Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und sei $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt. Zeigen Sie

1. $|v \times w|^2 = \det \begin{pmatrix} |v|^2 & \langle v, w\rangle & 0 \\ \langle w, v\rangle & |w|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |v \times w|^2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$

   Hinweis: Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $\det(A) = \sqrt{\det(A^T A)}$.

2. $|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin \angle(v, w)$.

3. $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$ (*Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ*).

4. $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Traktrix (oder Schleppkurve) $\alpha : (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \sin t\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Tangente der Traktrix die x-Achse schneidet und dass die Länge des Segments der Tangente zwischen dem Berührpunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der x-Achse für alle Tangenten der Traktrix gleich ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Eine Kreisscheibe vom Radius 1 in der Ebene rollt ohne zu Rutschen gleichmäßig auf der x-Achse. Fixieren Sie einen Punkt p auf dem Rand der Kreisscheibe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege p im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Die durch den Punkt p auf dem Rand beschriebene Kurve heißt Zykloid.

(a) Finden Sie einen parametrisierte Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, deren Bild dem Zykloid entspricht, und bestimmen Sie die singulären Punkte.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Zykloides nach einer ganzen Umdrehung der Kreisscheibe.

Abgabe am Montag, 29. April 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten.