Aufgabe 1 (4 Punkte) Die Kurve $\alpha : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{für } t < 0, \\ (0,0,0) & \text{für } t = 0, \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass α eine reguläre C^∞-Kurve ist und die Krümmung $\kappa : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein C^∞-Funktion. Wo gilt $\kappa(t) = 0$?

(b) Zeigen Sie: $B(t) = (0,0,1)$ für $t < 0$ und $B(t) = (0,-1,0)$ für $t > 0$, und $\tau(t) = 0$ für alle $t \neq 0$.

Hinweis: Sie können Ihre Kenntnisse aus der Analysis I über die Differenzierbarkeit der Funktion f gegeben durch $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, die ganz in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $r > 0$ enthalten ist. Sei $t_0 \in (a,b)$ so, dass $\alpha(t_0)$ auf dem Rand der Kugel liegt. Zeigen Sie, dass $\kappa(t_0) \geq \frac{1}{r}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit nirgends verschindender Krümmung κ und Windung τ. Die Kurve α heißt Böschungslinie, falls ein $w \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ existiert, so dass $t \in I \mapsto \langle \alpha'(t), w \rangle$ konstant ist. Zeigen Sie:

(a) Ist α eine Böschungslinie, so ist $t \mapsto \frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ konstant.
Hinweis: Schreiben Sie w als Linearkombination des Frénetschen 3-Beins und leiten Sie ab.

(b) Es gilt auch die Umkehrung.

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe) (1 Punkt)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eine C^1-Kurve mit $x'(0) > 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $x|_{(-\epsilon,\epsilon)} : (-\epsilon, \epsilon) \to (x(-\epsilon), x(\epsilon))$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\phi := x^{-1}$. Dann ist $\alpha \circ \phi(x) = (x, y \circ \phi(x))$ für alle $x \in (x(-\epsilon), x(\epsilon))$.

Abgabe am Montag, 13. Mai 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.