

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Regelflächen)

Ein Flächenstück $X : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Form $X(t, s) = \alpha(t) + sV(t)$ heißt *Regelfläche*, wobei $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $V : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 ist.

- (a) Unter welchen Bedingungen ist X an der Stelle (t, s) regulär?
- (b) Zeigen Sie: Die Tangentialebene $T(X, (t, s))$ ist (wo sie existiert) genau dann unabhängig von s , wenn die Vektoren $\alpha'(t), V'(t)$ und $V(t)$ linear abhängig sind.

Ist $V(t) = \alpha(t) - p$ für ein $p \in \mathbb{R}^3$, so nennt man X einen (verallgemeinerten) Kegel (mit Spitze in p). Ist V konstant, so nennt man X einen (verallgemeinerten) Zylinder. Die Fläche $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}xy\}$ entspricht nach einer 45-Grad Drehung um die z -Achse dem hyperbolischen Paraboloid (Blatt 6, Aufgabe 2 (b)).

- (c) Skizzieren Sie einen Kegel und einen Zylinder.
- (d) Skizzieren Sie den hyperbolischen Paraboloid und finden sie eine Parametrisierung von P als Regelfläche. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kurve $\alpha(t) = (t, 0, 0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein *sphärisches Dreieck* ist eine in einer Hemisphäre von \mathbb{S}^2 enthaltene Menge Δ , die von 3 Großkreissegmenten der Länge $< \pi$ berandet wird. α, β, γ bezeichnen die Innenwinkel von Δ . Zeigen Sie, dass für die Oberfläche $A(\Delta)$ von Δ gilt:

$$A(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Anleitung: Berechnen Sie zuerst die Oberfläche eines von zwei halben Großkreisen berandeten "Zweiecks". Die zu Δ gehörenden Großkreise zerlegen \mathbb{S}^2 in 8 Dreiecke, wobei je zwei gegenüberliegende Dreiecke kongruent sind (die selbene Innenwinkel haben). Die Innenwinkel von Δ erzeugen 6 Zweiecke, die die Sphäre überdecken und sich nur in Δ und seinem gegenüberliegenden, kongruenten Dreieck überlappen.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Röhrenflächen)

Seien $r > 0$, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve so, dass $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ für alle $t \in (a, b)$. $X : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Röhrenfläche definiert durch

$$X(s, \phi) := \alpha(s) + r \cos \phi N(s) + r \sin \phi B(s)$$

- (a) Berechnen Sie die Oberfläche von $X|_{(a,b) \times (0, 2\pi)}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser und der Länge der Kurve α ?
- (b) Bestimmen Sie die Oberfläche des Rotationstoros (Blatt 5, Aufgabe 3 (b)).

Abgabe am Montag, 24. Juni 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.