Aufgabe 1
Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto b^\perp = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}^2$:

1. Der Vektor $b^\perp$ geht aus b durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervor.
2. Es gilt
$$\langle b, b^\perp \rangle = 0, \quad \langle b, a^\perp \rangle = -\langle b^\perp, a \rangle, \quad |a| = |a^\perp|, \quad (a^\perp)^\perp = -a.$$
3. Für $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ is $\{a, a^\perp\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.
4. Für $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle a, x \rangle = 0$ gleichwertig mit $x = \lambda a^\perp$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\langle a^\perp, b \rangle = \det(a, b) =: [a, b]$.
6. Die Abbildung $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto [a, b]$ ist bilinear und schiefsymmetrisch, d.h. $[a, b] = -[b, a]$. Es gilt $[a^\perp, b^\perp] = [a, b]$.
7. $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow [a, b] \neq 0$.
8. $\langle a, b \rangle^2 + [a, b]^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$.
9. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ gilt $[a, b]c + [b, c]a + [c, a]b = 0$.
10. $|\langle a, b \rangle| \leq |a| \cdot |b|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
11. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Δ-Ungleichung).
12. Bezeichnet θ den Winkel zwischen a und b, so gilt $|[a, b]| = |a||b||\sin \theta|$.