

Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)

- (a) Parametrisieren Sie für $a > 0$ die Kurve $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, a \cosh(t/a))$, nach Bogenlänge.
- (b) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, u(t))$. Zeigen Sie: $\kappa(t) = \frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Berechnen Sie die Krümmung der Kurve aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2 (2+2= 4 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Krümmung der

- (a) Traktrix (Blatt 1, Aufgabe 2),
(b) Zykloide (Blatt 1, Aufgabe 3).

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion.

- (a) Sei $f(p) = 0$ und $\nabla f(p) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von p und eine reguläre(!) C^2 -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass für alle $q \in U$ gilt:

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in I : \alpha(t) = q.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

- (b) Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2 Kurve, so dass $f(\alpha(t)) = 0$ und $\nabla f(\alpha(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie:

$$\nabla f(\alpha(t)) \perp T(t) \quad \text{und} \quad \kappa(t) = -\frac{D^2 f(\alpha(t))(T(t), T(t))}{\langle \nabla f(\alpha(t)), N(t) \rangle}$$

wobei T das Einheitstangentenfeld und N das Einheitsnormalenfeld entlang α bezeichnet, und $D^2 f(p)(\cdot, \cdot)$ die zweite Ableitung (*Hesse Form*) von f an der Stelle p ist.

Hinweis: Leiten Sie beide Seiten der Gleichung $f \circ \alpha(t) = 0$ zweimal nach t ab. Begründen Sie auch, dass der Nenner in der Formel für κ nicht verschwindet.

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe) (2 Punkte)

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Zeigen Sie: Wenn $\alpha(t_0)$ ($t_0 \in I$) der Punkt in $\alpha(I)$ mit dem kleinsten Abstand zu $0 \in \mathbb{R}^2$ ist, dann sind der Positionsvektor $\alpha(t_0)$ und der Tangentenvektor $\alpha'(t_0)$ orthogonal zueinander.

Abgabe am Montag, 06. Mai 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten.