt

$$|\phi(y)| = \lim_{k\to\infty} |\phi_k(y)| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|.$$

Mit Supremum über y folgt $\|\phi\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|$. Sei nun $x_k \to x$ schwach in X. Wie oben gezeigt, gilt dann $Jx_k \to Jx$ schwach$*$ in X'', und mit Lemma 10.1 folgt

$$\|x\| = \|Jx\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|Jx_k\| = \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Um die Konvergenz bezüglich der Norm abzugrenzen, wird sie auch als starke Konvergenz bezeichnet. Es gelten folgende weitere Aussagen zur schwachen Konvergenz, die als Übungsaufgabe behandelt werden sollen:

(4) Aus starker Konvergenz folgt schwache beziehungsweise schwach$*$ Konvergenz.

(5) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $\phi_k \to \phi$ stark in X', so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.
Ist $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in X' und $x_k \to x$ stark in X, so folgt $\phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(6) Ist $x_k \to x$ schwach in X und $T \in L(X,Y)$, so folgt $Tx_k \to Tx$ schwach in Y.

Der folgende Satz verallgemeinert das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß.

Satz 10.3 (schwach$*$ Folgenkompaktheit) *Sei X separabler Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge ϕ_k in X' eine Teilfolge, die schwach$*$ gegen ein $\phi \in X'$ konvergiert.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$, und es gibt eine dichte Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|\phi_k(x_n)| \leq C\|x_n\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Durch sukzessive Wahl von Teilfolgen und Übergang zur Diagonalfolge folgt

$$\exists \lim_{k\to\infty} \phi_k(x_n) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $X_0 = \mathrm{Span}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, das heißt jedes $x \in X_0$ hat eine Darstellung $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$, mit $\alpha_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\phi : X_0 \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(x).$$

Dann ist ϕ wohldefiniert und linear, und es folgt

$$|\phi(x)| = \lim_{k\to\infty} |\phi_k(x)| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in X_0.$$

Damit ist ϕ Lipschitzstetig auf dem dichten Teilraum X_0, also fortsetzbar zu einem linearen Funktional $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| \leq C$. Für $x \in X$ und $x_0 \in X_0$ liefert die Dreiecksungleichung

$$|\phi(x) - \phi_k(x)| \leq |\phi(x) - \phi(x_0)| + |\phi(x_0) - \phi_k(x_0)| + |\phi_k(x_0) - \phi_k(x)|,$$

und hieraus mit $k \to \infty$

$$\limsup_{k\to\infty} |\phi(x) - \phi_k(x)| \leq 2C\|x - x_0\|.$$

Da X_0 dicht in X, folgt $\phi_k(x) \to \phi(x)$ für alle $x \in X$, das heißt $\phi_k \to \phi$ schwach$*$ in X'. $\square$

Wir wollen einen entsprechenden Satz für die schwache Konvergenz folgern. Dazu folgende

Definition 10.2 *Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung in den Bidualraum $J : X \to X''$, $Jx(\phi) = \phi(x)$, surjektiv ist.*

Lemma 10.2 *Ist X reflexiver Banachraum, so ist jeder abgeschlossene Unterraum $X_0 \subset X$ ebenfalls reflexiv.*

Beweis: Sei $\lambda \in X_0''$ gegeben. Betrachte $\Lambda : X' \to \mathbb{R}$, $\Lambda(\phi) = \lambda(\phi|_{X_0})$. Es folgt

$$|\Lambda(\phi)| \leq \|\lambda\| \|\phi|_{X_0}\| \leq \|\lambda\| \|\phi\|,$$

also gilt $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$ und insbesondere $\Lambda \in X''$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in X$ mit $\Lambda = J_X x$. Angenommen es ist $x \notin X_0$, also nach Voraussetzng $\operatorname{dist}(x, X_0) > 0$. Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.1, gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = 0$ und $\phi(x) \neq 0$. Dann ist

$$0 = \lambda(\phi|_{X_0}) = \Lambda(\phi) = (J_X x)(\phi) = \phi(x) \neq 0,$$

ein Widerspruch. Somit gilt $x \in X_0$. Zu $\varphi \in X_0'$ existiert, wieder nach Hahn-Banach Satz 3.1, ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = \varphi$. Es folgt dann

$$(J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x) = \phi(x) = (J_X x)(\phi) = \Lambda(\phi) = \lambda(\varphi),$$

das heißt $\lambda = J_{X_0} x$ wie verlangt. □

Satz 10.4 (schwache Folgenkompaktheit) *Sei X reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $\|x_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$X_0 = \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist X_0 separabel sowie nach Lemma 10.2 reflexiv, also $J_{X_0} : X_0 \to X_0''$ surjektive Isometrie. Somit ist auch X_0'' separabel, und dann nach Folgerung 3.3 auch X_0' separabel. Die Folge $J_{X_0} x_k$ ist beschränkt im Dualraum $(X_0')' = X_0''$, wir können also Satz 10.3 anwenden. Da J_{X_0} surjektiv ist, gibt es ein $x \in X_0$ so dass nach Übergang zu einer Teilfolge für alle $\varphi \in X_0'$ gilt:

$$\varphi(x_k) = (J_{X_0} x_k)(\varphi) \to (J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x).$$

Sei nun $\phi \in X'$. Dann gilt für die Teilfolge

$$\phi(x_k) = \phi|_{X_0}(x_k) \to \phi|_{X_0}(x) = \phi(x).$$

Somit konvergiert die Teilfolge $x_k \to x$ schwach in X. □

Wir wollen die abstrakten Kompaktheitssätze nun konkretisieren.

Satz 10.5 (schwache Folgenkompaktheit in Hilberträumen) *In einem Hilbertraum X hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Nach Folgerung 5.1 ist X reflexiv, die Aussage folgt also direkt aus Satz 10.4. □

Satz 10.6 (schwache Folgenkompaktheit in $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$) *Sei μ ein Maß auf X und $1 < p < \infty$. Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^p(\mu)$ eine schwach konvergente Teilfolge, das heißt nach Übergang zur Teilfolge gilt*

$$\int_X f_k g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \textit{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Beweis: Wir zeigen dass $L^p(\mu)$ reflexiv ist, die Behauptung folgt dann mit Satz 10.4. Sei $\phi \in L^p(\mu)''$, das heißt $\phi : L^p(\mu)' \to \mathbb{R}$ ist lineares Funktional. Die Abbildung $I : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ ist isometrisch, also gilt $\phi \circ I \in L^q(\mu)'$. Nach Satz 8.2 gibt es ein $f \in L^p(\mu)$ mit

$$(\phi \circ I)(g) = \int_X fg\,d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Sei nun $J : L^p(\mu) \to L^p(\mu)''$ die kanonische Einbettung. Dann folgt

$$(Jf)(Ig) = (Ig)(f) = \int_X fg\,d\mu = (\phi \circ I)(g) = \phi(Ig).$$

Nach Satz 8.2 ist $I : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ surjektiv, also ist $\phi = Jf$ wie behauptet. $\square$

Lemma 10.3 (zur Separabilität) *In einem kompakten, metrischen Raum (X,d) gilt:*

(1) *$C^0(X)$ ist separabel.*

(2) *$L^p(\mu)$ ist separabel, falls μ Radonmaß auf X und $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: Zu $\delta > 0$ gibt es eine Teilung der Eins $\chi_i \in C^0(X)$, $1 \leq i \leq N$:

- spt $\chi_i \subset B_\delta(x_i)$ für ein $x_i \in X$,
- $0 \leq \chi_i \leq 1$
- $\sum_{i=1}^N \chi_i = 1$ auf X.

Wähle dazu eine Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^N B_{\delta/2}(x_i)$ und $\tilde{\chi}_i \in C^0(X)$ mit spt $\tilde{\chi}_i \subset B_\delta(x_i)$, $0 \leq \tilde{\chi}_i \leq 1$ und $\tilde{\chi}_i = 1$ auf $B_{\delta/2}(x_i)$. Dann ist $\sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j \geq 1$ auf X, und wir können $\chi_i = \tilde{\chi}_i / \sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j$ setzen. Für $f \in C^0(X)$ gilt die Abschätzung

$$\Big|f(x) - \sum_{i=1}^N f(x_i)\chi_i(x)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^N (f(x) - f(x_i))\chi_i(x)\Big| \leq \omega_f(\delta).$$

Wähle nun $\delta_k = \frac{1}{k}$ und erhalte für $k = 1, 2, \ldots$ Funktionen χ_i^k, $1 \leq i \leq N_k$ wie oben. Da f gleichmäßig stetig ist, wird f in $C^0(X)$ durch Linearkombinationen der χ_i^k approximiert. Die Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ sind dann eine abzählbare, dichte Teilmenge.

Sei nun μ ein Radonmasß und $1 \leq p < \infty$. Wir zeigen, dass jede Funktion χ_E, $E \subset X$ μ-messbar, durch $C^0(X)$ approximiert wird. Daraus folgt die Behauptung, denn Stufenfunktionen sind dicht in $L^p(\mu)$. Wähle $K \subset E$ kompakt mit $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$, und setze

$$\varphi_\delta \in C^0(X),\ \varphi_\delta(x) = \Big(1 - \frac{\operatorname{dist}(x,K)}{\delta}\Big)^+.$$

Mit $K_\delta = \{\operatorname{dist}(\cdot, K) < \delta\}$ gilt $\{\varphi_\delta - \chi_E \neq 0\} \subset (K_\delta \cup E)\backslash K$, also folgt

$$\int_X |\varphi_\delta - \chi_E|^p\,d\mu \leq \mu(K_\delta \backslash K) + \mu(E \backslash K) < \varepsilon \quad \text{für } \delta > 0 \text{ hinreichend klein.}$$

$\square$

Satz 10.7 (schwach$*$-Folgenkompaktheit in $L^\infty(\mu)$) *Sei (X,d) kompakter metrischer Raum und μ sei Radonmaß auf X. Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^\infty(\mu)$ eine schwach$*$-konvergente Teilfolge, das heißt nach Umnummerierung gilt*

$$\int_X f_k g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^1(\mu).$$

Beweis: Das Maß μ ist endlich, also gilt $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)'$ nach Satz 8.2. Weiter ist $L^1(\mu)$ separabel nach Lemma 10.3. Die Behauptung folgt also aus Satz 10.3. □

Für $L^1(\mu)$ haben wir leider keinen Kompaktheitssatz. Satz 10.3 ist nicht anwendbar, denn wir haben $L^1(\mu)$ nicht als Dualraum charakterisiert. Die Einbettung nach $L^\infty(\mu)'$ ist im allgemeinen nicht surjektiv, siehe Beispiel **??**. Insbesondere ist $L^1(\mu)$ auch nicht reflexiv, damit ist auch Satz 10.4 nicht anwendbar. Der folgende Satz liefert einen gewissen Ersatz, denn wir können Funktionen in $L^1(\mu)$ als (signierte) Radonmaße auffassen.

Satz 10.8 (Kompaktheitssatz für Radonmaße) *Sei (X,d) kompakter metrischer Raum, und μ_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Radonmaßen auf X mit*

$$C := \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(X) < \infty.$$

Dann gibt es ein Radonmaß μ auf X, so dass für eine Teilfolge $\mu_k \to \mu$ für $k \to \infty$, also

$$\int_X f \, d\mu_k \to \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Beweis: Der Raum $C^0(X)$ ist separabel, und es gilt

$$\Big| \int_X f \, d\mu_k \Big| \leq C \|f\|_{C^0(X)},$$

das heißt die Folge μ_k ist in $C^0(X)'$ beschränkt. Nach Satz 10.3 gibt es ein $\phi \in C^0(X)'$ mit

$$\phi(f) = \lim_{k \to \infty} \int_X f \, d\mu_k \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Insbesondere ist $|\phi(f)| \leq C\|f\|_{C^0(X)}$ und $\phi(f) \geq 0$ für $f \in C^0_c(X, \mathbb{R}^+_0)$. Es gibt dann ein Radonmaß μ auf X mit

$$\phi(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Dies folgt aus dem Satz von Riesz-Radon, Satz 9.3. Genauer liefert der Satz erst ein signiertes Maß, dieses ist aber nichtnegatiov wegen $\phi \geq 0$. □

Puristen können kritisieren, dass wir die schwache Konvergenz definiert haben, ohne die zugehörige Topologie zu betrachten. Wir holen das kurz nach, hier für die schwach$*$ Topologie. Für $\phi \in X'$, $A \subset X$ endlich und $\varepsilon > 0$ definieren wir die Basismengen

$$U_{A,\varepsilon}(\phi) = \{\psi \in X' : \max_{x \in A} |\phi(x) - \psi(x)| < \varepsilon\}.$$

Wir zeigen dass der Schnitt von Basismengen $U_{A_i,\varepsilon_i}(\phi_i)$, $i = 1,2$, als Vereinigung von Basismengen darstellbar ist. Daraus folgt dass die Basismengen eine Topologie erzeugen. Sei $\phi \in U_{A_i,\varepsilon_i}(\phi_i)$ für $i = 1,2$. Für $\psi \in U_{A_1 \cup A_2,\delta}(\phi)$ gilt dann für $i = 1,2$

$$\max_{x \in A_i} |\phi_i(x) - \psi(x)| \leq \underbrace{\max_{x \in A_i}(|\phi_i(x) - \phi(x)|}_{<\varepsilon_i} + \underbrace{|\phi(x) - \psi(x)|}_{<\delta}) < \varepsilon_i,$$

für $\delta > 0$ hinreichend klein. Es folgt dann

$$U_{A_1 \cup A_1,\delta}(\phi) \subset U_{A_1,\varepsilon_1}(\phi_1) \cap U_{A_2,\varepsilon_2}(\phi_2).$$

Die Topologie ist Hausdorffsch: zu $\phi_1 \neq \phi_2$ gibt es $x \in X$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}|\phi_1(x) - \phi_2(x)| > 0$, also

$$U_{\{x\},\varepsilon}(\phi_1) \cap U_{\{x\},\varepsilon}(\phi_2) = \emptyset.$$

Es gilt $\phi_k \to \phi$ bezüglich der Topologie genau wenn für alle $A \subset X$ endlich und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\max_{x \in A} |\phi_k(x) - \phi(x)| < \varepsilon \quad \text{für } k \text{ hinreichend groß.}$$

Das ist offensichtlich gleichbedeutend mit schwach$*$ Konvergenz, das heißt mit punktweise Konvergenz. Für die schwach$*$ Topologie gilt nun der folgende Satz.

Satz 10.9 (Banach-Alaoglu) *Sei X Banachraum. Dann sind abgeschlossene und beschränkte Mengen in X' kompakt bezüglich der schwach$*$ Topologie.*

Satz 10.3 ist insofern schwächer als wir X separabel voraussetzen. Allerdings liefert Satz 10.9 Kompaktheit im Sinne von Überdeckungen, im allgemeinen impliziert das nicht Folgenkompaktheit, ein Beispiel hierzu in den Übungen. Falls aber X separabel ist, so ist die Implikation doch gültig, aus Satz 10.9 folgt also Satz 10.3. Der Beweis von Satz 10.9 ist nichtkonstruktiv, er verwendet den Satz von Tychonoff und damit das Lemma von Zorn. Dagegen erfordert unser Beweis von Satz 10.3 nur ein harmloses Diagonalfolgenargument. In den Anwendungen ist die Folgenkompaktheit das was man braucht.

11 Kompakte und Fredholm-Operatoren

Definition 11.1 *Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt kompakt, wenn gilt: für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat die Folge $(Kx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.*

Lemma 11.1 *Äquivalente Bedingungen für die Kompaktheit von $K \in L(X,Y)$ sind:*

(1) *Für jedes $B \subset X$ beschränkt ist $\overline{K(B)} \subset Y$ kompakt.*

(2) falls X reflexiv: *Für jede Folge $x_k \to x$ schwach in X folgt $Kx_k \to Kx$ stark in Y.*

Beweis: Sei K kompakt. Ist B beschränkt und y_k Folge in $\overline{K(B)}$, so gibt es $x_k \in B$ mit $\|y_k - Kx_k\| < \frac{1}{k}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt dann $Kx_k \to y$. Es folgt $y \in \overline{K(B)}$ und $y_k \to y$, also ist (1) bewiesen. Sei umgekehrt (1) erfüllt und x_k eine beschränkte Folge in X, also $\|x_k\| \leq R$ für alle K. Da $\overline{K(B_R(0)}$ kompakt, gilt für eine Teilfolge $Kx_k \to y$. Somit ist K kompakter Operator.

Wir zeigen jetzt: aus K kompakt folgt (2). Sei dazu $x_k \to x$ schwach in X. Dann ist die Folge x_k beschränkt und es gilt $Kx_k \to Kx$ schwach in Y (siehe Satz 10.2(2) sowie Aussage (6) nach diesem Satz). Angenommen Kx_k konvergiert nicht stark gegen Kx. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt

$$\|Kx_k - Kx\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da K kompakt, gilt aber für eine weitere Teilfolge $Kx_{k_j} \to y$ stark in Y. Da starke Konvergenz schwache Konvergenz impliziert, und der schwache Grenzwert eindeutig ist (Satz 10.2(1)), muss $y = Kx$ sein, ein Widerspruch. Sei schließlich nun (2) erfüllt, und x_k beschränkte Folge in X. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $x_k \to x$ schwach in X; hier brauchen wir die Voraussetzung X reflexiv. Aus (2) folgt dann $Kx_k \to Kx$ stark in Y, also ist K kompakt. $\square$

Beispiel 11.1 Jeder Operator $K \in L(X,Y)$ mit endlichdimensionalem Bild ist kompakt.

Beispiel 11.2 Sei X kompakter metrischer Raum und $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. In Satz 2.6 haben wir gezeigt, dass dann die Einbettung $C^{0,\alpha}(X) \subset C^{0,\beta}(X)$ kompakt ist. Sind $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $l + \beta < k + \alpha$, so ist die Einbettung $C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^{l,\beta}(\Omega)$ kompakt, falls zum Beispiel Ω beschränktes C^1-Gebiet ist. Dies wird in Satz 2.8 bewiesen (*in der Vorlesung ausgelassen*).

Lemma 11.2 *Es gilt*

(1) *Die Verkettungen* stetig $\circ$ kompakt *sowie* kompakt $\circ$ stetig *sind wieder kompakt.*

(2) *Ist $K : X \to Y$ kompakt, so auch $K' : Y' \to X'$.*

(3) *Die kompakten Operatoren bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Beweis: (1) ist trivial und (3) ist eine Übungsaufgabe. Für (2) seien $\psi_k \in Y'$ mit $\|\psi_k\| \leq \Lambda < \infty$. Nach Lemma 11.1(1) ist $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y. Nun ist $\psi_k|_M$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzela-Ascoli, Satz 2.4, ist $\psi_k|_M$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\psi_k - \psi_l\|_{C^0(M)} < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > K,$$

insbesondere wegen $K(B_1(0)) \subset M$

$$\|\psi_k \circ K - \psi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\psi_k(Kx) - \psi_l(Kx)| < \varepsilon \quad \text{für } k, l > K.$$

Also ist $K'\psi_k = \psi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X', und konvergiert in X'. $\square$

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Operatoren, den Fredholmoperatoren[16]. Vor der Definition ein Lemma zur Existenz von Komplementen, das weiter unten gebraucht wird.

Lemma 11.3 *Sei V Unterraum eines Banachraums X.*

(a) *Ist* $\dim V < \infty$ *oder* $\dim X/V < \infty$*, so hat V ein abgeschlossenes Komplement.*

[16] Ivar Fredholm, 1866-1927, Stockholm

(b) *Ist $X = V \oplus W$ für abgeschlossene Unterräume V, W, so sind P_V, P_W stetig.*

Beweis: Wir beginnen mit (a) im Fall $\dim V = n < \infty$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die duale Basis von V', also $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Nach Hahn-Banach, Satz 3.1, haben die φ_i eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_i \in X'$. Definiere die stetige lineare Abbildung

$$P \in L(X, V),\ Px = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) v_i.$$

Es folgt $Pv_j = v_j$, $P^2 = P$ und $P|_V = \mathrm{Id}_V$. Für $x \in X$ folgt $x = Px + (x - Px) \in V \oplus \ker P$. Der Raum $\ker P$ ist ein Komplement wie verlangt.

Für $\dim X/V = n < \infty$ wähle eine Basis $[x_1], \ldots, [x_n]$ von X/V. Dann ist $\mathrm{Span}\,\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein endlichdimensionales, also abgeschlossenes, Komplement.

In (b) ist $V \times W$ mit der Produktnorm ein Banachraum, und die Abbildung $V \times W \to X$, $(v, w) \mapsto v + w$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz 4.4 ist auch die Inverse stetig, und damit die Projektionen P_V, P_W auf die Komponenten. □

Definition 11.2 *$L \in L(X, Y)$ heißt Fredholmoperator, falls $\ker L$ und $\operatorname{coker} L = Y/\mathrm{Bild}\, L$ endlichdimensional sind. Der Fredholmindex von L ist dann definiert als*

$$\operatorname{ind} L = \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 11.4 *Das Bild eines Fredholmoperators $L : X \to Y$ ist stets abgeschlossen.*

Beweis: Sei L injektiv, andernfalls betrachte $X/\ker L$. Wähle ein Komplement Y_0 von $\mathrm{Bild}\, L$. Dann ist $X \times Y_0$ ein Banachraum mit der Produktnorm, da Y_0 endlichdimensional ist. Die Abbildung $\tilde{L} : X \times Y_0 \to Y$, $\tilde{L}(x, y) = Lx + y$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz 4.4 ist auch $\tilde{L}^{-1}$ stetig, und damit $\mathrm{Bild}\, L = \tilde{L}(X \times \{0\})$ abgeschlossen. □

Die beiden Zahlen in der Definition haben folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} \dim \ker L &= \text{Anzahl der linear unabhängigen Lösungen} \\ & \text{der homogenen Gleichung } Lx = 0. \\[1em] \dim \operatorname{coker} L &= \text{Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen,} \\ & \text{damit die inhomogene Gleichung } Lx = y \text{ lösbar ist.} \end{aligned}$$

Hier ein paar Beispiele zum Fredholmindex:

- Ein invertierbarer Operator ist Fredholm mit Index Null.
- Auf dem Folgenraum $\ell^2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (x_2, x_3, \ldots) \quad \text{hat Index } 1, \\ (x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{hat Index } -1. \end{aligned}$$

- Sind X, Y endlichdimensional, so ist der Index unabhängig von L:

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} L &= \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L\\ &= (\dim X - \dim \operatorname{Bild} L) - (\dim Y - \dim \operatorname{Bild} L)\\ &= \dim X - \dim Y.\end{aligned}$$

Wir haben hier den Homomorphiesatz (oder Dimensionssatz) der Linearen Algebra benutzt. Jetzt zeigen wir im Kontext von Banachräumen einen verwandten Isomorphismus.

Satz 11.1 *Für $L \in L(X, Y)$ ist die kanonische Abbildung*

$$F : \ker L' \to (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})',\ (F\phi)([y]) = \phi(y), \tag{11.46}$$

eine Isometrie, insbesondere ein Isomorphismus.

Beweis: Nach Satz 1.3 ist $Y/\overline{\operatorname{Bild} L}$ Banachraum mit Norm

$$\|[y]\| = \inf\{\|y + z\| : z \in \overline{\operatorname{Bild} L}\} \leq \|y\|.$$

Für $\phi \in \ker L'$ gilt $\phi(Lx) = L'\phi(x) = 0$ für alle $x \in X$. Da ϕ stetig, folgt $\phi = 0$ auf $\overline{\operatorname{Bild} L}$, also ist $F\phi([y])$ durch (11.46) wohldefiniert. Weiter gilt für alle $z \in \overline{\operatorname{Bild} L}$

$$F\phi([y]) = \phi(y) = \phi(y + z) \leq \|\phi\|\,\|y + z\|.$$

Durch Bildung des Infimums über z folgt $\|F\phi\| \leq \|\phi\|$ und $F\phi \in (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})'$. Betrachte nun

$$G : (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})' \to Y',\ G\psi(y) = \psi([y]).$$

Es gilt $|G\psi(y)| \leq \|\psi\|\,\|\,[y]\,\| \leq \|\psi\|\,\|y\|$, also $\|G\psi\| \leq \|\psi\|$, insbesondere $G\psi \in Y'$. Außerdem bildet G nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx) = \psi([Lx]) = 0.$$

Wir rechnen nach, dass F und G zueinander invers sind:

$$GF\phi(y) = F\phi([y]) = \phi(y) \quad \text{und} \quad FG\psi([y]) = G\psi(y) = \psi([y]).$$

Der Satz ist bewiesen. $\square$

Der Vollständigkeit halber geben wir einen zweiten kanonischen Isomorphismus an, der aber im Folgenden nicht benötigt wird.

Satz 11.2 *Hat $L \in L(X, Y)$ abgeschlossenes Bild, so ist auch* $\operatorname{Bild} L'$ *abgeschlossen und die kanonische Abbildung*

$$F : X'/\operatorname{Bild} L' \to (\ker L)',\ F([\phi])(x) = \phi(x).$$

ist eine Isometrie, insbesondere ein Isomorphismus.

Beweis: F ist wohldefiniert wegen $L'\psi(x) = \psi(Lx) = 0$ für $\psi \in Y'$, $x \in \ker L$. Weiter gilt

$$|F[\phi](x)| = |(\phi + L'\psi)(x)| \leq \|\phi + L'\psi\| \, \|x\|.$$

Durch Bildung des Infimums folgt $\|F[\phi]\| \leq \| \, [\phi] \, \|$. Wir zeigen nun

$$\phi \in X' \text{ mit } \phi|_{\ker L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \in \operatorname{Bild} L'. \tag{11.47}$$

Für das gesuchte $\psi \in Y'$ muss offenbar $\psi(Lx) = \phi(x)$ gelten, und dadurch ist ψ auf $\operatorname{Bild} L$ auch wohldefiniert. Für die Stetigkeit von ψ schätzen wir für $x_0 \in \ker L$ beliebig ab:

$$|\psi(Lx)| = |\psi(L(x + x_0))| = |\phi(x + x_0)| \leq \|\phi\| \, \|x + x_0\|,$$

also $|\psi(Lx)| \leq \| \, [x] \, \|$ nach Bildung des Infimums über x_0. Aber nun ist

$$\overline{L} : X/\ker L \to \operatorname{Bild} L, \; \overline{L}[x] = Lx,$$

bijektiv und stetig, also gilt $\| \, [x] \, \| \leq C\|Lx\|$ nach dem Satz von der beschränkten Inversen, Satz 4.4 (hier ist $\operatorname{Bild} L$ abgeschlossen wesentlich). Insgesamt ist $\psi \in (\operatorname{Bild} L)'$ und kann zu $\psi \in Y'$ fortgesetzt werden nach Hahn-Banach, Satz 3.1.

Jetzt definieren wir die Umkehrabbildung: setze $\varphi \in (\ker L)'$ nach Hahn-Banach mit gleicher Norm zu $\phi \in X'$ fort, dann ist $G\varphi = [\phi]$. Nach (11.47) ist das wohldefiniert, und

$$\|G\varphi\| = \|[\phi]\| \leq \|\phi\| = \|\varphi\|.$$

F, G sind zueinander invers. Ferner ist $\operatorname{Bild} L' = \{\phi \in X' : \phi|_{\ker L} = 0\}$ abgeschlossen. □

Wir kommen nun zu einem zentralen Satz über kompakte und Fredholmoperatoren.

Satz 11.3 (Riesz-Schauder) *Seien X, Y Banachräume. Die Abbildung $L_0 \in L(X,Y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X,Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null. Insbesondere gilt*

$$L \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ injektiv}.$$

Bemerkung. Die letzte Aussage wird oft so formuliert: entweder die homogene Gleichung $Lx = 0$ hat eine nichttriviale Lösung, oder die inhomogene Gleichung $Lx = y$ ist für alle rechten Seiten y eindeutig lösbar (*Fredholmsche Alternative*).

Beweis: Wir können $X = Y$ und $L = \operatorname{Id} + K$ annehmen, sonst betrachte $L_0^{-1}L = \operatorname{Id} + L_0^{-1}K$ und beachte Aussage (1) in Lemma 11.2. Wir zeigen den Satz in fünf Schritten.

Schritt 1 $\ker L$ und $\ker L'$ sind endlichdimensional
Sei $x_k \in \ker L$ mit $\|x_k\| \leq 1$. Dann gilt $x_k = -Kx_k$, also konvergiert x_k gegen ein $x \in \ker L$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Nach Satz 2.2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Weiter gilt $L' = (\operatorname{Id} + K)' = \operatorname{Id} + K'$. Da K' kompakt ist nach Lemma 11.2, Aussage (2), ist auch $\ker L'$ endlichdimensional.

Schritt 2 Sei X_0 abgeschlossenes Komplement von $\ker L$. Dann existiert $\mu > 0$ mit

$$\|Lx\| \geq \mu \, \|x\| \text{ für alle } x \in X_0.$$

Andernfalls finde $x_k \in X_0$, $\|x_k\| = 1$, mit $\|Lx_k\| < \frac{1}{k}$. Wir können $Kx_k \to x \in X$ annehmen. Dann folgt aber wegen $L = \mathrm{Id} + K$

$$x_k = Lx_k - Kx_k \to -x, \text{ also } x \in X_0 \text{ und } \|x\| = 1.$$

Aber $Lx = \lim_{k\to\infty} Lx_k = 0$, ein Widerspruch.

Schritt 3 Bild L ist abgeschlossen.
Sei $y_k = Lx_k \to y \in X$. Wir können $x_k \in X_0$ annehmen. Dann folgt aus Schritt 2

$$\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{\mu}\|L(x_k - x_l)\| = \frac{1}{\mu}\|y_k - y_l\| \to 0 \quad \text{ mit } k,l \to \infty.$$

Also konvergiert $x_k \to x$, und $y = \lim_{k\to\infty} Lx_k = Lx \in \mathrm{Bild}\, L$.

Schritt 4 $(\mathrm{coker}\, L)' \cong \ker L'$ nach Satz 11.1.
Zusammen mit Schritt 1 folgt $\dim \mathrm{coker}\, L < \infty$, damit ist L Fredholm.

Schritt 5 Bestimmung des Fredholmindex
In Satz 11.4 unten zeigen wir, dass die Menge der Fredholmperatoren offen ist und der Index lokal konstant. Somit ist die Funktion $t \mapsto \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} + tK)$ konstant, also gleich Null. □

Lemma 11.5 (Additivität des Fredholmindex) *Seien $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ Fredholm. Dann ist $TS : X \to Z$ Fredholm und es gilt*

$$\mathrm{ind}(TS) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T).$$

Beweis: Es ist $S : \ker TS \to \mathrm{Bild}\, S \cap \ker T$ surjektiv mit Kern $\ker S$, also gilt

$$\dim \ker TS = \dim \ker S + \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) < \infty.$$

Wähle nun Komplemente $\ker T = (\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) \oplus Y_0$, und dann $Y = \mathrm{Bild}\, S \oplus Y_0 \oplus Y_1$. Es folgt $TY = \mathrm{Bild}\, TS + TY_1$. Die Summe ist direkt, denn ist $z = TSx = Ty_1$ mit $x \in X$, $y_1 \in Y_1$, so folgt $T(y_1 - Sx) = 0$ und damit

$$y_1 \in \mathrm{Bild}\, S + \ker T = \mathrm{Bild}\, S \oplus Y_0, \quad \text{ also } y_1 = 0 \text{ und damit } z = 0.$$

Also gilt $\dim \mathrm{coker}\, TS = \dim \mathrm{coker}\, T + \dim Y_1 < \infty$, und durch Subtraktion

$$\mathrm{ind}\, TS = \dim \ker S - \dim \mathrm{coker}\, T + \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) - \dim Y_1.$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} \dim \ker T - \dim \mathrm{coker}\, S &= \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) + \dim Y_0 - (\dim Y_0 + \dim Y_1) \\ &= \dim\,(\mathrm{Bild}\, S \cap \ker T) - \dim Y_1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich die Behauptung. □

Satz 11.4 *Sei $L : X \to Y$ Fredholmoperator. Dann hat L in $L(X,Y)$ eine Umgebung, die aus Fredholmperatoren mit demselben Index besteht.*

Beweis: Wähle abgeschlossene Komplemente $X = X_0 \oplus \ker L$ und $Y = \mathrm{Bild}\, L \oplus Y_1$, insbesondere $\dim Y_1 < \infty$. Die Projektionen auf die Komponenten sind dann stetig. Für $S \in L(X,Y)$ setze $S_0 : X_0 \to \mathrm{Bild}\, L$, $S_0 = P_{\mathrm{Bild}\, L} S\, i_{X_0}$, wobei i_{X_0} die Inklusionsabbildung ist. Es gilt

$$\|S_0 - L_0\| = \|P_{\mathrm{Bild}\, L}(S-L)\, i_{X_0}\| \leq C\, \|S - L\|.$$

L_0 ist ein Isomorphismus, also auch S_0 für $\|S - L\| < \varepsilon$. Dann ist S Fredholmoperator:

- Die Projektion $\ker S \to X/X_0$ ist injektiv: aus $Sx = 0$ für $x \in X_0$ folgt $S_0 x = P_{\mathrm{Bild}\, L} S i_{X_0} x = 0$ und somit $x = 0$. Also ist $\dim \ker S < \infty$.
- Die Projektion $Y_1 \to Y/\mathrm{Bild}\, S$ ist surjektiv: zu $y \in Y$ wähle $x \in X_0$ mit $S_0 x = P_{\mathrm{Bild}\, L} y$, also $P_{\mathrm{Bild}\, L}(y - Sx) = 0$ bzw. $y - Sx \in Y_1$. Es folgt $\dim \mathrm{coker}\, S < \infty$.

S_0 ist damit Verkettung von drei Fredholmoperatoren:

$$X_0 \stackrel{i_{X_0}}{\longrightarrow} X \stackrel{S}{\longrightarrow} Y \stackrel{P_{\mathrm{Bild}\, L}}{\longrightarrow} \mathrm{Bild}\, L.$$

Es folgt aus Lemma 11.5

$$0 = \mathrm{ind}\, S_0 = -\dim \ker L + \mathrm{ind}\, S + \dim \mathrm{coker}\, L = \mathrm{ind}\, S - \mathrm{ind}\, L.$$

□

Als Anwendung studieren wir nun das Dirichletproblem für elliptische Operatoren, die Terme niederer Ordnung enthalten. Das entscheidende Hilfsmittel ist der folgende Satz.

Satz 11.5 (Rellich) [17] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ eine kompakte Einbettung.*

Beweis: **Schritt 1:** *Poincaré-Ungleichung auf Würfeln*
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ Würfel mit Kantenlänge L. Dann gilt für $f \in C^1(\overline{W})$ die Abschätzung

$$\int_W f^2\, dx \leq L^{-n} \Big(\int_W f\, dx \Big)^2 + C(n) L^2 \int_W |Df|^2\, dx \quad \text{mit } C(n) = \frac{n}{2}. \tag{11.48}$$

Für $x, y \in W = [0,L]^n$ berechnen wir mit dem Hauptsatz und Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^2 &= \Big| \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} \partial_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, y_{i+1}, \ldots, y_n)\, dt \Big|^2 \\ &\leq n \sum_{i=1}^n \Big(\int_0^L |\partial_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, y_{i+1}, \ldots, y_n)|\, dt \Big)^2 \\ &\leq nL \sum_{i=1}^n \int_0^L |\partial_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, y_{i+1}, \ldots, y_n)|^2\, dt. \end{aligned}$$

Wir integrieren über beide Variablen $x, y \in W$. Das i-te Integral in der Summe ergibt bei Integration der Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i+1}, \ldots y_n$ das Integral von $|\partial_i f|^2$ auf W. Die übrigen Variablen $x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_i$ liefern jeweils den Faktor L, also ingesamt L^{n+1}. Es folgt

$$\int_W \int_W |f(x) - f(x)|^2\, dx dy \leq n L^{n+2} \int_W |Df|^2\, dx.$$

[17] Franz Rellich, Nachrichten Wiss. Ges. Göttingen, 1930

Die Ungleichung folgt durch Ausmultiplizieren links und Division durch $2L^n$.

Schritt 2 *Beweis des Satzes*
Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, und Ω in einem geeigneten Würfel W enthalten ist, reicht es Funktionen in $C_c^\infty(W)$ zu betrachten. Unterteile W in kongruente Teilwürfel W_j, $1 \leq j \leq N^n$, der Kantenlänge L/N. Auf W_j gilt die Poincaré-Ungleichung

$$\int_{W_j} f^2\,dx \leq \Big(\frac{L}{N}\Big)^{-n}\Big(\int_{W_j} f\,dx\Big)^2 + \frac{C(n)L^2}{N^2}\int_{W_j}|Df|^2\,dx.$$

Setze $\omega_j = (L/N)^{-\frac{n}{2}}\,\chi_{W_j}$, und summiere über alle W_j. Das ergibt

$$\int_W f^2\,dx \leq \sum_{j=1}^{N^n}\langle f,\omega_j\rangle_{L^2(W)}^2 + \frac{C(n)L^2}{N^2}\int_W |Df|^2\,dx.$$

Sei nun $f_k \in C_c^\infty(W)$ mit $\|f_k\|_{W^{1,2}(W)} \leq \Lambda < \infty$. Wir wenden die Poincaré-Ungleichung auf $f_k - f_l$ an. Es gilt $\|Df_k - Df_l\|_{L^2(W)} \leq 2\Lambda$, also nach Anpassung von $C(n)$

$$\int_W |f_k - f_l|^2\,dx \leq \sum_{j=1}^{N^n}\langle f_k - f_l,\omega_j\rangle_{L^2(W)}^2 + \frac{C(n)L^2}{N^2}\,\Lambda^2.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert f_k schwach in $L^2(W)$, siehe Satz 10.5. Es folgt $\langle f_k - f_l,\omega_j\rangle_{L^2(W)} \to 0$ mit $k,l\to\infty$, also

$$\limsup_{k,l\to\infty}\|f_k - f_l\|_{L^2(W)}^2 \leq \frac{C(n)L^2}{N^2}\,\Lambda^2 \to 0 \quad \text{mit } N\to\infty.$$

$\square$

Wir interessieren uns nun für einen Operator $L: W_0^{1,2}(\Omega)\to W_0^{1,2}(\Omega)'$ der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^n c^j\partial_j u + qu. \tag{11.49}$$

Dabei ist $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und die Koeffizienten von L erfüllen folgende Bedingungen, mit Konstanten $M<\infty$ und $\lambda>0$,

$$\|a^{ij}\|_{L^\infty},\ \|b^j\|_{L^\infty},\ \|c^j\|_{L^\infty},\ \|q\|_{L^\infty} \leq M, \tag{11.50}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{11.51}$$

Wie in Kapitel 5 erklärt ist L schwach definiert, das heißt

$$Lu(v) = \int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\partial_j v + \sum_{j=1}^n b^j u(\partial_j v) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j u)v + quv\Big).$$

Wir definieren den zu L formal adjungierten Operator durch

$$L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ L^*u(v) = Lv(u). \tag{11.52}$$

Explizit bedeutet das

$$\begin{aligned} L^*u(v) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v \partial_j u + \sum_{j=1}^n b^j v(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j (\partial_j v) u + qvu \Big) \\ &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a^{ji}\partial_i u \partial_j v + \sum_{j=1}^n c^j u(\partial_j v) + \sum_{j=1}^n b^j (\partial_j u) v + quv \Big). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für L^* die Darstellung

$$L^*u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ji}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(c^j u) + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u + qu. \tag{11.53}$$

Sind L^*u und Lv als L^2-Funktionen darstellbar, so gilt

$$\langle L^*u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = L^*u(v) = Lv(u) = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator L^* ist also adjungierter Operator von L bezüglich des L^2-Skalarprodukts, er ist nicht die Hilbertraumadjungierte von $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$. Die Koeffizienten von L^* erfüllen (11.50) und (11.51) mit denselben Konstanten M und λ.

Lemma 11.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und b^j, c^j, $q \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist*

$$K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ Ku = -\sum_{j=1}^n \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j u) + qu,$$

ein kompakter Operator.

Beweis: Zum Beweis betrachten wir die schwache Definition des Operators genauer. Nach Rellich, Satz 11.5, ist $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt. Die Rieszabbildung $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$, $Iu(v) = \int_\Omega uv$, ist stetig, mit Lemma 11.2 folgt die Kompaktheit von

$$E'I : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)',\ (E'If)(v) = If(Ev) = \int_\Omega f(Ev) = \int_\Omega fv.$$

Damit sind, wieder mit Lemma 11.2, die folgenden Abbildungen kompakt:

$$\begin{array}{ccccc} W_0^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) & \longrightarrow & W_0^{1,2}(\Omega)' \\ u & \stackrel{E}{\longmapsto} & u & \stackrel{-\partial_j b^j}{\longmapsto} & [v \mapsto \int_\Omega b^j u(\partial_j v)] \\ u & \stackrel{c^j\partial_j}{\longmapsto} & c^j\partial_j u & \stackrel{E'I}{\longmapsto} & [v \mapsto \int_\Omega c^j(\partial_j u)v \\ u & \stackrel{E}{\longmapsto} & u \stackrel{q\cdot}{\longmapsto} qu & \stackrel{E'I}{\longrightarrow} & [v \mapsto \int_\Omega quv]. \end{array}$$

□

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir folgende Aussagen.

Satz 11.6 (Fredholmtheorie des Dirichletproblems) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den elliptischen Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$,*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^{n} c^j \partial_j u + qu,$$

mit L^∞-Koeffizienten wie in (11.50) und (11.51). Dann gilt:

(1) *L ist Fredholmoperator vom Index Null.*

(2) $\phi \in \operatorname{Bild} L \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u) = 0$ *für alle* $u \in \ker L^*$.

(3) *Für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt mit einer Konstanten $C = C(\lambda, M, \operatorname{diam}\,\Omega) < \infty$*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\big(\|Lu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'} + \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}\big).$$

wobei $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'} := \sup\big\{ \int_\Omega uv : v \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1\big\}$.

Beweis: Es ist $L = L_0 + K$ wobei $L_0 = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_j u)$ Isomorphismus nach Satz 5.6 und K kompakt nach Lemma 11.6. Also ist L Fredholm mit Index Null nach Riesz-Schauder, Satz 11.3. Da $\operatorname{Bild} L$ abgeschlossen ist, haben wir nach Satz 11.1 den Isomorphismus

$$F : \ker L' \to (Y/\operatorname{Bild} L)',\ F\varphi([y]) = \varphi(y).$$

Also ist $y \in \operatorname{Bild} L$ genau wenn $\varphi(y) = 0$ für alle $\varphi \in \ker L'$. In unserem Fall ist $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ und $Y = W_0^{1,2}(\Omega)'$. Ist $J : X \to X''$ der kanonische Isomorphismus, so gilt

$$L'J = L^*, \qquad \text{denn } (L'Ju)(v) = (Ju)(Lv) = (Lv)(u) = (L^*u)(v).$$

Insbesondere folgt $\ker L' = J \ker L^*$, und damit

$$\phi \in \operatorname{Bild} L \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u) = Ju(\phi) = 0 \text{ für alle } u \in \ker L^*.$$

Für Aussage (3) liefert die Elliptizität

$$\lambda\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq L_0u(u) = Lu(u) - Ku(u) \leq \|Lu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + |Ku(u)|.$$

Weiter haben wir nach Voraussetzung an die Koeffizienten

$$\begin{aligned} |Ku(u)| &= \Big|\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n b^j u(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j u)u + qu^2\Big)\Big| \\ &\leq CM\Big(\int_\Omega |u||Du| + \int_\Omega |u|^2\Big) \\ &\leq \varepsilon\int_\Omega |Du|^2 + C(M,\varepsilon)\int_\Omega |u|^2. \end{aligned}$$

Wir wählen $\varepsilon = \lambda/2$ und absorbieren:

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(M,\lambda)\left(\|Lu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + C(M,\lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Nun gilt $\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\operatorname{diam}\,\Omega)\|Du\|^2_{L^2(\Omega)}$ nach Poincaré, Satz 5.3. Weiter ist nach Definition $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Durch Kürzen von $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ folgt Behauptung (3). □

12 Spektralsatz für elliptische Randwertprobleme

In diesem Abschnitt beweisen wir einen Spektralsatz für elliptische Randwertprobleme. Diese Anwendung würde aus dem allgemeinen Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren folgen, den wir aber aus Zeitgründen nicht behandeln. Wir beginnen mit ein paar Grundlagen zu Hilberträumen.

Definition 12.1 *Ein Hilbertraum X heißt Hilbertsumme der abgeschlossenen Unterräume E_i, $i \in I$, falls gilt:*

(1) $E_i \perp E_j$ *für* $i \neq j$,

(2) $\bigoplus_{i \in I} E_i$ *ist dicht in* X.

Hier bezeichnet $\bigoplus_{i \in I} E_i$ die algebraische Summe, also den Unterraum der Summen $\sum_{i \in I} x_i$ mit $x_i \in E_i$, $x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$.

Lemma 12.1 *Seien E_i, $i \in \mathbb{N}$, abgeschlossene, paarweise orthogonale Unterräume des Hilbertraums X, mit zugehörigen Orthogonalprojektionen P_i. Dann sind äquivalent:*

(1) $x \perp E_i$ *für alle* $i \quad \Rightarrow \quad x = 0$ *(Maximalität).*

(2) X *ist Hilbertsumme der* E_i.

(3) $x = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x$ *für alle* $x \in X$ *(Vollständigkeit).*

(4) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i x\|^2$ *für alle* $x \in X$ *(Parsevalsche Gleichung).*

Beweis: Setze $X_n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ und $X_0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Es gilt der Reihe nach:

(1) $\Rightarrow$ (2): Nach dem Projektionssatz, Folgerung 5.3, gilt $X = \overline{X}_0 + \overline{X}_0^{\perp} = \overline{X}_0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Für $x \in X$ sei $x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x$. Berechne für $y \in X_n$ beliebig

$$\|x - y\|^2 = \|\underbrace{x - x_n}_{\perp X_n} + \underbrace{x_n - y}_{\in X_n}\|^2 = \|x - x_n\|^2 + \underbrace{\|x_n - y\|^2}_{\geq 0}.$$

Also gilt $\|x - x_n\| = \min_{y \in X_n} \|x - y\|$. Nach Annahme gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $y \in X_0$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Es ist $y \in X_N$ für $N \in \mathbb{N}$ geeignet. Für $n \geq N$ ist $y \in X_n$, es folgt

$$\|x - x_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts gilt

$$\langle x, x \rangle = \lim_{N \to \infty} \Big\langle \sum_{i=1}^{N} P_i x, \sum_{i=1}^{N} P_i x \Big\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \|P_i x\|^2.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Aus $P_i x = 0$ für alle i folgt direkt $x = 0$. □

Bemerkung. Im Fall $\dim E_i = 1$, $E_i = \operatorname{Span} e_i$ mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, lautet das so:

(1) $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist maximales ON-System.

(2) Endliche Linearkombinationen der e_i sind dicht.

(3) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \, e_i$ (Fourierentwicklung).

(4) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

Wir kommen zum Eigenwertproblem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a^{ij} \partial_i u) + qu,$$

wobei für die Koeffizienten folgende Voraussetzungen gelten:

(12.54) Elliptizität: $\exists\, \mu > 0 : a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2 \quad \forall\, x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n$,

(12.55) Beschränktheit: $\|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)},\ \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M < \infty$,

(12.56) Symmetrie: $a^{ij} = a^{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Der Einfachheit halber vereinbaren wir, das Summenzeichen wegzulassen wenn über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist (Einsteinkonvention). Wir definieren die symmetrische Bilinearform und zugehörige quadratische Form

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_\Omega (a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv), \\ Q(u) &= \int_\Omega (a^{ij}\partial_i u\, \partial_j u + qu^2) \quad (= B(u,u)). \end{aligned}$$

Wir betrachten L als Operator auf einem abgeschlossenen Unterraum $V \subset W^{1,2}(\Omega)$:

$$L : V \to V',\ Lu(v) = B(u,v), \qquad \text{wobei } W_0^{1,2}(\Omega) \subset V.$$

Das schwache Formulierung des Eigenwertproblems lautet dann

(12.57) $$Lu = \lambda u \quad \text{in } V' \quad \Leftrightarrow \quad B(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} \text{ für alle } v \in V.$$

Mit der Wahl von V lassen sich verschiedene Randbedingungen schwach formulieren.

Beispiel 12.1 Die Wahl $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ ergibt das Dirichletproblem mit Randwerten Null:

$$\int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv\big) = \lambda \int_\Omega uv \qquad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nach formaler partieller Integration bedeutet das

$$\begin{aligned} -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beispiel 12.2 Die Wahl $V = W^{1,2}(\Omega)$ ergibt das homogene Neumannproblem:

$$\int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + quv\big) = \lambda \int_\Omega uv \qquad \text{für alle } v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Hier ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$, es sind a priori keine Randwerte vorgeschrieben. Testen mit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ liefert wie beim Dirichletproblem formal die Differentialgleichung

$$-\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu = \lambda u \quad \text{in } \Omega.$$

Ein Test mit $v \in W^{1,2}(\Omega)$ ergibt dann, wieder formal:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \big(a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + (q-\lambda)uv\big) \\ &= \int_\Omega \big(\underbrace{-\partial_j\big(a^{ij}\partial_i u) + (q-\lambda)u}_{=0}\big) + \int_{\partial\Omega} \nu^j a^{ij}(\partial_i u)v\, d\mu. \end{aligned}$$

Da $v|_{\partial\Omega}$ beliebig wählbar ist, ergibt sich mit dem Fundamentallemma die Randbedingung

$$a^{ij}(\partial_i u)\nu^j = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Im Fall $L = -\Delta$, also $a^{ij} = \delta_{ij}$, ist das die homogene Neumann-Bedingung $\partial_\nu u = 0$.

Allgemeiner könnten auf einem Teil von $\partial\Omega$ Nullrandwerte vorgeschrieben werden, auf dem Komplement könnten sie frei wählbar sein.

Satz 12.1 (Spektralsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, und es sei $W_0^{1,2}(\Omega) \subset V \subset W^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir betrachten den elliptischen, symmetrischen Operator mit beschränkten Koeffizienten*

$$L : V \to V',\ Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_j u) + qu.$$

Dann gibt es eine Folge $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ von Eigenwerten mit zugehörigem $L^2(\Omega)$-Orthonormalsystem $v_k \in V$ von Eigenfunktionen, so dass Folgendes gilt:

(1) *Sei $E_\lambda(L) = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$. Die v_k mit $\lambda_k = \lambda$ sind eine ON-Basis von $E_\lambda(L)$.*

(2) $\dim E_\lambda(L) < \infty$ *und $\lambda_k \nearrow \infty$ mit $k \to \infty$.*

(3) *$L^2(\Omega)$ ist Hilbertsumme der $E_{\lambda_k}(L)$.*

Beweis:
Schritt 1 *Konstruktion der Eigenwerte und Eigenfunktionen*
Sei $V_0 = \{0\}$ sowie induktiv für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf\{Q(v) : v \in V,\ \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1,\ v \perp_{L^2} V_{k-1}\}, \\ v_k &= \text{zugehörige Minimalstelle von } Q(v), \\ V_k &= V_{k-1} \oplus \{v_k\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten v_k wie folgt: zunächst gilt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\|Du\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\mu}\int a^{ij}\partial_i u\, \partial_j u \leq \frac{1}{\mu}\big(Q(u) + M\|u\|_{L^2}^2\big). \tag{12.58}$$

Also folgt $\lambda_1 \geq -M$ und dann $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$. Wähle eine Minimalfolge $u_j \in V$ für λ_k, also $u_j \perp V_{k-1}$, $\|u_j\|_{L^2} = 1$, und $Q(u_j) \to \lambda_k$. Dann ist

$$\|Du_j\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\mu}\big(Q(u_j) + M\big) \to \frac{1}{\mu}(\lambda_k + M) < \infty.$$

Wir brauchen nun den Satz von Rellich, im Fall $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ siehe Satz 11.5. Der Satz gilt auch für Folgen in $W^{1,2}(\Omega)$, dafür wird die C^1-Regularität von Ω gebraucht. Es folgt:

- $u_j \to u$ in $L^2(\Omega)$, insbesondere $\|u\|_{L^2} = 1$, $u \perp_{L^2} V_{k-1}$
- $u_j \to u$ schwach in $W^{1,2}(\Omega)$, insbesondere $u \in V$ (nach Folgerung 3.1 ist der abgeschlossene Unterraum V auch abgeschlossen bezüglich schwacher Konvergenz).
- $Du_j \to Du$ schwach in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Wir zeigen nun $Q(u) \leq \liminf_{j\to\infty} Q(u_j)$. Es gilt mit $|q| \leq M$ und Cauchy-Schwarz

$$\Big| \int_\Omega q u_j^2 - \int_\Omega q u^2 \Big| \leq M \int_\Omega |u_j + u|\,|u_j - u| \leq M(\|u_j|_{L^2} + \|u\|_{L^2})\|u_j - u\|_{L^2} \to 0.$$

Weiter gilt wegen a symmetrisch in Kurznotation

$$\int_\Omega a(Du_j, Du_j) = \int_\Omega a(Du, Du) + 2 \underbrace{\int_\Omega a(D(u_j - u), Du)}_{\to 0 \text{ mit } j\to\infty} + \underbrace{\int_\Omega a(D(u_j - u), D(u_j - u))}_{\geq 0}.$$

Die Unterhalbstetigkeit folgt. Nun erfüllt u die Bedingungen $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $u \perp_{L^2} V_{k-1}$, somit

$$\lambda_k \leq Q(u) \leq \liminf_{j\to\infty} Q(u_j) = \lambda_k.$$

Also ist $v_k := u$ Minimalstelle, und wegen $\dim V = \infty$ bricht die Induktion nicht ab.

Schritt 2 *Nachweis der Eigenfunktionsgleichung*
Sei $v \in V$ mit $v \perp_{L^2} V_k$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Da v_k Minimalstelle, gilt

$$0 = \frac{d}{dt} Q\big((\cos t)v_k + (\sin t)v\big)|_{t=0} = 2B(v_k, v).$$

Daraus folgt induktiv mit der Symmetrie von B

$$B(v_k, v_j) = B(v_j, v_k) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq k-1.$$

Da $B(v_k, v_k) = Q(v_k) = \lambda_k = \lambda_k \|v_k\|^2_{L^2}$, ergibt sich insgesamt für alle $v \in V$

$$B(v_k, v) = \lambda_k \,\langle v_k, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{mit } \lambda_k = Q(v_k),$$

das heißt $Lv_k = \lambda_k v_k$ in V'.

Schritt 3 *Verhalten der Eigenwerte, Vollständigkeit*
Wir zeigen zunächst $\lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Wäre $\lambda_k \leq \Lambda < \infty$, so folgt aus (12.58)

$$\|Dv_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\Big(\underbrace{Q(v_k)}_{=\lambda_k} + M\Big) \leq \frac{1}{\mu}(\Lambda + M).$$

Nach Rellich gibt es eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Aber

$$\|v_k - v_l\|^2 = 2 \quad \text{für } k \neq l, \text{ Widerspruch.}$$

Es folgt dass unsere Konstruktion alle Eigenwerte von L bestimmt, und zwar stehen Eigenfunktionen $u, v \in V$ zu Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ senkrecht:

$$0 = B(u, v) - B(v, u) = \lambda\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \mu\langle v, u\rangle_{L^2(\Omega)} = (\lambda - \mu)\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Sei nun $Lu = \lambda u$ mit $\|u\|_{L^2} = 1$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $Q(u) < \lambda_k$. Wäre dann $\lambda \neq \lambda_j$ für $j = 1, \ldots, k-1$, so folgt $u \perp V_{k-1}$ und damit $\lambda = Q(u) \geq \lambda_k$, Widerspruch. Es folgt: zu jedem Eigenwert λ gibt es einen nichtleeren, maximalen Abschnitt $k_- \leq k \leq k_+$, $k_\pm \in \mathbb{N}$, mit $\lambda_k = \lambda$. Würden die zugehörigen v_k nicht den Eigenraum aufspannen, so gäbe es eine weitere normierte, dazu orthogonale Eigenfunktion, und wir hätten $\lambda_{k_+ +1} = \lambda$ im Widerspruch zur Maximalität. Es bleibt nun die Vollständigkeit zu beweisen, dazu zeigen wir für alle $u \in V$ die Entwicklung

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle_{L^2(\Omega)} v_k \to u \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{12.59}$$

Da $V \supset W_0^{1,2}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, folgt hieraus die L^2-Vollständigkeit der v_k. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle^2_{L^2(\Omega)} = \|u_N\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_N\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u - u_N\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Also ist u_N eine $L^2(\Omega)$-Cauchyfolge und konvergiert gegen ein u_0 in $L^2(\Omega)$. Für $N \geq k$ gilt $\langle u - u_N, v_k \rangle_{L^2} = 0$, mit $N \to \infty$ folgt $\langle u - u_0, v_k \rangle_{L^2} = 0$ für alle k. Hätten wir $u_0 \in V$, so folgt mit Definition der λ_k

$$\|u - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_k} Q(u - u_0) \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty,$$

also $u = u_0$ und die $L^2(\Omega)$-Vollständigkeit der Eigenfunktionen ist bewiesen. Wir zeigen nun dass tatsächlich $u_0 \in V$. Da $u - u_N \in V$, folgt aus der Gleichung für die v_k

$$B(u_N, u - u_N) = \sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle_{L^2} B(v_k, u - u_N) = \sum_{k=1}^{N} \langle u, v_k \rangle_{L^2} \lambda_k \langle v_k, u - u_N \rangle_{L^2} = 0.$$

Wir schätzen damit ab, im ersten Schritt mit $\|u_N\|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{L^2}$,

$$\begin{aligned}
\|Du_N\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\mu}\big(B(u_N, u_N) + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \quad \text{(nach (12.58))}\\
&= \frac{1}{\mu}\big(B(u, u_N) + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\\
&\leq \frac{1}{\mu}\big(\|Lu\|_{V'}\, \|u_N\|_{W^{1,2}(\Omega)} + M\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\\
&\leq \frac{1}{2}\|Du_N\|^2_{L^2(\Omega)} + c(\mu, M)\big(\|Lu\|^2_{V'} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\big).
\end{aligned}$$

Also ist u_N beschränkt in $W^{1,2}(\Omega)$ und konvergiert gegen u_0 schwach in $W^{1,2}(\Omega)$. Wegen schwacher Abgeschlossenheit folgt $u_0 \in V$. $\square$

Wir wollen noch die Verbindung zum Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren erklären, der Einfachheit halber im Fall der Dirichlet-Randbedingung, also $V = W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir nehmen zunächst an, dass der Operator L aus Satz 12.1 injektiv ist. Wegen $L = L^*$ ist L dann invertierbar nach Fredholmtheorie, siehe Satz 11.6(2). Definiere nun den Greenschen Operator $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\Omega) & \xrightarrow{G} & L^2(\Omega)\\
E'I \big\downarrow & & \big\uparrow E\\
W_0^{1,2}(\Omega)' & \xrightarrow{L^{-1}} & W_0^{1,2}(\Omega)
\end{array}$$

Hier ist $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ die Einbettung, $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$ der Riesz-Isomorphismus und $E' : L^2(\Omega)' \subset W_0^{1,2}(\Omega)'$ die transponierte Abbildung zu E. Die Gleichung $Gf = u$ ist äquivalent zu

$$Lu = f \quad \Leftrightarrow \quad Lu(v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

G ist symmetrisch auf $L^2(\Omega)$, denn mit $Gf_i = u_i$, $i = 1, 2$, gilt

$$\langle f_1, Gf_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = Lu_1(u_2) = Lu_2(u_1) = \langle f_2, Gf_1 \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Weiter sind E, E' kompakt nach Rellich, Satz 11.5. Somit ist G ein kompakter , symmetrischer Operator auf $L^2(\Omega)$, auf den der allgemeine Spektralsatz angewandt werden kann. L und G haben dieselben Eigenräume, die Eigenwerte sind sind Kehrwerte:

$$Lu = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad Gu = \frac{1}{\lambda} u.$$

Die Eigenwerte sind jeweils nicht Null: L ist injektiv nach Voraussetzung, für G ist das offensichtlich.

Ist L nicht injektiv oder ist das unklar, so kann das Argument oben nicht direkt angewandt werden. Man kann aber den Operator $L + c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$, betrachten. Es gilt

$$(L + c\,\mathrm{Id})u(u) \geq \mu \int_\Omega |Du|^2 + \int_\Omega (q + c)u^2.$$

Für $c > \|q_-\|_{L^\infty(\Omega)}$ ist $L + c\,\mathrm{Id}$ also injektiv, und auf den zugehörigen Greenschen Operator kann der Spektralsatz angewandt werden. Mit diesem Trick folgt er dann auch für L.