Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige reguläre ebene Kurve. Beweisen Sie die folgenden verallgemeinerten Versionen der Frenetschen Gleichungen:

$$T' = |\alpha'|\kappa N, \quad N' = -|\alpha'|\kappa T$$

und $\theta' = |\alpha'|\kappa$, falls $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \in \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$.

(b) Beweisen Sie folgende verallgemeinerte Version des Hauptsatzes der ebenen Kurventheorie:
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : I \to (0, \infty)$ eine C^1-Funktion, so existiert eine Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa = f$ und $|\alpha'| = g$. Zusatz: Inwiefern ist diese Kurve eindeutig?

Aufgabe 2 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Sei $r > 0$ und sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir bezeichnen mit rI das Intervall $\{t \in \mathbb{R} : t/r \in I\}$. Seien $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ und $\beta : rI \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert, und für alle $s \in I$ gelt $\kappa_\beta(rs) = \frac{1}{r}\kappa_\alpha(s)$.
Zeigen Sie: Es existiert eine orientierungserhaltende Isometrie F des $\mathbb{R}^2$, so dass $r\alpha(s) = F(\beta(rs))$ für alle $s \in I$ (α und β sind ähnlich).
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 auf dem Anwesenheitsblatt 4 und den Hauptsatz der ebenen Kurventheorie (Aufgabe 1 (b)).

(b) Für $a > 0$ bezeichne $\alpha_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmungsfunktion $\kappa_a(s) = \frac{s}{a^2}$, die sognenannte Klothoide mit Parameter a. Zeigen Sie: Für $a, b > 0$ sind α_a und α_b ähnlich im Sinne von (a). Bestimmen Sie den Streckfaktor r.

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve und $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Setze $m := \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$ und $r := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und es sei K der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r. K heißt Krümmungskreis von α in t_0. Zeigen Sie

(a) α berührt in t_0 den Krümmungskreis K von mindestens zweiter Ordnung.

(b) K ist der einzige Kreis, der von α in t_0 von mindestens zweiter Ordnung berührt wird.

Abgabe am Montag, 27. Mai 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.