
Aufgabe 1 (4 Punkte) (Regelflächen) Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, $V : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ genügend of differenzierbar und $X : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Regelfläche $X(t,s) = \alpha(t) + sV(t)$ mit $|V(t)| = 1$.

(a) Berechnen Sie an den Stellen, wo X regulär ist, die Koeffizienten der ersten und der zweiten Fundamentalform und zeigen Sie, dass überall $K \leq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie: $K \equiv 0 \iff \mathcal{T}(X,(s,t))$ ist unabhängig von s.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Möbiusband)

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform sowie die Gaußsche und mittlere Krümmung für das Flächenstück $X : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X(s,t) = (\cos s, \sin s, 0) + tV(s)$$

mit $V(s) = \cos(s/2)(\cos s, \sin s, 0) + \sin(s/2)(0,0,1)$.

(b) Zeigen Sie für alle $(s,t) \in \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dass $X(s,t) = X(s+2\pi, -t)$. Fertigen Sie ein (grobe) Zeichnung oder ein Papiermodell an. Zeichnen Sie speziell die Kurven $s \mapsto X(s,0)$ und $s \mapsto F(s, \pm\frac{1}{4})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2-Flächenstück mit $f(X(q)) = 0$ und $\nabla f(X(q)) \neq 0$ für alle $q \in U$. Zeigen Sie für $q \in U$ und $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$, dass

$$II_q(w_1, w_2) = -\frac{D^2 f(X(q))(DX(q)w_1, DX(q)w_2)}{\langle \nabla f(X(q)), N(q) \rangle}.$$

(b) Sei $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein (parametrisiertes) Flächenstück der Gestalt $X(u,v) = (u, v, g(u,v))$ für eine C^2-Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von X. *Hinweis*: Sie können z.B. $f(x,y,z) = g(x,y) - z$ setzen und Aufgabenteil (a) verwenden.

Abgabe am Montag, 01. Juli 2024, vor oder nach der Vorlesung beim Dozenten. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe oder den Name Ihres Tutors auf jedes Blatt.