---

**Aufgabe 1** Die Riemannsche Metrik $g$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$ habe die Gestalt

$$(g_{ij}(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta(u,v) \\ \cos\theta(u,v) & 1 \end{pmatrix}$$

für eine $C^2$-Funktion $\theta : U \to (0,\pi)$.
Berechnen Sie die Christoffelsymbole und zeigen sie, dass für die Gaußsche Krümmung gilt:

$$K = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v}.$$

**Aufgabe 2** Berechnen Sie die *Euklidische Metric in Polarkoordinaten*, d.h. berechnen Sie die Metric $\tilde{g}$ auf $\tilde{U} = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ für die die durch

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

gegebene Abbildung $\phi$ eine Isometrie von $(\tilde{U}, \tilde{g})$ und $(U, g)$ ist, wobei $U = \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$ und $g = (\delta_{ij})$ die euklidische Metrik ist.
Berechnen Sie die Christoffelsymbole $\tilde{\Gamma}^l_{ij}$ von $\tilde{g}$ und rechnen Sie mit Hilfe des Theorema Egregium nach, dass $\tilde{K} = 0$.

**Aufgabe 3**

(a) Die Riemannsche Metrik $g$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$ habe die Gestalt $g_q = e^{2f(q)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $K = -e^{2f}(f_{11} + f_{22})$ ist, wobei $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$.

(b) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung der hyperbolischen Ebene $(H, g^H)$ wobei $H = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ und $g^H$ gegeben ist durch $g^H_{(u,v)}(w,\tilde{w}) = \frac{1}{v^2}\langle w, \tilde{w}\rangle$ für alle $(u,v) \in H$ und $w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$.

*Freiwillig, Keine Abgabe.*