

Aufgabe 1 (4 Punkte) Betrachten Sie die Rotationsfläche $X(s, t) = (x(s), y(s) \cos t, y(s) \sin t)$ für eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve $s \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$.

Bestimmen Sie alle solchen Rotationsflächen mit $H \equiv 0$. Zeigen Sie dabei, dass sich jede dieser Flächen nach Umparametrisierung darstellen lässt als

$$\tilde{X}(u, v) = \left(u + u_0, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v \right)$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Die Fläche \tilde{X} heißt Katenoid.

Hinweis: Nach der Aufgabe auf dem Anwesenheitsblatt 11 gilt $H(s, t) = \frac{1}{2x'y} \left(1 - \left(\frac{y^2}{2}\right)'' \right)$. $F(s) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{a}\right)$ ist eine Stammfunktion von $f(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Scherksche Fläche) Betrachten Sie die Fläche $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^z \cos x = \cos y\}$.

$$F_0 := F \setminus \left\{ \left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, z \right) : m, n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

lässt sich darstellen als Graph der Funktion

$$f : \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \right) \times \left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, y) = \log(\cos x) - \log(\cos y).$$

Zeigen Sie, dass F_0 eine Minimalfläche ist. Skizzieren Sie einen repräsentativen Ausschnitt von F_0 .

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Parallellflächen) Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2 -Flächenstück. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Parallellfläche zu X im Abstand λ gegeben durch $X_\lambda(q) := X(q) + \lambda N(q)$.

- (a) Sei $q \in U$, sodass für die Hauptkrümmungen in q , $k_1(q)$ und $k_2(q)$, gilt: $k_1(q) \neq 0, k_2(q) \neq 0$.

Zeigen Sie: X_λ ist genau dann singulär an der Stelle $q \in U$, wenn $\lambda = \frac{1}{k_1(q)}$ oder $\lambda = \frac{1}{k_2(q)}$ ist (in diesem Fall heißt $X_\lambda(q)$ Fokalfunkt zu X an der Stelle q).

Hinweis. Benutzen Sie, dass $DN(q) = -DX(q) \circ L_q$ ist.

- (b) Sei $|\lambda| < \frac{1}{|k_1(q)|}, \frac{1}{|k_2(q)|}$ für alle $q \in U$. Wie hängen die Krümmungsgrößen $k_{1,\lambda}, k_{2,\lambda}, H_\lambda, K_\lambda$ von X_λ mit denen von X zusammen?

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $N_\lambda = N$ gilt und bestimmen Sie Hauptkrümmungen mit Hilfe von (a).

- (c) Ist X_λ an der Stelle q regulär, so ist $X_{\lambda_0}(p)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, genau dann ein Fokalpunkt zu X_λ an der Stelle q , wenn $X_{\lambda_0}(p)$ ein Fokalpunkt zu X an der Stelle q ist.

Abgabe am Montag, 08. Juli 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.