
Aufgabe 1
Betrachten Sie die Parametrisierung der oberen Halbsphäre als Graph:

$$X : U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3 \quad X(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der oberen Halbsphäre.

Aufgabe 2
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein C^2-Funktion. Sei $q \in \mathbb{R}^3$, so dass $f(q) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(q) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: $\exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ offen, $q \in W$, so dass: $\Sigma = W \cap f^{-1}(\{0\})$ lässt sich als reguläres Flächenstück parametrisieren. Bestimmen Sie die Tangentialebene in einem Punkt der Parametrisierung.
Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

(b) Sei $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Abbildung mit $f(F(x)) = 0$ und $Df(F(x)) \neq 0$ $\forall x \in U$. Zeigen Sie $\forall x \in U$:

$$\nabla f(F(x)) \perp DF(x)(\mathbb{R}^2).$$