Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)
Sei $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve und $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \alpha([0,T])$. Sei $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion für $\frac{\alpha(t)-p}{|\alpha(t)-p|}$, d.h. $\alpha(t) - p = r(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ wobei $r(t) = |\alpha(t) - p|$.
Indentifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \mapsto x + iy$, so geht $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ über in $e^{i\theta(t)}$, und es gilt $\alpha(t) - p = r(t)e^{i\theta(t)}$. Zeigen Sie:

(a) Für $t \in [0,T]$ gilt:

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - p} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t).$$

(b) Die Umlaufzahl von α um p errechnet sich durch

$$n_\alpha(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - p}dt.$$

Bemerkung. In der Funktionentheorie schreibt man dieses Integral auch als komplexes Kurvenintegral

$$\int_\alpha \frac{1}{z - p}dz.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve, $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

t_0 ist genau dann ein Scheitelpunkt, d.h. $\kappa'(t_0) = 0$, wenn die Kurve α in t_0 ihren Krümmungskreis von mindestens dritter Ordnung berührt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, C^1-geschlossene C^2-Kurve. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} (\kappa(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} \langle \alpha''(t), \alpha''(t)\rangle dt \geq 2\pi.$$

Diskutieren Sie den Gleichheitsfall.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis der isoperimetrischen Ungleichung.

Bonusaufgabe (2 Punkte)
Zeigen Sie durch Widerspruch, dass jedes komplexe Polynom

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 1$$

eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Umlaufzahl von $c_R(t) = P(Re^{it})$ bezüglich des Nullpunkts, und finden Sie eine geeignete Homotopie.

Abgabe am Montag, 03. Juni 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.