Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, C^2-geschlossene C^3-Kurve auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^L \tau(t)dt = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $\theta : [0, L] \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\alpha(t) = \cos\theta(t)N(t) + \sin\theta(t)B(t)$. Leiten Sie dann α ab und verwenden Sie die Frénet-Gleichungen.

Aufgabe 2 (3+1 = 4 Punkte) (Röhrenflächen)
Sei $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Krümmung nirgends verschwindet. Die Röhrenfläche vom Radius $r > 0$ um α wird parametrisiert durch $X : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$X(s, \phi) = \alpha(s) + r\cos\phi N(s) + r\sin\phi B(s).$$

(a) Zeigen Sie: X ist genau dann überall regulär, wenn $r < \frac{1}{\kappa(s)}$ für alle $s \in (a, b)$.

(b) Liegt $\alpha\big((a, b)\big)$ in einer Ebene, so stehen die Parameterlinien senkrecht aufeinander.

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte) (Rotationsflächen)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ eine Kurve, die ganz in der x-y-Ebene verläuft. Die Menge F, die man erhält, indem man das Bild von α um die x-Achse rotieren lässt, nennt man Rotationsfläche.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von F an. Unter welchen Vorraussetzungen ist diese Parametrisierung regulär?

(b) Sei speziell $\alpha(t) = (\cos t, 2 + \sin t, 0)$. Die Fläche, die durch Rotation von α um die x-Achse entsteht, heißt Rotationstorus. Fertigen Sie eine Skizze an.

Abgabe am Montag, 10. Juni 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.