Aufgabe 1
Das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\langle v \times w, z \rangle = \det(v, w, z) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ v_3 & w_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

1. $v \times w = -w \times v$ (*Das Kreuzprodukt ist schiefsymmetrisch*).
2. $(\alpha v + \beta w) \times z = \alpha(v \times z) + \beta(w \times z)$ (*Das Kreuzprodukt ist bilinear*).
3. $A \in O(3) \Rightarrow (Av) \times (Aw) = \det(A) A(v \times w)$,
   $A \in O(3) \setminus SO(3) \Rightarrow (Av) \times (Aw) = -A(v \times w)$.
4. $\langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0$.
5. $v \times w \neq 0 \iff v, w$ linear unabhängig.
6. $\det(v, w, v \times w) = |v \times w|^2$.

Aufgabe 2
Es sei $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie: Für $\alpha \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $\beta \in C^1([a,b], \mathbb{R}^m)$ ist auch $B(\alpha, \beta) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^k)$ und es gilt die Produktregel

$$B(\alpha, \beta)'(t) = B(\alpha'(t), \beta(t)) + B(\alpha(t), \beta'(t)) \quad \forall t \in [a,b].$$