Kurven und Flächen

Christian Ketterer

15. April 2024

Inhaltsverzeichnis

0 Begriffe der Euklidischen Geometrie

Gegeben sei $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, mit Euklidischem Skalarprodukt

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i =: \langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$$

Manchmal wird auch die Notation $a \cdot b := \langle a, b\rangle$ benutzt. Die Zugehörige Norm heißt Euklidische Norm: $|a| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Die Basis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is eine Orthonormalbasis (ONB), denn

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Euklidische Abstand ist $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $d(a, b) = |b - a|$. Es gilt

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$,
2. $d(a, b) = d(b, a)$,
3. $d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b)$ ($\triangle$-Ungleichung).

0.1 Definition. Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie* (von $(\mathbb{R}^n, d)$), falls

$$d(F(a), F(b)) = d(a, b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiele.

1. $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Translation $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_a(x) = x + a$, um $a \in \mathbb{R}^n$ ein Isometrie.
2. Sei $O(n) = \left\{A \in Gl(n, \mathbb{R}) : A^T \cdot A = E_n\right\}$ die Gruppe der orthogonal Matrizen. E_n bezeichnet die Einheitsmatrix, $Gl(n, \mathbb{R})$ die Familie der invertierenbarene Matrizen und A^T die zu A transponierte Matrix ($A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} =: (a_{i,j})$, dann $A^T = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} = (b_{i,j})$ mit $b_{i,j} = a_{j,i}$).

   Für $A \in O(n)$ ist die Abbildung $x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$ ein Isometrie.

   Beweis. Zunächst gilt
   $$\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle.$$
   Es reicht die Gleichung für $e_1, \ldots, e_n$ zu verifizieren. Es gilt
   $$\langle A^T e_i, e_j\rangle = b_{i,j} = a_{j,i} = \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle.$$
   Dann folgt für $A \in O(n)$:
   $$|Ay - Ax|^2 = \langle A(y - x), A(y - x)\rangle = \langle A^T A(y - x), y - x\rangle = |y - x|$$
   $\square$

Bezeichnung. $A \in SO(n) \iff A \in O(n)$ & $\det A = 1$.

Bemerkung. Die Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d)$ bilden eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung von Abbildungen.

0.2 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isometrie von $(\mathbb{R}^n, d)$. Dann $\exists A \in O(n)$ und $\exists a \in \mathbb{R}^n$, so dass $F(x) = Ax + b\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Setze $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Verkettung $\widetilde{A}(x) := T_{-a} \circ F(x) = F(x) - a$ eine Isometrie mit $\widetilde{A}(0) = 0$. Wir zeigen: $\exists A \in O(n)$ so dass $\widetilde{A}(x) = A \cdot x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} |y - x|^2 &= |\widetilde{A}(y) - \widetilde{A}(x)|^2 \\ &= \langle \widetilde{A}(y) - \widetilde{A}(x), \widetilde{A}(y) - \widetilde{A}(x) \rangle \\ &= \langle \widetilde{A}(y), \widetilde{A}(y) \rangle - 2\langle \widetilde{A}(x), \widetilde{A}(y) \rangle + \langle \widetilde{A}(x), \widetilde{A}(y) \rangle. \end{aligned}$$

Da $\widetilde{A}$ eine Isomtrie ist und $\widetilde{A}(0) = 0$, gilt $|\widetilde{A}(x)| = |x|$ und $|\widetilde{A}(y)| = |y|$. Ausserdem $\langle y - x, y - x \rangle = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2$. Damit folgt

$$\langle \widetilde{A}(x), \widetilde{A}(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Für eine ONB $e_1, \dots, e_n$ folgt: $\widetilde{A}(e_1), \dots, \widetilde{A}(e_n)$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^n$.
Wir können $\widetilde{A}(x)$ darstellen als

$$\widetilde{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{A}(e_i), \widetilde{A}(x) \rangle \widetilde{A}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \widetilde{A}(e_i).$$

Die Abbildungen $x \mapsto \langle e_i, x \rangle$ sind linear, also ist $\widetilde{A}$ linear, und die Darstellungsmatrix A ist ein Element von $O(n)$ wegen $\langle \widetilde{A}x, \widetilde{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.
Also ist $F(x) = Ax + b$. □

Bemerkung (Cauchy-Schwarz Ungleichung). Es gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Damit folgt $\frac{\langle x,y \rangle}{|x||y|} \in [-1, 1]$.

0.3 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel $\angle(a, b) \in [0, \pi]$ zwischen a und b ist definiert durch

$$\angle(a, b) := \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}\right).$$

0.4 Folgerung (Kosinussatz)**.** *Es gilt $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \cos \angle(a, b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}^n$.*

Gegeben seien n Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \mapsto \det(a_1, \dots, a_n) = \det A \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine multilineare, alternierende Abbildung, so dass $\det(e_1, \dots, e_n) = \det E_n = 1$.

Bemerkung. $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $A = (a, b)$. Dann $|\det A| = |a||b| \sin \angle(a, b)$.

Bezeichnung.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: D_\varphi \in SO(2) \ \ \& \ \ D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J.$$

0.5 Fakt. $a, b \in \mathbb{R}^2 : \ \langle Ja, b \rangle = \det(a, b)$.

Beweis. $\langle Ja, b \rangle = \langle \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rangle = -a_2 b_1 + a_1 b_2$. □

0.6 Definition (Kreuzprodukt)**.** Das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is definiert durch

$$v, w \in \mathbb{R}^3 \mapsto z = v \times w \in \mathbb{R}^3$$

wobei z der eindeutig bestimmte vektor mit $\langle z, x \rangle = \det(v, w, x)\ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung. Falls $v \times w = z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, dann gilt $z_i = \det(v, w, e_i)$. Zum Beispiel gilt

$$z_1 = \det(v, w, e_3) = v_3 w_2 - w_3 v_2.$$

1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Vorbemerkung: Alle Abbildungen werden (falls nicht anders gesagt) als C^∞ vorausgesetzt.

1.1 Definition. Eine parametrisiert Kurve ist einen Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eines Intervals $I \subset \mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^n$.

- α heißt regulär $\Leftrightarrow \alpha'(t) \neq 0\ \forall t \in I$,
- α heiß singulär an der Stelle $t \in I$ falls $\alpha'(t) = 0$.

Bezeichnung. $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{pmatrix}$.

$\alpha' : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Tangenten- oder Geschwindigkeitskurve.

Falls $\alpha'(t) \neq 0$, dann heißt die Menge $\mathcal{T}(\alpha, t) = \{\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) \in \mathbb{R}^n : \lambda \in \mathbb{R}\}$ Tangente von α an der Stelle $t \in I$.

$n = 3$: α heißt Raumkurve
$n = 2$: α heißt ebene Kurve.

Beispiele. 0. Geraden: $\alpha(t) = x + tv$, $t \in \mathbb{R}$ für $x, v \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \alpha'(t) = v$.

1. Funktionengraphen: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ C^∞.
   Dann ist $\alpha(t) = (t, f(t))$ eine ebene Kurve mit $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq 0\ \forall t \in I$.
   $\Rightarrow\ \alpha$ regulär.

2. Schraubenlinie (Helix): $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in [0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$.
   $\Rightarrow$ $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \Rightarrow \alpha$ ist regulär, falls $\mathbb{R}^2 \ni (a, b) \neq (0, 0)$.
   Das Bild der Kurve liegt im Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$.
   $(x(t), y(t))$ ist periodisch mit periode $T = 2\pi$. Der Wert $2\pi b$ heißt Ganghöhe.
   Für $b = 0$ liegt die Kurve in der xy-Ebene.

   Kreisrand in der Ebene: $\beta(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Ebenen Kurve mit $\beta'(t) = (-a\sin t, a\cos t) = J\beta(t)$. Also $\langle \beta(t), \beta'(t)\rangle = 0$ und $|\beta'(t)| = |\beta(t)| = a$.

3. $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ heißt parametrisierte "Neil'sche Parabel". α ist C^∞ aber $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$. Also ist α singulär in $t = 0$. Das Bild $\alpha(\mathbb{R})$ ist
$$\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) : x \geq 0, y = \pm(\sqrt{x})^3\} = \{(x, y) : y^2 = x^3\}.$$

4. $\alpha(t) = (t^3, t^6)$. $\alpha'(t) = (3t^2, 6t^5)$ also nicht regulär bei $t = 0$. Aber
$$\alpha(\mathbb{R}) = \{(x, y) : y \geq 0, y = (\sqrt{|x|})^6\} = \{(x, y) : y = x^2\} \Rightarrow \text{ Das Bild is eine Parabel.}$$

5. $\alpha(t) = (\sin t, \sin(2t))$. α ist periodisch: $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$. Skizziere Punkte in $\alpha(\mathbb{R})$:
$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (0, 0) \\ \alpha(\pi/4) &= (\sin(\pi/4), \sin(\pi/2)) = (\sqrt{2}/2, 1) \\ \alpha(\pi/2) &= (1, 0) \\ \alpha(3\pi/4) &= (\sqrt{2}/2, -1). \end{aligned}$$

6. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in \mathbb{R}$, zwei unterschiedliche parametrisierte Kurven. Aber $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$.
   Außerdem $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ und $\beta'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$. Damit $\beta'(t) = 2\alpha'(2t)$.
   "β durchläuft die selbe Strecke mit doppelter Geschwindigkeit".

1.2 Definition. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine Parametertransformation von α ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \to I$ wobei J ein Interval in $\mathbb{R}$, so dass φ und φ^{-1} unendlich oft differenzierbar sind (C^∞). $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ heißt Umparametrisierung von α.

Bemerkung. 1. $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \varphi^{-1} : I \to \mathbb{R}^n$,

2. $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in J$, denn aus $t = \varphi^{-1} \circ \varphi(t)$ folgt $1 = (\varphi^{-1})'(\varphi(t))\varphi'(t)$.
   Insbesondere: α regulär $\Leftrightarrow$ $\widetilde{\alpha}$ regulär.

3. Entweder $\varphi'(t) > 0$ $\forall t \in J$ oder $\varphi'(t) < 0$ $\forall t \in J$, denn falls $\exists t_1, t_2 \in J$ mit $t_1 < t_2$, $\varphi(t_1) > 0$ und $\varphi(t_2) < 0$, dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein t_0, so dass $\varphi(t_0) = 0$. Hier benützen wir, dass φ stetig differenzierbar und damit φ' stetig ist.

1.3 Definition. Eine Parametertransformation φ heißt orientierungserhaltend, falls $\varphi' > 0$.
Sonst heißt φ orientierungsumkehrend.

Bemerkung. Jede Parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend.

1.4 Definition. Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$\alpha \sim \widetilde{\alpha} \Leftrightarrow \exists \text{ Parametertransformation } \varphi, \text{ so dass } \widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi.$$

Bogenlänge

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve mit $I = [a, b]$. Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ is ein Tupel $(t_0, t_1, \dots, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$.
Die Länge des Polygonzugs der Punkte $\{\alpha(t_i)\}_{i=0,\dots,k}$ ist definiert durch

$$L_Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Eine Zerlegung $\widetilde{Z} = (s_0, \dots, s_l)$ ist eine Verfeinerung einer Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_k)$, falls $\{t_0, \dots, t_k\} \subset \{s_0, \dots, s_k\}$. Aus der $\triangle$-Ungleichung folgt, dass $L_Z(\alpha) \leq L_{\widetilde{Z}}(\alpha)$.

1.5 Definition. Die Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ is $L(\alpha) = \sup_Z L_Z(\alpha)$ wobei das Supremum bzgl. allen Zerlegungen Z von $[a, b]$ gebildet wird.

Eine parametrisierte Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar, falls $L(\alpha) < \infty$.

1.6 Proposition. *Sei $\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^1-Kurve, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $L(\alpha) < \infty$ und*

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt. \tag{1}$$

Beispiel. $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann $|\alpha'(t)| = \left| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Es folgt $L(\alpha) = 2\pi$.

1.7 Lemma. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $\tau \in [a, b]$. Dann*

$$L(\alpha) = L(\alpha|_{[a,\tau]}) + L(\alpha|_{[\tau,b]}).$$

Bemerkung. Für eine parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ und $J \subset I$ ein Interval ist $\alpha|_J$ die Einschränkung von α auf J. $\alpha|_J$ is somit ebenfalls eine parametrisierte Kurve.

Beweis von Lemma 1.7. Setze $I_1 = [a, \tau]$ und $I_2 = [\tau, b]$. Seien $Z_1 = (t_0, \dots, t_k)$ und $Z_2 = (s_0, \dots, s_l)$ jeweils Zerlegungen von I_1 und I_2. Dann ist das Tupel $(Z_1, Z_2) =: Z$ eine Zerlegung von I. Es folgt

$$L_{Z_1}(\alpha|_{I_1}) + L_{Z_2}(\alpha|_{I_2}) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| + \sum_{j=1}^{l} |\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})| = L_Z(\alpha) \leq L(\alpha).$$

Bilde Supremum bzgl. Z_1 und Z_2. Dann folgt $L(\alpha|_{I_1}) + L(\alpha|_{I_2}) \leq L_Z(\alpha)$.

Zum Beweis der Ungleichung $L(\alpha|_{I_1}) + L(\alpha|_{I_2}) \geq L_Z(\alpha)$ wähle eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots t_k)$ von $[a, b]$. Es gibt $j \in \{0, \dots, k-1\}$, so dass $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$. Dann sind $Z_1 = (t_0, \dots, t_j, \tau)$ und $Z_2 = (\tau, t_{j+1}, \dots, t_k)$ jeweils Zerlegungen von I_1 und I_2. Mit der $\triangle$-Ungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}
L_Z(\alpha) &= \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| + |\alpha(\tau) - \alpha(t_j)| + |\alpha(t_{j+1}) - \alpha(\tau)| + \sum_{i=j+2}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \\
&= L_{Z_1}(\alpha|_{I_1}) + L_{Z_2}(\alpha|_{I_2}) \leq L(\alpha|_{I_1}) + L(\alpha|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Nachdem wir das Supremum bzgl. Z bilden folgt $L(\alpha) \leq L(\alpha|_{I_1}) + L(\alpha|_{I_2})$. $\square$

Beweis der Proposition 1.6. Sei $Z = (t_0, \dots, t_k)$ ein Zerlegung von $[a, b]$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
L_Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}| &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\underbrace{\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1})}_{= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_j(s) ds}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left| \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_1'(s) ds, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_n'(s) ds \right) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(s) ds \right| \\
&\overset{\star}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(s)| ds = \int_a^b |\alpha'(s)| ds.
\end{aligned}$$

$s \in [a, b] \mapsto |\alpha'(s)|$ ist stetig. Damit existiert das Integral auf der rechten Seite und ist endlich. Bilde das Supremum bzgl. Z und es folgt $L(\alpha) \leq \int_a^b |\alpha'(s)| ds$.

Wir zeigen zunächst die Ungleichung $\star$: Sei $v = \Big(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_1'(s) ds, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_n'(s) ds \Big)$. Zu zeigen ist, dass $|v| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(s)| ds$. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
|v| = \langle \frac{v}{|v|}, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(s) ds \rangle &= \frac{1}{|v|} \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_j'(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{|v|} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \alpha_j'(s) \right)}_{\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |v||\alpha'(s)|} ds \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(s)| ds.
\end{aligned}$$

Es bleibt (1) in der Proposition zu zeigen. Sei

$$l : [a,b] \to \mathbb{R},\ l(t) = L(\alpha|_{[a,t]}).$$

Wir zeigen $l \in C^1([a,b])$ und $l'(t) = |\alpha'(t)|$. Dazu sei $t_1 < t_2$. Dann

$$\left|\frac{\alpha(t_2)-\alpha(t_1)}{t_2-t_1}\right| \leq \frac{L(\alpha|_{[t_1,t_2]})}{t_2-t_1} \overset{\text{Lemma 1.7}}{=} \frac{l(t_2)-l(t_1)}{t_2-t_1} \leq \frac{\int_{t_1}^{t_2}|\alpha'(s)|ds}{t_2-t_1}.$$

Für $t_2 \to t_1$ folgt, dass die linke und die rechte Seite der Ungleichung gegen $|\alpha'(t_1)|$ konvergieren, da α als C^1 vorausgesetzt ist. Damit existiert auch $l'(t_1)$ und $l'(t_1) = |\alpha'(t_1)|$.

Schließlich erhalten wir durch Integration von l:

$$\int_a^b |\alpha'(s)|ds = \int_a^b l'(s)ds = l(b) - l(a) = l(b) = L(\alpha).$$

□

1.8 Lemma. *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisiert Kurve. Die Bogenlänge $L(\alpha)$ ändert sich nicht bei Umparametrisierung.*

Beweis. Sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation und $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$. Dann

$$\widetilde{\alpha}'(s) = \alpha' \circ \varphi(s)\varphi'(s).$$

Es folgt

$$L(\widetilde{\alpha}) = \int_c^d |\widetilde{\alpha}'(s)|ds = \int_c^d |\alpha' \circ \varphi(s)||\varphi'(s)|ds = (\#)$$

Nun gilt entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$, und φ ist entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Somit

$$\begin{aligned}(\#) &= \pm\int_c^d |\alpha' \circ \varphi(s)| \cdot \varphi'(s)ds = \pm\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} |\alpha'(t)|dt = \begin{cases} \int_a^b |\alpha'(t)|dt & \varphi' > 0 \\ -\int_b^a |\alpha'(t)|dt & \varphi' < 0 \end{cases} \\ &= \int_a^b |\alpha'(t)|dt = L(\alpha).\end{aligned}$$

□

1.9 Definition. Wir sagen eine reguläre parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert, falls $|\alpha'(t)|$ konstant ist. Falls $|\alpha'(t)| = 1\ \forall t \in I$, dann heißt α nach Bogenlänge parametrisiert. Ist α nach BL parametrisiert, dann gilt

$$L(\alpha|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_1} |\alpha'(t)|dt = s_2 - s_1 \quad \text{(Man sagt: } \alpha \text{ ist längentreu).}$$

1.10 Proposition. *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ regulär. Dann gibt es eine Parametertransformation $\varphi : J \to I$, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach BL parametrisiert ist.*

Beweis. $t_0 \in I$. Setze

$$s \in I \mapsto \psi(s) = \begin{cases} \int_{t_0}^{s} |\alpha'(t)|dt & s \geq t_0 \\ -\int_{s}^{t_0} |\alpha'(t)|dt & t_0 < 0. \end{cases}$$

Dann ist $\psi \in C^1(I)$ mit $\psi'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ und sogar $C^\infty(I)$ da $\alpha \in C^\infty(I)$ und $\alpha' \neq 0 \Rightarrow$ ψ streng monoton wachsend.
$\Rightarrow \psi(I) = J$ ist ein Interval und $\psi : I \to J$ ist bijektiv.
Damit folgt, dass die Umkehrabbildung $\psi^{-1} : J \to I$ existiert. Sei $\psi^{-1} = \varphi$.
Es gilt $\varphi \in C^\infty(J)$ da $\varphi'(t) = \frac{1}{\psi' \circ \varphi(t)}$ (Satz über die Umkehrfunktion) und $\psi'(t) > 0$ $\forall t \in I$. $\Rightarrow |(\alpha \circ \varphi)'(t)| = |\alpha' \circ \varphi(t)| \frac{1}{\psi' \circ \varphi(t)} = 1$. Somit ist $\alpha \circ \varphi$ nach BL parametrisiert. □

Lokale Theorie ebener Kurven

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ reguläre Kurve. $0 \neq \alpha'(t) \in \mathbb{R}^2$. $T : I \to \mathbb{R}^2$, $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ heißt Einheitstangentenfeld von α.

Es existiert ein eindeutiges Normalenfeld: $N : I \to \mathbb{R}^2$, $N(t) = JT(t) = D_{\pi/2}T(t)$.
$(T(t), N(t))$, $t \in I$, ist eine positiv orientierte ONB.

Die Normale von α an der Stelle $t \in I$ ist die Menge $\mathcal{N}(\alpha, t) = \{\alpha(t) + \lambda N(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Sei nun $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ nach BL parametrisiert: $1 = |\alpha'(t)|^2 = |T(t)|^2$.

$$\Rightarrow 0 = \tfrac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = \langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle.$$

($\alpha''(t)$ ist die Beschleunigung von α in $t \in I$)

Es gilt $\alpha''(t) \perp T(t)$ und $\alpha''(t) \parallel N(t)$, d.h. existiert eine eindeutige Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$, so dass $\alpha''(t) = \kappa(t)N(t)$.

1.11 Definition. Die Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$ heißt Krümmung von α.

Beispiele.

1. $\alpha(t) = x + tv \Rightarrow \alpha'(t) = v$, $T(t) = \frac{v}{|v|}$, $N(t) = Jv$, $\alpha''(t) = 0$. Dann ist $\kappa(t) = 0$ $\forall t$.

2. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow |\alpha'(t)| = 1 \Rightarrow T(t) = \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $N(t) = JT(t) = -(\cos t, \sin t)$.
$\Rightarrow \alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t) \Rightarrow \kappa(t) = 1$.

   Falls $\widetilde{\alpha}(t) = \alpha(-t)$, dann folgt $\widetilde{\kappa}(t) = -1$.

1.12 Definition. Falls $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ für α nach BL parametrisiert und φ eine orientierungserhaltenden Parametertransformation, dann ist die Krümmung von $\widetilde{\alpha}$ definiert als $\widetilde{\kappa} := \kappa \circ \varphi$ wobei κ die Krümmung von α ist.

1.13 Lemma. *Sei $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ mit α nach BL parametrisiert und φ orientierungserhaltend. Dann*

$$\widetilde{\kappa}(t) = \frac{\det(\widetilde{\alpha}'(t), \widetilde{\alpha}''(t))}{|\widetilde{\alpha}'(t)|^3}.$$

Beweis. $\widetilde{\alpha}'(t) = \alpha' \circ \varphi(t)\varphi'(t)$ und $\widetilde{\alpha}''(t) = \alpha'' \circ \varphi(t)(\varphi'(t))^2 + \alpha' \circ \varphi(t)\varphi''(t)$.

$\alpha' \circ \varphi(t)\varphi'(t)$ und $\alpha' \circ \varphi(t)\varphi''(t)$ sind linear abhängig.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(\widetilde{\alpha}'(t), \widetilde{\alpha}''(t)) &= \det(\alpha' \circ \varphi(t)\varphi'(t), \alpha'' \circ \varphi(t)(\varphi'(t))^2)\\ &= (\varphi'(t))^3 \det(T \circ \varphi(t), \kappa \circ \varphi(t) N \circ \varphi(t)).\end{aligned}$$

Es gilt

$$\det(T \circ \varphi(t), \kappa(\varphi(t)) N \circ \varphi(t)) = \kappa \circ \varphi(t) \det(T, N) \circ \varphi(t) = \kappa \circ \varphi(t),$$

und, da φ orientierungserhaltend, $0 < \varphi'(t) = |\varphi'(t)| = |\widetilde{\alpha}'(t)|$. □

1.14 Proposition (Frenet Gleichungen)**.** *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach BL parametrisierte Kurve. Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung, $N : I \to \mathbb{R}^2$ das Normalenvektorfeld und $T : I \to \mathbb{R}^2$ das Tangentenvektorfeld. Dann gilt*

$$(T'(t), N'(t)) = (T(t), N(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es gilt $T'(t) = \alpha''(t) = \kappa(t)N(t) = (T(t), N(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa(t) \end{pmatrix}$. Es bleibt zu zeigen, dass $N'(t) = -\kappa(t)T(t) = (T(t), N(t)) \begin{pmatrix} -\kappa(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$1 = \langle N(t), N(t) \rangle \;\Rightarrow\; 0 = \langle N'(t), N(t) \rangle.$$

Da $(T(t), N(t))$ ONB, gibt es $\lambda : I \to \mathbb{R}$ so dass $N'(t) = \lambda(t)T(t)$. Außerdem gilt

$$0 = \langle T(t), N(t) \rangle \;\Rightarrow\; 0 = \underbrace{\langle T'(t), N(t) \rangle}_{=\kappa(t)} + \underbrace{\langle T(t), N'(t) \rangle}_{=\lambda(t)}.$$

$\Rightarrow \lambda = -\kappa$. □

Beispiel (Parallelkurven)*.* Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ nach BL parametrisiert.

$$\Rightarrow \quad \alpha_\lambda(t) = \alpha(t) + \lambda N(t)$$

$\Rightarrow \quad \alpha_\lambda'(t) = \alpha'(t) + \lambda N'(t) = T(t)(1 + \lambda\kappa(t)) = \alpha'(t)(1 + \lambda\kappa(t))$. Es folgt

$$\alpha_\lambda(t) \text{ singulär } \Leftrightarrow \alpha'(t) = -\lambda N'(t) = -\lambda\kappa(t)T(t) \;\Leftrightarrow\; \kappa(t) = -\frac{1}{\lambda}.$$

$\Rightarrow 1 + \lambda\kappa(t) > 0 \;\Rightarrow\; T_\lambda = T \;\Rightarrow\; N_\lambda = N$

$\Rightarrow 1 + \lambda\kappa(t) < 0 \;\Rightarrow\; T_\lambda = -T \;\Rightarrow\; N_\lambda = -N.$

Lokale Theorie von Raumkurven

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve und $t \in I$, so dass $\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t)) \neq 0$, insbesondere $\alpha'(t), \alpha''(t) \neq 0$. Die Ebene

$$\mathcal{S}(\alpha, t) = \{\alpha(t) + \rho\alpha'(t) + \sigma\alpha''(t) : (\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2\}$$

heißt Schmiegebene von α in $t \in I$.

Problem: Wahl eines Normalenvektors?

1.15 Definition (Frenet'sches 3-Bein)**.** α und t wie oben ($\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t)) \neq 0$). Dann heißen

1. $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = T(t)$ Einheitstangentenvektor,
2. $\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t)$ Hauptnormalenvektor,
3. $T(t) \times N(t) = B(t)$ Binormalenvektor.

Bemerkung. Der Hauptnormalenvektor $N(t)$ is der eindeutig bestimmte Einheitsvektor in $\mathcal{S}(\alpha, t) - \alpha(t)$, so dass $(T(t), N(t))$ eine ONB von $\mathcal{S}(\alpha, t) - \alpha(t)$ ist und so dass $(T(t), N(t))$ die gleiche Orientierung wie $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ hat.

Beweis der Bemerkung.

$$\langle T(t), T(t)\rangle = 1 \Rightarrow 0 = \tfrac{d}{dt}\langle T(t), T(t)\rangle = 2\langle T'(t), T(t)\rangle \Rightarrow 0 = \langle N(t), T(t)\rangle.$$

Also ist N orthogonal zu T. Außerdem

$$T'(t) = \left(\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\right)' = \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)| - \alpha'(t)(|\alpha'(t)|)'}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha''(t) + \left(\frac{1}{|\alpha'(t)|}\right)'\alpha'(t).$$

$\Rightarrow \operatorname{Span}(T(t), T'(t)) = \operatorname{Span}(\alpha'(t), \alpha''(t)) \Rightarrow (T(t), N(t))$ ist ONB von $\mathcal{S}(\alpha, t) - \alpha(t)$.
$(T(t), N(t))$ ist gleichorientiert wie $(\alpha'(t), \alpha''(t))$, falls $\det(T(t), N(t), T(t) \times N(t)) > 0$ genau dann, wenn $\det(\alpha'(t), \alpha''(t), T(t) \times N(t)) > 0$. Das folgt aus der Formel für $T'(t)$. $\square$

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert und $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall s \in I$. Dann

$$T'(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha''(t) = \alpha''(t) = |\alpha''(t)|N(t).$$

1.16 Satz (Frenet Formeln in 3D)**.** *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert und $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall s \in I$. Es gibt eindeutig bestimmte Funktionen $\kappa : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\tau : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$(T'(t), N'(t), B'(t)) = (T(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. **1.** $T'(t) = |\alpha''(t)|N(t)$. Sei also $\kappa(t) = |\alpha''(t)|$. $\Rightarrow T'(t) = (T(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $1 = \langle N, N \rangle \;\Rightarrow\; 0 = 2\langle N'(t), N(t) \rangle$.

$$\begin{aligned} 0 = \langle T, N \rangle \;&\Rightarrow\; 0 = \langle T'(t), N(t) \rangle + \langle T(t), N'(t) \rangle \\ &\Rightarrow\; \langle T(t), N'(t) \rangle = -\langle T'(t), N(t) \rangle = -\kappa(t). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Funktion $\tau : I \to \mathbb{R}$, so dass $N'(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) = (T(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} -\kappa(t) \\ 0 \\ \tau(t) \end{pmatrix}$.

3. Definiere $\tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle N, B \rangle = 0 \;&\Rightarrow\; \langle N, B' \rangle = -\langle N', B \rangle = -\tau \\ \langle B, B \rangle = 1 \;&\Rightarrow\; \langle B, B' \rangle = 0 \\ \langle T, B \rangle = 0 \;&\Rightarrow\; \langle T, B' \rangle = -\langle T', B \rangle = -\kappa\langle N, B \rangle = 0 \end{aligned}$$

Es folgt $B' = -\tau N$. $\Rightarrow (T', N', B') = (T, N, B) \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix}$. □

1.17 Definition. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert mit $\alpha''(t) \neq 0 \;\forall t \in I$. $\kappa : I \to [0, \infty)$ heißt Krümmung, $\tau : I \to \mathbb{R}$ heißt Windung (oder Torsion) von α.

Falls $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, so dass $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ für eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi : I \to J$ und $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert, dann verlangen wir von der Krümmung $\widetilde{\kappa}$ und der Windung $\widetilde{\tau}$ der Kurve $\widetilde{\alpha}$, dass jeweils $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$ und $\widetilde{\tau} = \tau \circ \varphi$ gilt.

1.18 Lemma. *Sei $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\widetilde{\alpha}'(t) \times \widetilde{\alpha}''(t) \neq 0 \;\forall t \in I$. Dann*

$$\widetilde{\kappa}(t) = \frac{|\widetilde{\alpha}'(t) \times \widetilde{\alpha}''(t)|}{|\widetilde{\alpha}'(t)|^3}, \quad \widetilde{\tau}(t) = \frac{\det(\widetilde{\alpha}'(t), \widetilde{\alpha}''(t), \widetilde{\alpha}'''(t))}{|\widetilde{\alpha}'(t) \times \widetilde{\alpha}''(t)|^2} = \frac{\langle \widetilde{\alpha}'(t) \times \widetilde{\alpha}''(t), \widetilde{\alpha}'''(t) \rangle}{|\widetilde{\alpha}'(t) \times \widetilde{\alpha}''(t)|^2}.$$

Beweis. Sei α nach BL parametrisiert, so dass $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ mit Parametertransformation φ.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\alpha}' = (\alpha' \circ \varphi)\varphi' \;\Rightarrow\; \frac{\widetilde{\alpha}'}{\varphi'} = \alpha' \circ \varphi \text{ und } |\widetilde{\alpha}'| = |\varphi'| = \varphi' \\ &\widetilde{\alpha}'' = \alpha'' \circ \varphi(\varphi')^2 + \alpha' \circ \varphi\varphi'' \\ &\widetilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi = |\alpha''| \circ \varphi = |\alpha' \times \alpha''| \circ \varphi = |\varphi'|^{-3}|\widetilde{\alpha}' \times \widetilde{\alpha}''| = \frac{|\widetilde{\alpha}' \times \widetilde{\alpha}''|}{|\widetilde{\alpha}'|^3}. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung in der letzten Zeile ergibt sich mit der Definition des Kreuzproduktes aus

$$|\alpha' \times \alpha''|^2 = \det(\alpha', \alpha'', \alpha' \times \alpha'') = \det(T, N, B)\kappa^2 = |\alpha''|^2.$$

□

Beweis Lemma 1.18 (Fortsetzung). Man berechnet auch

$$\widetilde{\alpha}''' = \alpha''' \circ \varphi(\varphi')^3 + 3\alpha'' \circ \varphi\varphi'\varphi'' + \alpha' \circ \varphi\varphi'''.$$

Für die Windung berechnet man

$$\widetilde{\tau} = \tau \circ \varphi = \langle B, N' \rangle \circ \varphi = \langle T \times N, N' \rangle \circ \varphi = \det(T, N, N') \circ \varphi$$

und $\alpha''' = (\kappa N)' = \kappa' N + \kappa N' \Rightarrow N' = \frac{\alpha'''}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa} N$. Es folgt

$$\widetilde{\tau} = \frac{1}{\kappa^2 \circ \varphi} \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') \circ \varphi = \underbrace{\frac{1}{\kappa^2 \circ \varphi} \frac{1}{(\varphi')^6}}_{|\widetilde{\alpha}' \times \widetilde{\alpha}''|^2} \det(\widetilde{\alpha}', \widetilde{\alpha}'', \widetilde{\alpha}''') \circ \varphi.$$

Die letzte Gleichung des Lemmas folgt aus einer Eigenschaft des Kreuzprodukts. □

Bemerkung. $(T(t), N(t), B(t)) =: A(t) \in SO(3) \Rightarrow A^T A = E_3$
$\Rightarrow A^T A' = -(A^T)' A = -(A')^T A$.
Frenet Formeln: $A'(t) = A(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}}_{=:C(t)}$.
$\Rightarrow C = A^T A C = A^T A' = -(A')^T A = -(AC)^T A = -C^T A^T A = -C^T \Rightarrow C$ ist schiefsymmetrisch

Eigenschaften von κ und τ.

(i) Falls $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ für einen C^3-Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{I} \to I$ (und α nicht notwendig nach BL parametrisiert), dann $\widetilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$ und $\widetilde{\tau} = \tau \circ \varphi$. Insbesondere hängen τ und κ_{Raum} (im Unterschied zu κ_{Ebene}) nicht von der Durchlaufrichtung ab.

(ii) Falls $\alpha(I) \subset E$, $E \subset \mathbb{R}^3$ ist eine affine Ebene (d.h. es gibt eine Isometrie F des $\mathbb{R}^3$ so, dass $F(E) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$), dann $\kappa_{Raum} = |\kappa_{Ebene}|$ und $\tau = 0$.

(iii) Sei $F(x) = Ax + b$ mit $A \in O(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{\alpha} = F \circ \alpha$. Dann gilt $\kappa = \widetilde{\kappa}$ und $\widetilde{\tau} = \underbrace{\det A}_{\pm 1} \cdot \tau$.

Bezeichnung. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert und $\alpha'' \neq 0$.

$$\begin{aligned} \tau > 0 \ &\Rightarrow \ \alpha \ \text{ heißt rechtsgewunden,} \\ \tau < 0 \ &\Rightarrow \ \alpha \ \text{ heißt linksgewunden.} \end{aligned}$$

Bemerkung. α regulär. Dann ist κ durch $\kappa(t_0) = 0$ auf Punkte $t_0 \in I$ mit $\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) = 0$ stetig fortsetzbar (falls $|\alpha'| = 1$, gilt bereits $\kappa(t) = |\alpha''(t)|$ für alle t). Im allgemeinen ist κ nicht differenzierbar fortsetzbar.
Die Windung τ ist im Allgemeinen nicht stetig fortsetzbar auf solche t_0.

Beispiel (Schraubenlinie). $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$ und $b \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)\ \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}\\
&\Rightarrow\ \alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)\ \Rightarrow |\alpha''(t)| = a\\
&\Rightarrow\ |\alpha' \times \alpha''| = |\alpha'|\cdot|\alpha''|\underbrace{\sin\angle(\alpha',\alpha'')}_{1} = \sqrt{a^2+b^2}a\\
&\Rightarrow\ \kappa(t) = \frac{|\alpha'(t)\times\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{a}{a^2+b^2},\\
\tau(t) &= \frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t))}{|\alpha'(t)\times\alpha''(t)|^2} = \frac{ba^2\cos^2 t + ba^2\sin^2 t}{(\sqrt{a^2+b^2}a)^2} = \frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Beachte

$$\alpha'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)\ \rightarrow\ (\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)) = \begin{pmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t\\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t\\ b & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Erklärung zur Konstanz von κ und τ einer Schraubenlinie. Betrachte die 1-Parameter Familie von Isometrien (Schraubung) $F_t(x) = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{D_t}} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}0\\0\\bt\end{pmatrix}$ mit $F_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $F_{t+s} = F_t \circ F_s$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \alpha(t) = F_t((a,0,0))\\
&\Rightarrow\ \alpha(t+t_0) = F_{t+t_0}((a,0,0)) = F_{t_0}\circ F_t((a,0,0)) =: \alpha^{t_0}(t)
\end{aligned}$$

Damit ist α^{t_0} eine Umparametrisierung von α und somit $\kappa_{\alpha^{t_0}}(t) = \kappa_\alpha(t+t_0)$.
Andererseits ensteht α^{t_0} durch Komposition mit der Isometrie F_{t_0}. Also auch $\kappa_\alpha(t) = \kappa_{\alpha^{t_0}}(t)\ \forall t, t_0 \in \mathbb{R}$.
Es folgt $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\alpha(t+t_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \kappa_\alpha = const$.

Bemerkung (Geometrische Bedeutung von κ und τ). Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit $|\alpha'| = 1$, $\alpha'' \neq 0$.

$\kappa = |T'| = |$Änderungsgeschwindigkeit$|$ der Tangentialrichtung als Fkt der BL

$|\tau| = |B'| = |$Änderungsgeschwindigkeit$|$ der Binormalenrichtung als Fkt der BL

1.19 Fakt. *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regulär.*

(i) $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha(I) \subset$ Gerade.

(ii) Falls $\kappa(t) > 0\ \forall t \in I$, dann: $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha(I) \subset$ affine Ebene.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $|\alpha'| \equiv 1$.

(i) $\kappa \equiv 0\ \Rightarrow\ \alpha'' = 0\ \Rightarrow\ \alpha(s) = v = const\ \Rightarrow\ \alpha(s) = \alpha(s_0) + (s-s_0)v$.

(ii) $\tau \equiv 0\ \Leftrightarrow\ B' = 0\ \Leftrightarrow\ B(s) = B_0 = const$
$\Leftrightarrow\ \langle\alpha(s), B_0\rangle' = \langle\alpha'(s), B_0\rangle = \langle T(s), B(s)\rangle = 0$
$\Leftrightarrow\ \langle\alpha(s), B_0\rangle = const = c$
$\Leftrightarrow \alpha$ liegt in der affinen eben $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, B_0\rangle = c\}$.

$\square$

1.20 Satz (Lokale Normalform)**.** *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisiert, $\kappa > 0$ und $0 \in I$. Ohne Einschränkung (nach Anwendung einer Isometrie des $\mathbb{R}^3$) sei $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = T'(0) = e_1$, $N(0) = e_2$ und $B(0) = e_3$ ($\Rightarrow$ $\mathcal{S}(\alpha, 0) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$). Dann gilt für $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$:*

$$\begin{array}{rcccc} x(t) = & t & & -\frac{\kappa(0)^2}{6}t^3 & +R^x(t)t^3 \\ y(t) = & & \frac{\kappa(0)}{2}t^2 & +\frac{\kappa'(0)}{6}t^3 & +R^y(t)t^3 \\ z(t) = & & & \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}t^3 & +R^z(t)t^3 \end{array}$$

mit $\lim_{t\to 0} R^{x/y/z}(t) = 0$.

Beweis. Aus der Taylorentwicklung folgt

$$\alpha(t) = \underbrace{\alpha(0)}_{0} + \underbrace{\alpha'(0)}_{e_1} t + \frac{1}{2}\underbrace{\alpha''(0)}_{\kappa(0)e_2} t^2 + \frac{1}{6}\alpha'''(0)t^3 + \underbrace{R(t)}_{\begin{pmatrix} R^x(t) \\ R^y(t) \\ R^z(t) \end{pmatrix}} t^3.$$

Außerdem folgt $\alpha'' = \kappa N$, dass $\alpha'''(t) = \kappa'(t)N(t) + \kappa(t)N'(t)$. Aus den Frenet Gleichungen folgt: $N' = -\kappa T + \tau B$. Deshalb gilt

$$\alpha'''(0) = -\kappa(0)^2 e_1 + \kappa'(0)e_2 + \kappa(0)\tau(0)e_3.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung (Orthogonalprojektionen von α auf die Ebenen $\mathbb{R}^2 \times 0$, $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^2$). Um die Projektion zu verstehen, vernachlässigen wir Terme der Ordnung 3 und höher in $x(t)$ und in $y(t)$. Wir nehmen an $x(t) = t$.

$$\Rightarrow \widetilde{y}(x) = \widetilde{\kappa}(0)\frac{x^2}{2} + \widetilde{R}^y(x)x^3 \text{ (Projektion auf die Schmiegebene)}$$
$$\Rightarrow \widetilde{z}(x) = \widetilde{\kappa}(0)\widetilde{\tau}(0)\frac{x3}{6} + \widetilde{R}^z(x)x^3.$$

Die Umkehrfunktion $t^+(\cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ von y auf $[0, \infty)$ ist $t(y) = \sqrt{\frac{2}{\kappa(0)}y}$. Wir definieren auch $t^- : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$ mit $t^-(y) = -\sqrt{\frac{2}{\kappa(0)}y}$. Dann

$$z \circ t^{\pm}(y) = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6\sqrt{\kappa(0)}}(2)^{\frac{3}{2}}(\pm\sqrt{|y|})^3 + \widetilde{R}^z(y)y^{\frac{3}{2}} \;\; \forall y \in \mathbb{R}.$$

(Neilsche Parabel)

1.21 Satz (Hauptsatz der Raumkurventheorie)**.** *Seien $f : I \to \mathbb{R}_{>0}$ C^{k+1} und $g : I \to \mathbb{R}$ C^k für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert bis auf orientierungserhaltende Isometrien genau eine nach BL parametrisierte C^{k+3}-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit Krümmung $\kappa = f$ und Windung $\tau = g$.*

Beweis. **1.** Eindeutigkeit. Seien $\alpha, \widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ nach BL parametrisierte C^{k+3}-Kurven mit $\kappa = \widetilde{\kappa}$ und $\tau = \widetilde{\tau}$. Ohne Einschränkung sei $0 \in I$ (nach Umparametrisierung) und

$$\alpha(0) = \widetilde{\alpha}(0),\ T(0) = \widetilde{T}(0),\ N(0) = \widetilde{N}(0),\ B(0) = \widetilde{B}(0)$$

nach Anwendung einer orientierungserhaltenden Isometrie. Sei

$$h(s) = |T(s) - \widetilde{T}(s)|^2 + |N(s) - \widetilde{N}(s)|^2 + |B(s) - \widetilde{B}(s)|^2.$$

$\Rightarrow h(0) = 0$ und mit den Frenet Formeln folgt

$$\begin{aligned} h' &= 2\langle (T - \widetilde{T}), \kappa(N - \widetilde{N})\rangle + 2\langle (N - \widetilde{N}), -\kappa(T - \widetilde{T}) + \tau(B - \widetilde{B})\rangle + 2\langle (B - \widetilde{B}), -\tau(N - \widetilde{N})\rangle \\ &= 2\kappa\langle T - \widetilde{T}, N - \widetilde{N}\rangle - 2\kappa\langle T - \widetilde{T}, N - \widetilde{N}\rangle + 2\tau\langle N - \widetilde{N}, B - \widetilde{B}\rangle - 2\tau\langle B - \widetilde{B}, N - \widetilde{N}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Mit $h(0) = 0$ folgt $h \equiv 0$. $\Rightarrow T = \widetilde{T}$ ($N = \widetilde{N}$, $B = \widetilde{B}$). Mit $\alpha(0) = \widetilde{\alpha}(0)$ folgt $\alpha \equiv \widetilde{\alpha}$.

2. Existenz. Gesucht ist eine 3×3 Matrix $A(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^T$ mit

$$A'(s) = A(s) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -f(s) & 0 \\ f(s) & 0 & -g(s) \\ 0 & g(s) & 0 \end{pmatrix}}_{=C(s)}. \tag{2}$$

C ist schiefsymmetrisch ($C^T = -C$). (2) is eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten gegeben durch die Komponentenfunktionen der Matrix $A : I \to \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Durch Anwendung des Existenzsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen (Picard-Lindelöf) folgt

$$\exists A : I \to \mathbb{R}^{3\times 3}\ C^{k+1}\text{-Lösung von (2) mit } A(0) = E_3.$$

Behauptung: $A(s) \in SO(3)\ \forall s \in I$.

Beweis der Behauptung.

$$\begin{aligned} (A \cdot A^T)' &= A' \cdot A^T + A \cdot (A^T)' = A' \cdot A^T + A \cdot (A')^T \\ &= A' \cdot A^T + A \cdot (AC)^T = ACA^T + AC^T A^T = A(C + C^T)A^T = 0. \end{aligned}$$

Es folgt $A \cdot A^T = A \cdot A^T = E_3\ \forall s \in I$. $\Rightarrow A \in SO(3)\ \forall s \in I$. □

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ gegeben durch $A = (A_1, A_2, A_3)$ bilden positiv orientierte ONB. Wir definieren nun

$$\alpha(s) = \int_0^s A_1(\sigma) d\sigma \ \Rightarrow\ \alpha'(s) = T(s) = A_1(s) \text{ Insbesonere: } |\alpha'| \equiv 1.$$

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ist eine nach BL parametrisierte C^{k+2}-Kurve.
Aus (2) folgt außerdem (A_1, A_2, A_3) ist das Frenet'sche 3-Bein (T, N, B) von α mit Krümmung $\kappa = f$ und Windungn $\tau = g$.
Da $T' = \kappa N$ mit κ und N in C^{k+1}, folgt T ist C^{k+2} und somit $\alpha \in C^{k+3}(I, \mathbb{R}^3)$. □

Folgerung. *Sei $f \equiv \kappa_0 \equiv const > 0$ und $g \equiv \tau_0 = const$. Dann ist α (bis auf Parametertransformation und Isometrie) eine Schraubenlinie.*
(Setze $a = (\kappa_0^2 + \tau_0^2)\kappa_0$ und $b = (\kappa_0^2 + \tau_0^2)\tau_0$ und betrachte die zugehörige Schraubenlinie. Dann ist die zugehörige Krümmung κ_0 und die Windung τ_0.
Die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeit einer Kurve α mit gegebener Krümmung und gegebener Windung.)

1.22 Satz (Schmiegkugel)**.** *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ so dass $|\alpha'| = 1$ und $s_0 \in I$ mit $\kappa(s_0) > 0$ und $\tau(s_0) \neq 0$. Dann gibt es genau eine Kugel, die sogenannte Schmiegkugel, die von α in s_0 von mindestens* 3. *Ordnung berührt wird. Ihr Mittelpunkt ist*

$$m(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2 \tau(s_0)^2} B(s_0)$$

und ihr Radius

$$r(s_0) = \left(\left(\frac{1}{\kappa(s_0)} \right)^2 + \left(\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2 \tau(s_0)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung. Wir sagen α schmiegt sich in s_0 an $\partial K_r(m) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - m| = r\}$ (den Rand der Kugel mit Mittelpunkt m und Radius r) mit 3. Ordnung, falls $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0$ für $g(s) = |\alpha(s) - m| - r$.

Lemma. *Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) \neq 0$, und $f = h \circ g$. Dann gilt*

$$g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0.$$

Beweis. Beweis als Anwesenheitsaufgabe in Übung. □

Beweis von Satz 1.22. Sei $f = h \circ g = |\alpha(s) - m|^2 - r^2$ mit $m \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$, und $h(x) = (x - r)^2 - r^2$.
Mit dem Lemma folgt: α schmiegt sich an $\partial K_r(m)$ von 3. Ordnung an g.d.w. $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$.

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
f(s_0) = 0 &\Leftrightarrow r^2 = |\alpha(s_0) - m|^2 = \langle \alpha(s_0) - m, \alpha(s_0) - m\rangle \;\Leftrightarrow\; r = |\alpha(s_0) - m|,\\
f'(s_0) = 0 &\Leftrightarrow 2\langle \alpha'(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha(s_0) - m \perp T(s_0)\\
f''(s_0) = 0 &\Leftrightarrow 2\langle \underbrace{\alpha''(s_0)}_{\kappa(s_0)N(s_0)}, \alpha(s_0) - m\rangle + 2\underbrace{\langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0)\rangle}_{1} = 0\\
&\Leftrightarrow \langle N(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle = -\frac{1}{\kappa(s_0)}\\
f'''(s_0) = 0 &\Leftrightarrow 2\kappa'(s_0)\langle N(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle + 2\kappa(s_0)\langle N'(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle\\
&\qquad + 2\kappa(s_0)\underbrace{\langle N(s_0), T(s_0)\rangle}_{0} = 0\\
&\overset{\text{Frenet Formeln}}{\Leftrightarrow} \langle \kappa'(s_0)N(s_0) + \kappa(s_0)(-\kappa(s_0)T(s_0) + \tau(s_0)B(s_0)), \alpha(s_0) - m\rangle = 0\\
&\overset{\text{(falls zusätzl } f'(s_0)=0)}{\Leftrightarrow} \langle \kappa'(s_0)N(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)B(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle = 0\\
&\overset{\text{(falls zusätzl } f''(s_0)=0)}{\Leftrightarrow} \frac{-\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)} + \kappa(s_0)\tau(s_0)\langle B(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \langle B(s_0), \alpha(s_0) - m\rangle = \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2\tau(s_0)}
\end{aligned}
$$

Also folgt: $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s_0) - m = \frac{-1}{\kappa(s_0)}N(s_0) + \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)^2\tau(s_0)}B(s_0)$. $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

Bemerkung. Hauptsatz $\Rightarrow$ Alle geometrischen (d.h. isometrie-invarianten) Eigenschaften von α sind durch die Funktionen κ und τ (als Funktionen der BL) ausdrückbar.

1.23 Folgerung. *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit $|\alpha'| \equiv 1$, $\kappa(s) > 0$ und $\tau(s) \neq 0$ $\forall s \in I$. Dann gilt*

$$\alpha \text{ verläuft auf einer Kugeloberfläche} \;\Leftrightarrow\; \frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0.$$

Beweis. **1.** $m(s)$ is der Mittelpunkt der Schmiegkugel in $\alpha(s)$.
Falls α auf einer Kugeloberfläche $\partial K_r(m)$ verläuft, dann gilt $f(s) \equiv 0$ und somit ist $m(s) \equiv const.$
Andererseits

$$
\begin{aligned}
m(s) = const = m \in \mathbb{R}^3 &\Rightarrow r(s)^2 = |\alpha(s) - m|^2\\
&\Rightarrow 2r'(s)r(s) = 2\langle \underbrace{\alpha(s) - m}_{\in \mathrm{Span}(N(s),B(s))}, \underbrace{\alpha'(s)}_{T(s)}\rangle = 0\\
&\Rightarrow\; r'(s) = 0\\
&\Rightarrow\; r(s) \equiv const.
\end{aligned}
$$

Also ist die Schmiegkugel constant (m(s) und $r(s)$ sind constant).
Wir haben also gezeigt: α verläuft auf einer Kugeloberfläche $\Leftrightarrow$ m(s) $\equiv$ *const.*

2. $m(s) = const \Leftrightarrow \mathrm{m}'(s) = 0$

$$\Leftrightarrow \; \alpha' + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' N + \frac{1}{\kappa}\left(-\kappa T + \tau B\right) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}\right)' B(s) + \frac{\kappa'}{\kappa^2} N \equiv 0$$
$$\Leftrightarrow \; \frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}\right)' \equiv 0.$$

□

2 Globale Ergebnisse über Kurven

Die Umlaufzahl

2.1 Definition. $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, heißt C^k-geschlossene, parametrisierte Kurve

$\iff$ α ist C^k und für die Ableitungen bei 0 und T gilt $\alpha^{(j)}(0) = \alpha^{(j)}(T) \;\; \forall j = 1, \ldots, k$
$\iff$ $\alpha(0) = \alpha(T)$ und die T-periodische Fortsetzung von α auf $\mathbb{R}$ ist C^k.

Die T-periodische Fortsetzung von $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(0) = \alpha(T)$ ist

$$\hat{\alpha}(t) = \alpha(t - [t])$$

wobei $[t] = \max\{kT \in \mathbb{R} : kT < t, k \in \mathbb{N}\}$.

Bezeichnung. T heißt Periode von α.
α heißt einfach geschlossen (doppelpunktfrei), falls $\alpha|_{[0,T)}$ injektiv ist.

Beispiel. Sei $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. $\alpha|_{[0,\pi]}$ ist C^0-geschlossen, aber nicht C^1-geschlossen. $\alpha|_{[0,2\pi]}$ ist C^∞-geschlossen, aber nicht einfach geschlossen.

Bemerkung. $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ regulär, C^k-geschlossen. $\Rightarrow \exists$ Umparametrisierung $\widetilde{\alpha} : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ von α nach BL is C^k-geschlossen, wobei $L = \int_0^T |\alpha'(t)| dt$.

2.2 Satz (Winkelfunktion)**.**

*(i) Sei $e : [0,T] \to \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ stetig und sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $e(0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.
$\Rightarrow \exists!$ eine stetige Funktion $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ mit $\theta(0) = \theta_0$ und $e(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ $\forall t \in [0,T]$.*

*(ii) Allgemeiner: Sei $e : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{S}^1$ stetig, so dass $e(0,a) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.
$\Rightarrow \exists!$ ein stetiges $\theta : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\theta(0,a) = \theta_0$ und*

$$e(t,\sigma) = (\cos\theta(t,\sigma), \sin\theta(t,\sigma)) \;\; \forall (t,\sigma) \in [0,T] \times [a,b]. \tag{3}$$

Ein $\theta : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{S}^1$, so dass (3) gilt, heißt Winkelfunktion für e.

Beweis. **1.** Wir nehmen zunächst an, dass $e([0,T]) \subset S_R, S_L, S_O$ oder S_U, wobei

$$S_R := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \quad S_L := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$
$$S_O := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in R^2 : y > 0\} \quad S_U := \mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$$

Falls $e([0,T]) \subset S_R$, dann muss $\tan\theta(t) = \frac{e_2(t)}{e_1(t)}$ sein und wir können θ durch $\theta(t) = \arctan\left(\frac{e_2(t)}{e_1(t)}\right) + 2k_0\pi$ definieren.
$k_0 \in \mathbb{Z}$ muss dann gewählt werden, so dass $\theta_0 = \arctan\left(\frac{e_2(0)}{e_1(0)}\right) + 2k_0\pi$.
Dann ist die gesuchte Winkelfuntion $\theta(t) = \arctan\left(\frac{e_2(t)}{e_1(t)}\right) + k_0 2\pi$.
Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dieser Formel (nach der Wahl von k_0 ist die Funktion $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt und erfüllt $e(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$).

Dasselbe Vorgehen ist möglich, falls

$$\begin{aligned}
e([0,T]) \subset S_L :\Rightarrow\ \theta(t) &= \arctan\frac{e_2(t)}{e_1(t)} + 2k_0\pi \\
e([0,T]) \subset S_O :\Rightarrow\ \theta(t) &= \operatorname{arcot}\frac{e_1(t)}{e_2(t)} + 2k_0\pi \\
e([0,T]) \subset S_U :\Rightarrow\ \theta(t) &= \operatorname{arcot}\frac{e_1(t)}{e_2(t)} + 2k_0\pi
\end{aligned}$$

2. Allgemeine Situation: Unterteile $[0,T]$ in $t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \cdots \le t_m = T$ so, dass $e([t_i, t_{i+1}]) \subset S_* \ \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}$ wobei $* = R, L, O$ oder U.
Dann folgt mit dem ersten Beweisschritt:

$$\begin{aligned}
&\exists!\theta^1 : [t_0, t_1] \to S_* \text{ wie gewünscht mit } \theta^1(t_0) = \theta(0) = \theta_0. \\
&\exists!\theta^2 : [t_1, t_2] \to S_* \text{ wie gewünscht mit } \theta^2(t_1) = \theta^1(t_1). \\
&\vdots \\
&\exists!\theta^{m-1} : [t_{m-1}, t_m] \to S_* \text{ wie gewünscht mit } \theta^{m-1}(t_{m-1}) = \theta^{m-2}(t_{m-1}).
\end{aligned}$$

Definiere nun $\theta : [0,T] \to \mathbb{S}^1$ duch $\theta(t) = \begin{cases} \theta^1(t) & t \in [t_0, t_1] \\ \vdots & \\ \theta^{m-1}(t) & t \in [t_{m-1}, t_m]. \end{cases}$
Dieses $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ ist stetig, erfüllt $e(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ und ist durch die Konstruktion eindeutig.

3. Sei nun $e : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $e((0,a)) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$. Setze $x_0 = (0,a)$ und $[0,T] \times [a,b] = D$.
Bemerkung. D ist sternförmig bzgl. x_0, d.h. $(1-t)x_0 + tx = \gamma_x(t) \subset D \ \forall x \in D$.
Betrachte $e_x = e \circ \gamma_x : [0,1] \to \mathbb{S}^1$.
2. $\Rightarrow \exists!\ \theta_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\theta_x(0) = \theta_0$ und $e_x(t) = (\cos\theta_x(t), \sin\theta_x(t))$, stetig.

Definiere θ durch $\theta(x) = \theta_x(1)$
$\Rightarrow e(x) = e_x(1) = (\cos\theta_x(1), \sin\theta_x(1)) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$,
und $\theta((0,a)) = \theta(x_0) = \theta_{x_0}(1) = \theta_0$, da $e_{x_0}(t) = \mathit{const} = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

Somit erfüllt θ die Eigenschaft $e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ und ist eindeutig, denn falls

$\widetilde{\theta}$ eine andere solche Funktion ist, dann folgt aufgrund der Eindeutigkeit von θ_x, dass $\theta_x(t) = \widetilde{\theta}((1-t)x_0 + tx)\ \forall t \in [0,1]$. Insbesondere $\theta(x) = \theta_x(1) = \widetilde{\theta}(x)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\theta : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$ ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben.

Wähle $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$, so dass $e_x([t_i, t_{i+1}]) \subset S_R,\ S_L,\ S_O$ oder $S_U\ \forall i$.

e ist stetig auf D, und D ist kompakt, also ist e gleichmässig stetig.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $|e_x(t) - e_y(t)| = |e((1-t)x_0 + tx) - e((1-t)x_0 + ty)| < \epsilon$, falls $y \in D$ mit $|x-y| < \delta$

(Beachte $|x-y| < \delta \Rightarrow |(1-t)x_0 + ty - (1-t)x_0 + tx| = t|y-x| < \delta$).

Daraus folgt: falls $\epsilon > 0$ klein genug ist, gilt für alle $i \in \{0, \dots, k-1\}$: $e_x([t_i, t_{i+1}])$ und $e_y([t_i, t_{i+1}])$ sind im selben Halbkreis, zum Beispiel in S_R.
Dann folgt für $t \in [t_i, t_{i+1}]$, dass

$$\theta_x(t) = \arctan\left(\frac{(e_x)_2(t)}{(e_x)_1(t)}\right) + k^i 2\pi, \quad \theta_y(t) = \arctan\left(\frac{(e_y)_2(t)}{(e_y)_1(t)}\right) + l^i 2\pi$$

für k^i und l^i in $\mathbb{Z}$. Ensprechende Formeln gelten, falls die Bilder in den anderen Halbkreisen enthalten sind.
Wir zeigen per Induktion über i, dass $k^i = l^i\ \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$.

IA: Es gilt $x_0 = \theta_x(0) = \theta_y(0)$. Also muss gelten $k^0 = l^0$.

Falls die Aussage richtig ist für $i-1 \in \{0, \dots, k-1\}$, also $k^{i-1} = l^{i-1}$, dann gilt

$$|\theta_x(t_i) - \theta_y(t_i)| = \left|\arctan\left(\frac{(e_x)_2(t)}{(e_x)_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{(e_y)_2(t)}{(e_y)_1(t)}\right)\right| < \pi.$$

t_i ist der erste Punkt des nächsten Intervals $[t_i, t_{i+1}]$, so dass die Bilder von $[t_i, t_{i+1}]$ bzgl. e_x und e_y vollständig in einem (möglicherweise anderen) Halbkreis liegen, z.B. S_O. Dann folgt

$$\pi > |\theta_x(t_i) - \theta_y(t_i)| = \left|\underbrace{\operatorname{arcot}\left(\frac{(e_x)_1(t)}{(e_x)_2(t)}\right) - \operatorname{arcot}\left(\frac{(e_y)_1(t)}{(e_y)_2(t)}\right)}_{\in(-\pi,\pi)} + (k^i - l^i)2\pi\right|.$$

Also muss notwendigerweise $k^i = l^i$ sein.

Dann folgt für $y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ und so dass $e(x), e(y) \in S_R$:

$$|\theta(x) - \theta(y)| = |\theta_x(1) - \theta_y(1)| = \left|\arctan\left(\frac{e_2(x)}{e_1(x)}\right) - \arctan\left(\frac{e_2(y)}{e_1(y)}\right)\right|$$

(entsprechend falls $e(x)$ und $e(y)$ in einem der anderen Halbkreise liegen würden). Da e stetig vorausgesetz ist, gilt, dass die rechte Seite kleiner als ϵ ist falls $|x-y| < \delta'$ für ein $\delta' \in (0, \delta)$. Damit ist auch θ stetig in x. $\square$

2.3 Definition (Umlaufzahl)**.** Sei $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ C^0-geschlossen, $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \alpha([0,T])$. Sei $e(t) = \frac{\alpha(t)-p}{|\alpha(t)-p|} \in \mathbb{S}^1$ und $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion. Dann heißt

$$n_\alpha(p) := \frac{1}{2\pi} \left(\theta(T) - \theta(0)\right) \in \mathbb{Z}$$

die Umlaufzahl von α um p.

Bemerkung. $e(T) = e(0) \Leftrightarrow (\cos\theta(T), \sin\theta(T)) = (\cos\theta(0), \sin\theta(0)) \Leftrightarrow \theta(T) - \theta(0) \in \{k2\pi : k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}$.

Bemerkung (Analytischer Beweis zu (i) in Lemma 2.2). Sei $e : [0,T] \to \mathbb{S}^1$ C^1. Falls $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass $e(t) = (x(t), y(t)) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$.

$$\Rightarrow e'(t) = \theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)).$$

$$\Rightarrow \langle e'(t), \underbrace{D_{\frac{\pi}{2}} e(t)}_{(-y(t), x(t))} \rangle = \theta'(t)(\sin^2\theta(t) + \cos^2\theta(t)) = \theta'(t).$$

Also können wir θ durch $\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \langle D_{\pi/2} e(t), e'(t)\rangle dt$ eindeutig definieren.

Isoperimetrische Ungleichung

2.4 Satz (Jordan'scher Kurvensatz)**.** *Sei $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene C^0-geschlossene Kurve. $\Longrightarrow$ α berandet beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$,*
d.h. $\exists G \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und zusammenhängend, so dass $\partial G = \alpha([0,T])$.

Bezeichnung. $G \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, falls $\forall x, y \in G$ $\exists \alpha : [a,b] \to G$ stetig mit $\alpha(a) = x$ und $\alpha(b) = y$.
$G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, falls $\exists R > 0$ so, dass $G \subset B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$.
$x \in \partial G \Longleftrightarrow \forall r > 0 : B_r(x) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash G) \neq \emptyset$ und $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$.

2.5 Satz (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ einfach geschlossene, stückweise reguläre C^1-Kurve und G das von α berandete, beschränkte Gebiet. Falls L die Länge von α und F die Fläche von G bezeichnet, so gilt*

$$4\pi F \leq L^2 \quad \textit{mit} \quad " = " \iff \alpha([0,T]) \textit{ ist eine Kreislinie.}$$

(Bei gegebener Länge L ist F maximal genau für den Kreis mit Umfange L.)

Hilfsmittel: Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ so parametrisiert, dass $\alpha(t) + sN(t) \in G$ für $s > 0$ klein. Wir sagen G liegt links von α.
Sei $V = (f,g) \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ für $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{G} \subset U$ ($\overline{G} = \{v \in \mathbb{R}^2 : \lim_{i\to\infty} v_i = v$ mit $v_i \in G\}$). Wir sagen V ist ein C^1-Vektorfeld auf U.

2.6 Satz (Gaußscher Integralsatz)**.**

$$\iint_G \underbrace{\operatorname{div} V(x,z)}_{=\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}} dxdy = \int_0^T \langle V \circ \alpha(t), N(t)\rangle |\alpha'(t)| dt = \int_0^T \left(f \circ \alpha(t) \frac{\alpha_2'(t)}{|\alpha'(t)|} - g \circ \alpha(t) \frac{\alpha_1'(t)}{|\alpha'(t)|} \right) |\alpha'(t)| dt$$

Bemerkung. Insbesondere: Falls $g(x,y)=0$ und $f(x,y)=x$, dann folgt

$$\underbrace{\iint_G 1dxdy}_{=F} = \int_0^T f\circ(\alpha_1,\alpha_2)\alpha_2'(t)dt = \int_0^T \alpha_1(t)\alpha_2'(t)dt.$$

Fouriertheorie Seien $f,g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig ($\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$, $\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt<\infty$ genügt).

2.7 Definition. Die Fourierkoeffizienten von f sind

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad n\geq 0,\\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)dt \quad n>0, \qquad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Fourierreihe

$$\frac{a_0(f)}{2}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt) = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)$$

konvergiert im L^2-Sinne gegen f, d.h. $\int_0^{2\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^N a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)-f(t)\right|^2 dt\to 0.$

2.8 Satz (Parseval Gleichung)**.**

$$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt = \frac{\pi}{2}a_0(f)b_0(t)+\pi\sum_{n=1}^\infty (a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g))$$

Idee zum Beweis der Isoperimetrischen Ungleichung:
Berechne L und F mittels der Fourierkoeffizienten von α_1 und α_2.

Beweis der isoperimetrischen Ungleichung. Ohne Einschränkung sei α parametrisiert, so dass $|\alpha'|=\frac{L}{2\pi}$. $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$F=\int_0^{2\pi}\alpha_1(t)\alpha_2'(t)dt = \langle\alpha_1,\alpha_2'\rangle_{L^2}$$

und

$$\frac{L^2}{4\pi^2}=|\alpha'(t)|^2=(\alpha_1'(t))^2+(\alpha_2'(t))^2 \;\Rightarrow\; L^2=2\pi\int_0^{2\pi}|\alpha'(t)|^2dt = 2\pi\left(\langle\alpha_1',\alpha_1'\rangle_{L^2}+\langle\alpha_2',\alpha_2'\rangle_{L^2}\right).$$

Die Fourierkoeffizienten von α_1' und α_2' sind

$$\begin{aligned} a_n(\alpha_i') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_i'(t)\cos(nt)dt\\ &\overset{\text{Partielle Integration}}{=} \alpha_i(2\pi)\underbrace{\cos(n2\pi)}_{1}-\alpha_i(0)\underbrace{\cos(n\cdot 0)}_{1}-\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_i(t)(-\sin(nt))dt\\ &= n\beta_n(\alpha_i) \end{aligned}$$

Analog berechnet man $b_n(\alpha_i') = -na_n(\alpha_i)$. Insbesondere ist $a_0(\alpha_i') = 0$.

Aus der Parseval Identität folgt nun einerseits

$$\frac{L^2}{2\pi} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2(\alpha_1) + b_n^2(\alpha_1) + \alpha_n^2(\alpha_2) + b_n^2(\alpha_2)\right)$$

und andererseits

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n(\alpha_1)b_n(\alpha_2) - b_n(\alpha_1)a_n(\alpha_2)).$$

Dann

$$\begin{aligned}
\frac{L^2}{2\pi} - 2F &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2(\alpha_1) + b_n^2(\alpha_1) + \alpha_n^2(\alpha_2) + b_n^2(\alpha_2)\right) - \pi 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n(\alpha_1)b_n(\alpha_2) - b_n(\alpha_1)a_n(\alpha_2)) \\
&= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 a_n^2(\alpha_1) + n^2 b_n^2(\alpha_1) + n^2 \alpha_n^2(\alpha_2) + n^2 b_n^2(\alpha_2) - 2na_n(\alpha_1)b_n(\alpha_2) + 2nb_n(\alpha_1)a_n(\alpha_2)\right) \\
&= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[(na_n(\alpha_1) - b_n(\alpha_2))^2 + (nb_n(\alpha_1) + a_n(\alpha_2))^2 + (n^2-1)(a_n^2(\alpha_2) + b_n^2(\alpha_2))\right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Falls $\frac{L^2}{2\pi} - 2F = 0$, dann $a_n(\alpha_1) = b_n(\alpha_2) = 0 \ \forall n > 1$.
Außerdem ist $a_n(\alpha_1) = b_n(\alpha_2)$ und $a_n(\alpha_2) = -b_n(\alpha_1) \ \forall n \geq$. Insbesondere ist dann $a_n(\alpha_1) = b_n(\alpha_2) = 0$ und $b_n(\alpha_1) = -a_n(\alpha_2) = 0 \ \forall n > 1$.

Wir setzten $a_1(\alpha_1) = b_1(\alpha_2) = b$ und $a_1(\alpha_2) = -b_1(\alpha_1) = a$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\
&= (\frac{1}{2}a_0(\alpha_1) + b_1(\alpha_1)\cos t + a_1(\alpha_1)\sin t, \frac{1}{2}a_0(\alpha_2) + b_1(\alpha_2)\cos t + a_1(\alpha_2)\sin t) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_0(\alpha_1) \\ a_0(\alpha_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha$ ist Kreise mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a_0(\alpha_1), a_0(\alpha_2))$ und Radius $\sqrt{a^2+b^2}$. □

Bemerkung (Bemerkungen zu Lemma 2.2).

- Falls $e : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ C^k, dann ist $\theta \in C^k$.

  Dies folgt aus der Darstellung, die durch *Bemerkung* (Analytischer Beweis zu (i) in Lemma 2.2) gegeben ist.

- θ und $\widetilde{\theta}$ Winkelfunktionen für $e : [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{S}^1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$: $\theta(x) = \widetilde{\theta}(x) + 2\pi n$ $\forall x \in [0,T] \times [a,b]$, insbesondere $\theta_0 = \widetilde{\theta}_0 + 2\pi n$.

  Es ist klar, dass $\theta(x) - \widetilde{\theta}(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für alle x. Da $\theta - \widetilde{\theta}$ stetig ist, folgt, dass $\theta - \widetilde{\theta} = 2\pi n = const$.

Bemerkung (Zur Umlaufzahl).

(i) $n_\alpha(p)$ ist invariant unter Homotopien von α in $\mathbb{R}^2\backslash\{p\}$.
$\alpha_0, \alpha_1 : [0,T] \to \mathbb{R}^2\backslash\{p\}$ heißen homotop $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{p\}$ stetig: $\alpha(\cdot, 0) = \alpha_0$ und $\alpha(\cdot, 1) = \alpha_1$.
Dann gilt $n_{\alpha(\cdot,\alpha)}(p) = \frac{1}{2\pi}(\theta(T,\sigma) - \theta(0,\sigma)) \in \mathbb{Z}$ stetig in $\sigma \in [a,b]$.
$\Rightarrow \sigma \mapsto n_{\alpha(\cdot,\sigma)}(p)$ ist konstant.

(ii) $n_\alpha(p)$ is invariant unter orientierungerhaltenden Umparametrisierungen von α.
Betrachte dazu für eine Umparametrisierung $\varphi : [0,T] \to [0,T]$ die Homotopie $\alpha(t,\sigma) = \alpha((1-\sigma)t + \sigma\varphi(t))$.

(iii) $\widetilde{\alpha}(t) = \alpha(-t) \Rightarrow n_{\widetilde{\alpha}}(p) = -n_\alpha(p)$.

2.9 Definition (Tangentenumlaufzahl)**.** Sei $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ regulär, C^1-geschlossen ($\Rightarrow$ $T : [0,T] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist C^0-geschlossen).
Dann heißt $n_T := n_T(0)$ die Tangentumlaufzahl von α, oder Rotationsindex.

Bemerkung. n_T ist invariant unter Umparametrisierung von α mit $\varphi' > 0$, da $T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{\widetilde{\alpha}'}{|\widetilde{\alpha}'|}$.

2.10 Satz. *Sei* $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ C^2*-geschlossen,* $|\alpha'| = 1$*. Dann*

$$2\pi \cdot n_T = \int_0^L \kappa(s)ds$$

Bemerkung. n_T ist eine globale Invariante der Kurve, κ ist eine infinitesimale Invariante.

Beweis. $|\alpha'| = 1 \Rightarrow \alpha'(s) = T(s) \in \mathbb{S}^1$.
$\Rightarrow T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ für einen Winkelfunktion θ.
$\Rightarrow \kappa(s) = \langle \alpha''(s), N(s)\rangle = \langle T'(s), N(s)\rangle = \theta(s)\langle(-\sin\theta(s), \cos\theta(s))^T, N(s)\rangle = \theta'(s)$. $\square$

Bezeichnung. $\int_0^L \kappa(s)ds$ heißt Totalkrümmung von α.
Bemerkung. Falls $0 < |\alpha'| \neq 1$ und $\alpha : [0,T_0] \to R^2$ C^2-geschlossen. Dann

$$2\pi n_T = \int_0^{t_0} \kappa(t)|\alpha'(t)|dt.$$

2.11 Satz (Hopfscher Umlaufsatz)**.** *Sei* $\alpha : [0,t_0] \to \mathbb{R}^2$ *regulär und einfach* C^1 *geschlossen. Dann* $|n_T| = 1$*.*

Beweis. **1.** Ist $|\alpha(\cdot)|$ an der Stelle $\bar{t} \in [0,t_0]$ maximal, so liegt α ganz auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha,\bar{t})$, denn es folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\langle -\alpha(\bar{t}), \alpha(t) - \alpha(\bar{t})\rangle = |\alpha(\bar{t})|^2 - \langle \alpha(\bar{t}), \alpha(t)\rangle \geq |\alpha(\bar{t})|(|\alpha(\bar{t})| - |\alpha(t)|) \geq 0.$$

Beachten Sie hier, dass $\alpha(\bar{t}) \perp T(\bar{t})$, denn $0 = \frac{d}{dt}|_{t=\bar{t}}|\alpha(t)|^2 = 2\langle \alpha(\bar{t}), \alpha'(\bar{t})\rangle$.
Außerdem, gilt $\mathcal{T}(\alpha,\bar{t}) \cap \alpha([0,t_0]) = \alpha(\bar{t})$, denn falls ein $\hat{t} \neq \bar{t}$ existiert, so dass $\alpha(\hat{t}) \in \mathcal{T}(\alpha,\bar{t})$, dann folgt $\alpha(\hat{t}) = \alpha(\bar{t}) + \lambda T(\bar{t})$ mit $\lambda \neq 0$. Beachte nun, dass $\alpha(\bar{t}) \perp T(\bar{t})$. Also

$|\alpha(\hat{t})|^2 = |\alpha(\bar{t})|^2 + \lambda^2 > |\alpha(\bar{t})|^2$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $|\alpha(\bar{t})|$.

Ohne Einschränkung nehmen wir an $\bar{t} = 0$, $t_0 = 1$ (nach Umparametrisierung), $T(0) = (1,0)$ und $\alpha(0) = (0,0)$ (nach Anwendung einer Isometrie).

Es gilt insbesondere $\alpha_2(t) > 0$ für alle $t \in (0,1)$.

2. Sei $D = \{(t_1,t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$ betrachte

$$e : D \to \mathbb{S}^1, \quad e(t_1,t_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(t_2)-\alpha(t_1)}{|\alpha(t_2)-\alpha(t_1)|} & \text{für } t_1 < t_2,\ (t_1,t_2) \neq (0,1) \\ T(t) & \text{für } t_1 = t_2 = t \\ -T(0) & \text{für } (t_1,t_2) = (0,1). \end{cases}$$

α ist einfach geschlossen $\Rightarrow$ e ist wohl-definiert.
α C^1 $\Rightarrow$ e ist stetig.

$\exists \theta : D \to \mathbb{R}$ stetige Winkelfunktion mit $\theta(0,0) = 0$.

Dann ist $t \mapsto \theta(t,t)$ eine Winkelfunktion für $T(t) = e(t,t)$, denn $T(t) = e(t,t) = (\cos\theta(t,t), \sin\theta(t,t))$ $\forall t \in [0,1]$. Für die Umlaufzahl folgt daraus $2\pi n_T = \theta(1,1) - \theta(0,0)$.

3. Andererseits: $2\pi n_T = (\theta(1,1) - \theta(0,1)) + (\theta(0,1) - \theta(0,0))$.

Es gilt $e_2(0,t) = \langle e(0,t), e_2\rangle = \frac{\alpha_2(t)}{|\alpha_2(t)|} > 0$ $\forall t \in (0,1)$. Dann folgt $e(t) \in S_O$ (mit S_O definiert wie in Lemma 2.2) für $t \in (0,1)$ und die Winkelfunktion ist gegeben durch $\theta(0,t) = \operatorname{arcot}\left(\frac{e_1(0,t)}{e_2(0,t)}\right) + k2\pi$ für $t \in (0,1)$. Für $t \to 0$ folgt (wegen Stetigkeit von θ und weil $e_2(t) \to 0$)

$$0 = \theta(0,0) \leftarrow \underbrace{\operatorname{arcot}\left(\frac{e_1(0,t)}{e_2(0,t)}\right)}_{\to 0} + k2\pi.$$

Also muss gelten $k = 0$ und $\theta(0,t) \in (0,\pi)$ für alle $t \in (0,1)$.

Da $e(0,1) = -(1,0)$, folgt für $t \to 1$ (wieder wegen Stetigkeit von θ), dass $\theta(0,1) \leftarrow \underbrace{\operatorname{arcot}\left(\frac{e_1(0,t)}{e_2(0,t)}\right)}_{\to\pi}$. Damit auch $\theta(0,1) = \pi$ ($\Rightarrow \theta(0,1) - \theta(0,0) = \pi$).

Außerdem gilt $e(t,1) = -e(0,t)$. Mit der Eindeutigkeit der Winkelfunktion folgt $\theta(t,1) = \theta(0,t) + \pi$.

$\Longrightarrow \theta(1,1) - \theta(0,0) = \theta(1,1) - \theta(0,1) + \theta(0,1) - \theta(0,0) = \pi + \pi.$ $\square$

2.12 Folgerung. *Sei $\alpha : [0,t_0] \to \mathbb{R}^2$ regulär, einfach C^2-geschlossen, und es gelt $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,t_0]$. Dann folgt*

(i) Für alle $t \in [0,t_0]$ liegt $\alpha([0,t_0])$ auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha,t)$ und $\mathcal{T}(\alpha,t) \cap \alpha([0,t_0])$

ist ein (i.a. 1-punktiges) Intervall.
$\alpha([0,t_0])$ *liegt auf einer Seit von* $\mathcal{T}(\alpha,t)$ *g.d.w.* $\langle N(t), \alpha(s)-\alpha(t)\rangle \geq 0 \ \forall s$.

(ii) *Jede Gerade, die nicht Tangente an* α *ist, trifft* $\alpha([0,t_0])$ *in* 0 *oder in* 2 *Punkten.*

Beweis. (i) Ohne Einschränkung sei $|\alpha'| = 1$ ($\Rightarrow \alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$), $\theta(s)$ ist Winkelfunktion für $T = \alpha'$ mit $\theta(0) = 0$. $\Rightarrow \theta' = \kappa \geq 0$, d.h. θ ist monoton wachsend.
Aus dem Hopf'schen Umlaufsatz folgt $\theta(L) = 2\pi$.

$\forall e \in \mathbb{S}^1$ gilt $\{s \in [0,L) : T(s) = e\}$ ist ein Interval.
$\Rightarrow \forall e \in \mathbb{S}^1$ gibt es genau eine orientierte Gerade mit Richtungsvektor e, die Tangente von α ist.
$\Rightarrow \forall e \in \mathbb{S}^1$ gibt es s_+ und s_- in $[0,L)$, so dass $T(s_+) = e$ und $T(s_-) = -e$.

$\alpha([0,L])$ liegt zwischen $\mathcal{T}(\alpha,s_-)$ und $\mathcal{T}(\alpha,s_+)$.
(falls $\bar{t}$ eine Extremstelle von $f(s) = \langle N(s_+), \alpha(s)\rangle$ ist, folgt $0 = f'(\bar{t}) = \langle N(s_+), \alpha'(\bar{t})\rangle$. Somit $T(\bar{t}) = \pm e$ und $\alpha(\bar{t}) \in T(\alpha, s_+)$ oder $\alpha(\bar{t}) \in \mathcal{T}(\alpha,s_-)$. Insbesondere, ist dann s_+ eine Minimumstelle und $\langle N(s_+), \alpha(s) - \alpha(s_+)\rangle \geq 0$.)
Daraus folgt (i).

(ii) Sei G eine Gerade. G sei keine Tangente von α und $\#(G \cap \alpha([0,L]) \geq 3$. Wähle $\alpha(s_1)$ zwischen $\alpha(s_0)$ und $\alpha(s_2)$ auf G.
$\Rightarrow \alpha([0,L])$ liegt nicht auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha,s_1)$. Das ist ein Widerspruch zu (i).
□

Bezeichnung. • Wir sagen $\alpha : [0,t_0] \to \mathbb{R}^2$ is konvex, falls für alle $t \in [0,t_0]$ gilt $\alpha([0,t_0])$ liegt auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha,t)$. Mit der Folgerung gilt: α is convex, falls $\kappa(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,t_0]$.

• $\bar{t} \in [0,t_0]$ heißt Scheitel von $\alpha : [0,t_0] \to \mathbb{R}^2$, falls $\kappa'(\bar{t}) = 0$.

Bemerkung. (a) α regulär, C^2-geschlossen $\Rightarrow$ es existieren mindestens 2 Scheitel von α (Maximum und Minimumstelle der periodischen Funktion κ).

(b) Ellipsen ($\neq$ Kreise) haben genau 4 Scheitel.

(c) Es existieren C^∞-geschlossene Kurven mit $\kappa > 0$ und genau 2 Scheiteln (aber nicht einfach geschlossen).

2.13 Theorem (4-Scheitelsatz). *Jede reguläre, einfache* C^3*-geschlossene Kurve mit* $\kappa \geq 0$ *(oder* $\kappa \leq 0$*) hat mindestens 4 Scheitel.*

Bemerkung. Die Bedingung $\kappa \geq 0$ oder $\kappa \leq 0$ ist überfluessig.

Beweis. **1.** α hat bereits 2 Scheitel in t_1 und t_2, nämlich in einer Maximumstelle und einer Minimumstelle von κ, wo dann κ' verschwindet. Falls einer dieser Punkte keine isolierte Extremstelle ist, haben wir bereits mehr als 4 Scheitel gefunden und sind fertig.

Also nehmen wir an t_1 und t_2 sind isolierte Extremstellen, und folglich wechselt κ' bei t_1 und t_2 das Vorzeichen. Ohne Einschränkung sei $t_2 = 0$. G sei die Gerade durch $\alpha(t_1)$

und $\alpha(0)$.

2. Nach Anwendung einer Isometrie sei G die x-Achse. Falls α ganz auf einer Seite von G läge, so wäere G tangential in 0 und t_1, und somit tangential entlang des ganzen Intervall $(0, t_1)$. Es würde folgen, dass es bereits unendlich viele Scheitel gibt.

Wir nehmen deshalb an $\alpha_2 > 0$ auf $(0, t_1)$ und $\alpha_2 < 0$ auf (t_1, t_0). Mit partieller Integrations und den Frenet Formeln folgt

$$\left(\int_0^{t_0} \kappa' \alpha_1 ds, \int_0^{t_0} \kappa' \alpha_2 ds\right) = \int_0^{t_0} \kappa' \alpha ds = -\int_0^{t_0} \kappa \alpha' ds = \int_0^{t_0} N' ds = N(t_0) - N(0) = (0,0).$$

Insbesondere

$$\int_0^{t_0} \kappa' \alpha_2 ds = 0. \tag{4}$$

3. Angenommen α hat keine weiteren Scheitel, dann verschwindet κ' nicht mehr auf den Intervallen $(0, t_1)$ und (t_1, t_0). Da $\int_0^{t_0} \kappa'(s) ds = \kappa(t_0) - \kappa(0) = 0$, ist κ' auf einem der Intervalle positiv und auf dem anderen negativ.

Es folgt, dass entweder

$$\int_0^{t_1} \kappa' \alpha_2 ds > 0 \quad \text{und} \quad \int_{t_1}^{t_0} \kappa' \alpha_2 ds > 0 \tag{5}$$

oder

$$\int_0^{t_1} \kappa' \alpha_2 ds < 0 \quad \text{und} \quad \int_{t_1}^{t_0} \kappa' \alpha_2 ds < 0. \tag{6}$$

im Widerspruch zu (4).

Also gibt es einen weiteren Scheitelpunkt $\bar{t}$. Ohne Einschränkung, sei $\bar{t} \in (0, t_1)$. Wegen (4) muss κ' in $\bar{t}$ das Vorzeichen wechseln (denn sonnst gilt wieder entweder (5) oder (6), im Widerspruch zu (4)). Dann, da κ' in $\bar{t}$ das Vorzeichen wechselt, folgt es muss in (t_1, t_0) einen weiteren Punkt geben, in dem κ' das Vorzeichen wechselt, da κ' auch in 0 und t_0 bereits das Vorzeichen wechselt. Dies ist dann der vierte Scheitel. $\square$

Bemerkung. Sei $\alpha : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossen, reguläre Kurve. Wir sagen $\alpha([0, t_0])$ liegt links (rechts) auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha, t)$ falls $\langle N(t), \alpha(s) - \alpha(t)\rangle \geq 0$ (≤ 0) $\forall s \in [0, t_0]$.

Wir haben also gezeigt: falls α eine einfach C^2-geschlossene, reguläre Kurve mit $\kappa \geq 0$ ist, dann liegt $\alpha([0, t_0])$ links auf einer Seite von $\mathcal{T}(\alpha, t)$ $\forall t$.

Bemerkung. Wir sagen $K \subset \mathbb{R}^2$ ist konvex, falls $\forall x, y \in U$ gilt $\gamma_{x,y}(t) = (1-t)x + ty \in K$.

2.14 Lemma. *Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossene Kurve mit $|\alpha'| = 1$ so dass α ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ berandet ($\partial U = \alpha([0, t_0])$) und das Normalenfeld N "nach Innen zeigt", d.h. für alle $t \in [0, L]$ existiert $\rho > 0$ so dass $\alpha(t) + rN(t) \in U$ für alle $r \in (0, \rho)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\overline{U}$ *ist konvex.*

(ii) $\alpha([0,t_0])$ *liegt links auf einer Seite von* $\mathcal{T}(\alpha,t)$ $\forall t\in[0,t_0]$.

Beweis. (i)⇒(ii): Let $q\in\mathbb{R}^2\backslash\overline{U}$. Es gibt $p\in\partial U$ mit $|p-q|^2=\min_{x\in\overline{U}}|x-q|^2$. Dann gilt $\forall x\in U$

$$0\le\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}|\gamma_{p,x}-q|^2=2\langle x-p,p-q\rangle \iff 0\le\left\langle\frac{p-q}{|p-q|},x-p\right\rangle$$

Sei nun $p\in\partial U$ und $q_k\in\mathbb{R}^2\backslash\overline{U}$ mit $q_k\to p$. Dann gilt $U\subset\{x\in\mathbb{R}^2:\langle v_k,x-p_k\rangle\ge0\}$ mit $v_k=\frac{p-q_k}{|p-q_k|}\in\mathbb{S}^1$ und $p_k\in\partial U$ so, dass $|q_k-p_k|=\min_{x\in\overline{U}}|q_k-x|$. Nach Übergang zu einer Teilfolgt konvergiert v_k gegen v. Außerdem gilt $|p-p_k|\le|p-q_k|+|q_k-p_k|\le2|p-q_k|$. Mit der Anwesenheitsaufgabe folgt, $\forall p\in\partial U$ existiert v, so dass $\langle x-p,v\rangle\ge0$ $\forall x\in\partial U$ und somit $U\subset\{x\in\mathbb{R}^2:\langle x-p,v\rangle\ge0\}$. Nun gilt, dass $\varphi(s)=\langle\alpha(s)-\alpha(s_0),v\rangle\ge0$ in s_0 ein Minimum hat, wobei $c(s_0)=p$ und v wie eben. Deshalb folgt $0=\langle\alpha'(s_0),v\rangle$. Dann folgt $v=N(s_0)$.

(ii)⇒(i): Wir zeigen $\overline{U}=\bigcap_{s\in[0,L]}H(s)$ mit $H(s)=\{x\in\mathbb{R}^2:\langle x-\alpha(s),N(s)\rangle\ge 0\}$. Die Inklusion $\subset$ gilt bereits wegen (ii). Sei nun $p\in\mathbb{R}^2\backslash\overline{U}$. Falls $s\in[0,L]$, so dass $|p-\alpha(s)|=\min_{t\in[0,L]}|p-\alpha(t)|$, dann zeigt man $p\notin H(s)$. Da $H(s)$ konvex $\forall s\in[0,L]$, ist auch $\overline{U}$ also Schnitt über alle $H(s)$ konvex. □

Fenchelsche Ungleichung

Bemerkung (Bogenabstand). Seien $v,w\in\mathbb{S}^2=\{v\in\mathbb{R}^2:|v|=1\}$ und $\beta:[0,\bar{t}]\to\mathbb{S}^2$ stückweise C^1-Kurve. Dann gilt $L(\beta)\ge\angle(v,w)=\arccos(\langle v,w\rangle)$. Bei Gleichheit durchläuft β den kürzeren Großkreisbogen von v nach w. Falls $w=-v$ (Antipodenpunkte) dann $L(\beta)\ge\pi$ und bei Gleichheit durchläuft β einen der beiden Halbkreisbögen von v nach $w=-v$.

2.15 Satz (Fenchelsche Ungleichung)**.** *Sei* $\alpha:[0,L]\to\mathbb{R}^3$, $|\alpha'|=1$, C^2*-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L\kappa_{Raum}(s)ds\ge2\pi$$

mit "=" $\iff$ α ist eine ebene Kurve, die ein konvexes Gebiet berandet ($\iff$ α einfach geschlossen und $\kappa_{Ebene}\ge0$ oder $\kappa_{Ebene}\le0$).

2.16 Lemma. *Ist* $\beta:[0,\bar{t}]\to\mathbb{S}^2=\{v\in\mathbb{R}^3:|v|=1\}$ *stückweise* C^1, *und* $L(\beta)\le\pi$ *(bzw.* $L(\beta)<\pi$*), so existiert* $N\in\mathbb{S}^2$ *mit* $\langle N,\beta(t)\rangle\ge0$ *(bzw.* $\langle N,\beta(t)\rangle>0$*)* $\forall t\in[0,\bar{t}]$.

Beweis. 1. Fall: $\beta(\bar{t})=-\beta(0)$. Dann gilt $L(\beta)\ge\pi$ und somit $L(\beta)=\pi$. Damit durchläuft β einen halben Großkreise mit antipodalen Endpunkten.
$\Rightarrow\exists N\in\mathbb{S}^2$ mit $\langle N,\beta(t)\rangle\ge0$ $\forall t\in[0,t_0]$.

2. Fall: $\beta(\bar{t})\ne-\beta(0)$. Sei N der Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von $\beta(0)$

nach $\beta(\bar{t})$, und sei D_π die Drehung um π um die Achse durch N und $-N$. Definiere dann $\beta^* : [0, 2\bar{t}] \to \mathbb{S}^2$ durch

$$\beta^*(t) = \begin{cases} \beta(t) & t \in [0, \bar{t}] \\ D_\pi \beta(t - \bar{t}) & t \in [\bar{t}, 2\bar{t}]. \end{cases}$$

Beachte dass $D_\pi \beta(0) = \beta(\bar{t})$ und $D_\pi \beta(\bar{t}) = \beta(0)$. Also folgt, dass β^* C^0-geschlossen und stückweise C^1 ist.

Sei zunächst $L(\beta) \leq \pi$. Gilt nicht $\langle \beta(t), N \rangle > 0 \ \forall t \in [0, \bar{t}]$, so existieren 2 Antipodenpunkte q und $-q$ auf $\beta^*([0, 2\bar{t}])$ mit $\langle q, N \rangle = \langle -q, N \rangle = 0$. Die beiden Kurvenstücke (die zusammen wieder β^* ergeben) zwischen q und $-q$ haben nun mindestens eine Länge von π.

$\Rightarrow L(\beta^*) \geq 2\pi$. Also auch $L(\beta^*) = 2\pi$.

Also besteht β^* aus 2 halben Großkreisen zwischen q und $-q$, und $L(\beta) = \frac{1}{2} L(\beta^*) = \pi$. Weil bereits gilt $\langle N, \beta^*(0) \rangle > 0$ und $\langle \beta^*(\bar{t}), N \rangle > 0$ folgt $\langle \beta^*(t), N \rangle \geq 0 \ \forall t \in [0, 2\bar{t}]$ und somit auch $\langle \beta(t), N \rangle \geq 0 \ \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Ist $L(\beta) < \pi$, muss deshalb $\langle \beta(t), N \rangle > 0 \ \forall t \in [0, \bar{t}]$ gelten. □

2.17 Lemma. *Ist $\beta : [0, t_0] \to \mathbb{S}^2$ C^0-geschlossen, stückweise C^1, und $L(\beta) \leq 2\pi$ (bzw. $L(\beta) < 2\pi$), so existiert $N \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle N, \beta(t) \rangle \geq 0$ (bzw. $\langle N, \beta(t) \rangle > 0$) $\forall t \in [0, t_0]$.*

Beweis. Wähle $\bar{t} \in (0, t_0)$ mit $L(\beta|_{[0,\bar{t}]}) = \frac{1}{2} L(\beta) \leq \pi$. Falls $\beta(0) \neq -\beta(\bar{t})$ können wir das Lemma (2.16) jeweils auf $\beta|_{[0,\bar{t}]}$ und $\beta|_{[\bar{t},t_0]}$ anwenden mit N gleich dem Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens zwischen $\beta(0) = \beta(t_0)$ und $\beta(\bar{t})$. Falls $\beta(0) = -\beta(\bar{t})$ können wir das Lemma anwenden für $N \in \mathbb{S}^2$ mit $N \perp \beta(0)$. □

2.18 Lemma. *Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$, $|\alpha'| = 1$, C^2 und C^0-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \kappa_{Raum}(s) ds > \pi$$

Beweis. Sei $\beta : [0, L] \to \mathbb{S}^2$ gegeben durch $\beta(t) = \alpha'(t) = T(t)$. Dann gilt $L(\beta) = \int_0^L \kappa(t) dt$. Wir nehmen zunächst an, dass $L(\beta) < \pi$. Mit Lemma 2.17 folgt: es existiert $N \in \mathbb{S}^2$, so dass $\langle \beta(t), N \rangle > 0 \ \forall t \in [0, L]$. Dann folgt

$$0 < \int_0^L \langle \gamma(t), N \rangle dt = \left\langle \int_0^L \gamma(t) dt, N \right\rangle.$$

Seien $v, w \in \mathbb{S}^2$, so dass N, v, w ein ONB. Dann gilt

$$\int_0^L \beta(s) ds = \underbrace{\left\langle \int_0^L \beta(s) ds, N \right\rangle}_{>0} N + \left\langle \int_0^L \beta(s) ds, v \right\rangle v + \left\langle \int_0^L \beta(s) ds, w \right\rangle w.$$

Andererseits

$$\int_0^L \beta(t)dt = \int_0^L \alpha'(t)dt = \alpha(L) - \alpha(0) = (0,0,0). \tag{7}$$

Das ist ein Widerspruch.

Ist $L(\beta) = \pi$, dann ist β ein halber Großkreis. Auch das ist ein Widerspruch zu (7). $\square$

Beweis der Fenchelungleichung. Sei $\beta : [0, L] \to \mathbb{S}^2$ gegeben durch $\beta(t) = T(t) = \alpha'(t)$. Dann gilt

$$\int_0^L \beta(s)ds = \alpha(L) - \alpha(0) = (0,0,0), \quad \int_0^L \kappa(s)ds = \int_0^L |\beta'(s)|ds = L(\beta)$$

Zu zeigen ist $L(\beta) \geq 2\pi$.

Angenommen die Aussage stimmt nicht. Dann $L(\beta) < 2\pi$. Aus dem Lemma 2.17 folgt: $\exists N \in \mathbb{S}^1$, so dass $\langle \beta(t), N \rangle > 0 \ \forall t \in [0, L]$. Es folgt

$$0 < \int_0^L \langle \beta(t), N \rangle dt = \left\langle \int_0^L \beta(t)dt, N \right\rangle.$$

Im Widerspruch zu $\int_0^L \beta(s)ds = (0,0,0)$.

Falls $L(\beta) = 2\pi$, dann durchläuft β nacheinander 2 halbe Grosskreise (Beweis von Lemma 2.17). Wegen

$$0 = \int_0^L \beta(s)ds = \int_0^{L/2} \beta(s)ds + \int_{L/2}^L \beta(s)ds$$

bilden diese Halbkreise zusammen einen Großkreis.

Damit liegt $\beta = T$ in einer Ebene, und da $\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^L \gamma(s)ds$, liegt α in einer affinen Ebene. Insbesondere gilt $|\kappa_{Ebene}| = \kappa_{Raum}$.

Desweiteren ist α einfach. Sonst können wir nach einer Umparametrisierung annehmen, es existiert $t_0 \in (0, L)$, so dass $\alpha(t_0) = \alpha(0)$. Wir können das Lemma 2.18 anwenden auf $\alpha|_{[0,t_0]}$ und $\alpha|_{[t_0,L]}$ und erhalten

$$L(\alpha) > \pi + \pi = 2\pi$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Sei n_T die Tangentenumlaufzahl von α. Mit dem Hopfschen Umlaufsatz folgt nun

$$2\pi = 2\pi|n_T| = \left| \int_0^L \kappa_{Ebene}(s)ds \right| \leq \int_0^L |\kappa_{Ebene}(s)|ds = \int_0^L \kappa_{Raum}(t)dt = 2\pi.$$

Also muss $|\kappa_{Ebene}| = \kappa_{Ebene}$ gelten. Somit berandet α ein konvexes Gebiet. $\square$

3 Parametrisierte Flächenstücke

3.1 Definition. Ein regulär parametrisiertes Flächenstück ist eine differenzierbare Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und für alle $q \in U$ hat die Abbildung $DX(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Rang 2.

Bezeichnung. Da wir immer regulär parametrisierte Flächenstücke (FS) betrachten, bezeichnen wir solche im Folgenden einfach als Flächenstücke. Falls die Abbildung X C^r ist, sprechen wir von einem C^r-Flächenstück.

Bezeichnung. (1) $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ und sei

$$X(q) = (x(q), y(q), z(q)) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ein regulär parametrisiertes FS. Die Matrix von $DX(q)$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}(q) & \frac{\partial X}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{rang} DX(q) = \mathrm{rg}\, DX(q) = 2 \iff \frac{\partial X}{\partial u}(q) \text{ und } \frac{\partial X}{\partial v}(q) \text{ sind linear unabhängig.}$$

$u \mapsto X(u, v)$ (v konstant) und $v \mapsto X(u, v)$ (u konstant) heißen Parameterlinien.

$\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}$ heißen Tangentialvektoren der Parameterlinien.

(2) Die Tangentialebene von X in $q \in U$ ist

$$\mathcal{T}(X, q) := X(q) + DX(q)(\mathbb{R}^2) = \{X(q) + r\frac{\partial X}{\partial u}(q) + s\frac{\partial X}{\partial v}(q) : (r, s) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$\mathcal{T}(X, q)$ ist ein 2-dimensional affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Das Einheitsnormalenfeld N von X ist die Abbildung $N : U \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$N := \left| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right|^{-1} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right).$$

Beispiele.

1. Graphen von Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$:

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad \frac{\partial X}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

sowie

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right) \cdot \left| \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1 \right|^{-1}$$

und

$$\mathcal{T}(X, (u, v)) = \left\{ (u, v, f(u, v)) + r(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}) + s(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}) : (r, s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Obere Hemisphäre als Graph:

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}, \quad X(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$X(U) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

   X parametrisiert die obere Hemisphäre als Graph von $f(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$.

3. "Geographische Koordinaten auf $\mathbb{S}^2$"

$$X(\vartheta, \varphi) = (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta), \quad U = (0,\pi) \times (0, 2\pi)$$

   $\Rightarrow \;\; X(U) = \mathbb{S}^2 \backslash \{\text{halber Längenkreise}\}.$

   $\vartheta = \mathit{const} \to$ Breitenkreis, $\varphi = \mathit{const} \to$ Längenkreis. ($\varphi = 0$: $X(\vartheta, 0) = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$)

$$\frac{\partial X}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) = (\cos\varphi \cos\vartheta, \sin\varphi \cos\vartheta, -\sin\vartheta)$$
$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) = (-\sin\varphi \sin\vartheta, \cos\varphi \sin\vartheta, 0)$$

   $\Longrightarrow \left\langle \frac{\partial X}{\partial \vartheta}, \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$ d.h. Längen- und Breitenkreise schneiden einander orthogonal

   Außerdem gilt $N(u,v) = X(u,v)$.

4. Wendelfläche (Helicoid)

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad X(u,v) = (v\cos u, v \sin u, cu) \text{ mit } c \neq 0.$$

   Dann ist $u \mapsto X(u,v)$, $v = \mathit{const}$, eine Schraubenlinie, und $v \mapsto X(u,v)$, $u = \mathit{const}$, Geraden durch die Punkte $(0,0,cu)$ und $(\cos u, \sin u, cu)$.

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = (-v \sin u, v \cos u, c), \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

$$N(u,v) = (c^2 + v^2)^{-1}(-c \sin u, c \cos u, -v).$$

$$\lim_{v \to -\infty} N(u,v) = (0,0,1), \; N(u,0) = \operatorname{sgn}(c)(-\sin u, \cos u, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

$$\lim_{v \to \infty} N(u,v) = (0,0,-1).$$

   Hier ist

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

3.2 Definition. Seien $X : U \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{X} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ Flächenstücke. $\widetilde{X}$ heißt Umparametrisierung von X, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{U} \to U$ mit $\widetilde{X} = X \circ \varphi$ existiert.

Bezeichnung. $\varphi : \widetilde{U} \to U$ heißt C^r-Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$ φ bijektiv, und φ sowohl auch φ^{-1} sind C^r. Wegen dem Satz zur lokalen Umkehrbarkeit ist das äquivalent zu: φ ist bijektiv, φ ist C^r und $\det D\varphi(\widetilde{q}) \neq 0\ \forall \widetilde{q} \in \widetilde{U}$.

Gilt $\det D\varphi(\widetilde{q}) > 0$ für alle $\widetilde{q} \in \widetilde{U}$, so heißt $\widetilde{X}$ orientierungstreue Umparametrisierung von X.

Bemerkung. (i) $\widetilde{X} = X \circ \varphi \Rightarrow \widetilde{X}(\widetilde{U}) = X(U)$.

(ii) $\widetilde{X} = X \circ \varphi$, $\varphi(\widetilde{q}) = q \Rightarrow \mathcal{T}(X, q) = \mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{q})$, denn

$$D\widetilde{X}(\widetilde{q}) = D(X \circ \varphi)(\widetilde{q}) = DX(q) \cdot D\varphi(\widetilde{q}) \quad \text{und} \quad D\varphi(\widetilde{q})(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{q}) = \widetilde{X}(\widetilde{q}) + D\widetilde{X}(\widetilde{q})(\mathbb{R}^2) = X(q) + DX(q)(\mathbb{R}^2).$$

$\widetilde{N}(\widetilde{q}) = \pm N(q)$ mit "+"$\Leftrightarrow \det D\varphi(\widetilde{q}) > 0$.

3.3 Lemma. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ C^r-Flächenstück, $r \geq 1$, $q \in U$ und (o.E. nach Anwendung einer Isometrie des $\mathbb{R}^3$) $X(q) = 0 \in \mathbb{R}^3$, $e_3 = (0, 0, 1) \notin DX(q)(\mathbb{R}^2)$. Dann existiert $V \subset U$ offen mit $q \in V$ und $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $0 \in \widetilde{V}$ und ein C^r-Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{V} \to V$ mit $\varphi(0) = q$ und $f \in C^r(\widetilde{V}, \mathbb{R})$, so dass*

$$X \circ \varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \forall (u, v) \in \widetilde{V}.$$

Beweis. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Es gilt $D\pi(q) = \pi\ \forall q \in \mathbb{R}^3$ und $\ker \pi = \mathbb{R}e_3$.

Da $e_3 \notin DX(q)(\mathbb{R}^2)$, gilt $\ker(D(\pi \circ X)(q)) = \{0\}$. Aus dem Rangsatz folgt deshalb $\mathrm{rg}(D(\pi \circ X)(q)) = 2$.

Satz von der lokalen Umkehrbarkeit $\Rightarrow$ es existiert $V \subset U$ offen mit $q \in V$, so dass $\pi \circ X|V$ ein C^r-Diffeomorphismus von V auf einen offene Menge $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

$X(q) = 0,\ q \in V \ \Rightarrow\ \pi \circ X(q) = 0 \in \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^2$. Sei $\varphi := (\pi \circ X|V)^{-1} : \widetilde{V} \to V$. Dann gilt für alle $(u, v) \in \widetilde{V}$:

$$X \circ \varphi(u, v) = (\pi \circ X \circ \varphi(u, v), z \circ \varphi(u, v)) = (u, v, \underbrace{z \circ \varphi(u, v)}_{=:f(u,v)}).$$

$\square$

3.4 Satz. *Seien $X : U \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{X} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ C^r-Flächenstücke (regulär) mit*

(a) $X(U) = \widetilde{X}(\widetilde{U})$,

(b) $X : U \to X(U)$, $\widetilde{X} : \widetilde{U} \to \widetilde{X}(\widetilde{U})$ *sind Homöomorphismen. Eine Abildung $X : U \to V$ ist ein Homöomorphismus, falls X bijektive ist, und die Abbildung als auch ihre Umkehrabbildung sind stetig.*

Dann sind X und $\widetilde{X}$ C^r-Umparametrisierungen voneinander.

Beweis. Es gilt $\varphi = X^{-1} \circ \widetilde{X} : \widetilde{U} \to U$ ist auch ein Homöomorphismus mit $\widetilde{X} = X \circ \varphi$. Wir zeigen nun: $\varphi \in C^r(\widetilde{U}, U)$.

Sei $\widetilde{q} \in \widetilde{U}$. Wähle $V \subset U$, so dass $\varphi(\widetilde{q}) \in V$ und ohne Einschränkung sei $X|V$ ist ein Graph, d.h. $\forall (u,v) \in V: \; X(u,v) = (u,v,f(u,v))$. $\widetilde{V} = \varphi^{-1}(V) \subset \widetilde{U}$ ist offen.

$\Rightarrow X^{-1}|_{X(V)} = \pi|_{X(V)}$ wobei $\pi(x,y,z) = (x,y) \Rightarrow \underbrace{X^{-1} \circ \widetilde{X}}_{=\varphi}|_{\underbrace{\widetilde{X}^{-1}(X(V))}_{=\varphi^{-1}(V)}} = \pi \circ \widetilde{X}|_{\varphi^{-1}(V)} \in$

$C^r(\widetilde{V}, V)$. Da $\widetilde{q}$ beliebig, folgt $\varphi \in C^r(\widetilde{U}, U)$. □

3.5 Definition. Eine Teilemenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^3$ heißt 2-dimensionale C^r-Untermanigfaltigkeit $(r \geq 1)$ des $\mathbb{R}^3 \iff \forall p \in M \; \exists V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $p \in V$ und ein C^r-Flächenstück $X : U \to \mathbb{R}^3$ mit $X : U \to M \cap V$ ist ein Homöomorphismus.

3.6 Satz. *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^r(V, \mathbb{R})$, $r \geq 1$. Sei $s \in f(V)$ und für alle $q \in f^{-1}(s)$ gelte $Df(q) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}(s)$ 2-dimensionale Untermgft. des $\mathbb{R}^3$.*

Beispiel. $V = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $s = r^2 > 0 \Rightarrow f^{-1}(r^2) = \mathbb{S}^2(r)$.

$(x,y,z) \in \mathbb{S}^2(r), \; r > 0 \Rightarrow Df(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq 0.$

Beweis. $Df(q) \neq 0$, Satz über implizite Funktionen $\Rightarrow$ $f^{-1}(s)$ kann in einer Umgebung als Graph über einer der 3 Koordinatenebenen dargestellt werden.

Erinnerung: Satz über implizite Funktionen
$\frac{\partial f}{\partial z}(q) \neq 0 \Rightarrow \exists W \subset \mathbb{R}^2$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ offen mit $q \in W \times I$ und $\varphi \in C^r(W, I)$: $f^{-1}(s) \cap (W \times I) = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in W\}$.

Definiere $X : W \to \mathbb{R}^3$ durch $X(u,v) = (u,v,\varphi(u,v))$. □

4 Die 1. Fundamentalform

Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ Flächenstück $\alpha = (u,v) : [a,b] \to U$ und $\hat{\alpha} := X \circ \alpha : [0,b] \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$.

$$L(\hat{\alpha}) = \int_a^b |(X \circ \alpha)'(t)| dt \overset{Kettenregel}{=} \int_a^b |DX(\alpha(t))\alpha'(t)| dt,$$

wobei $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ mit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

$DX(\alpha(t))\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u}(\alpha(t))u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v}(\alpha(t))v'(t)$

$$\Rightarrow \;\; L(\hat{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{\left|\frac{\partial X}{\partial u}(\alpha(t))\right|^2 u'(t)^2 + 2\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}(\alpha(t)), \frac{\partial X}{\partial v}(\alpha(t))\right\rangle u'(t)v'(t) + \left|\frac{\partial X}{\partial v}(\alpha(t))\right| v'(t)^2} dt.$$

4.1 Definition. Die 1. Fundamentalform von $X : U \to \mathbb{R}^3$ ist die Abbildung, die jedem $q \in U$ das Skalarprodukt I_q auf $\mathbb{R}^2$ zuordnet, das duch

$$I_q(w_1, w_2) := \langle \underbrace{DX(q)w_1}_{\in \mathbb{R}^3}, \underbrace{DX(q)w_2}_{\in \mathbb{R}^3} \rangle \; \forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Beachte

$$
\begin{aligned}
I_q(e_1,e_1) &= \left|\frac{\partial X}{\partial u}\right|^2 (q) =: E(q) \quad \left(DX(q)e_1 = \frac{\partial X}{\partial u}(q)\right),\\
I_q(e_1,e_2) &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\right\rangle = I_q(e_1,e_2) =: F(q),\\
I_q(e_2,e_2) &= \left|\frac{\partial X}{\partial v}\right|^2 (q) =: G(q).
\end{aligned}
$$

Die Matrix von I_q bzgl. der ONB e_1, e_2 ist

$$
\begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}
$$

(symmetrisch, positiv definit).

Andere Bezeichnung: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ mit $g_{ij} = \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle : U \to \mathbb{R}$.

Beispiele. (1) $X(u,v) = (u,v,f(u,v)) \Rightarrow E = 1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle,\ G = 1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$

(2) $X(\theta,\varphi) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \Rightarrow E = 1,\ F = 0,\ G = \sin^2\theta.$

Geometrische Bedeutung von I

(1) $I_q(w,w) = |DX(q)w|^2\, \forall w \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow L(\hat{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t),\alpha'(t))}dt =$ Kurvenlänge von α bzgl. I.

Wir interpretieren $X : U \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$ als Landkarte für $X(U)$. Dann ist

$\mu(p,w) = \dfrac{I_q(w,w)}{|w|}$ die Verzerrung der Landkarte am Punkt $q \in U$ in Richtung $w \in \mathbb{R}^2$.

Begründung: $\alpha(t) = q + tw \ \Rightarrow L_{Eukl}(\alpha|_{[0,\delta]}) = \delta|w|$
$\Rightarrow L(X\circ\alpha|_{[0,\delta]}) = I_q(w,w)^{\frac{1}{2}}\delta + o(\delta)$. Denn

$$
\begin{aligned}
L(X\circ\alpha|_{[0,\delta]}) &= \int_0^\delta |DX(\alpha(t))w|dt\\
&\leq / \geq \int_0^\delta \left(|DX(\alpha(0))w| + tC_+/C_-|w|\right)dt = I_q(w,w)^{\frac{1}{2}}\delta + o(\delta)C_+/C_-|w|
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ "Maßstab"$= \lim_{\delta\to 0} \frac{L_{Eukl}(\alpha|_{[0,\delta]})}{L(X\circ\alpha|_{[0,\delta]})} = \frac{|w|}{(I_q(w,w))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mu(p,w)}$.

(2) $F(u_0,v_0) = 0 \iff$ die Koordinatenlinien $u \mapsto X(u,v_0)$ und $v \mapsto X(u_0,v)$ schneiden einander senkrecht (im Punkt $X(u_0,v_0)$.)

(3) $E = 1 \iff$ Alle Parameterlinien $u \mapsto X(u,v)$ sind nach Bogenlänge parametrisiert. Analog für $G = 1$.

(4) $DX(q) : (\mathbb{R}^2, I_q) \to (DX(q)(\mathbb{R}^2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist eine Isometrie zwischen Euklidischen Vektorräumen.

(5) Seien $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ regulär $\alpha(0) = \beta(0) = q$. Dann gilt: der Schnittwinkel von $\hat{\alpha} = X \circ \alpha$ und $\hat{\beta} = X \circ \beta$ an der Stelle 0 ist gleich dem Schnittwinkel von α und β a. d. Stelle 0 bzgl. I_q, denn

$$\langle \hat{\alpha}'(0), \hat{\beta}'(0)\rangle = \langle DX(\alpha(0))\alpha'(0), DX(\beta(0))\beta'(0)\rangle = I_q(\alpha'(0), \beta'(0))$$

sowie $|\hat{\alpha}'(0)| = \sqrt{I_q(\alpha'(0), \alpha'(0))}$ und $|\hat{\beta}'(0)| = \sqrt{I_q(\beta'(0), \beta'(0))}$.

4.2 Fakt. *(1) Eine "Landkarte" $X : U \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$ ist bis auf einen konstanten Faktor $\frac{1}{c}$ ("Maßstab") längentreu*

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \alpha : [a,b] \to U \text{ gilt } \tfrac{L_{Eukl}(\alpha)}{L(\hat{\alpha})} = \tfrac{1}{c} \\
&\iff \forall (q,w) \in U \times \mathbb{R}^2 : \mu(q,w) = \frac{1}{c} \\
&\iff \forall E = G = c^2,\ F = 0.
\end{aligned}$$

(2) X heißt winkeltreu $\iff$ $\forall\ \alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ regulär mit $\alpha(0) = \beta(0)$ gilt $\angle_{Eukl}(\alpha'(0), \beta'(0)) = \angle_{Eukl}(\hat{\alpha}'(0), \hat{\beta}'(0))$

$$\iff \exists f : U \to \mathbb{R}_{>0} : I_q(w_1, w_2) = f(q)\langle w_1, w_2\rangle_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = f \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. längentreu $\implies$ winkeltreu.

4.3 Satz. *(a) Verhalten von I bei Anwendung einer Isometrie F des $\mathbb{R}^3$ auf X:*

$$\widetilde{X} = F \circ X,\ F(x) = Ax + a \text{ mit } A \in O(3),\ a \in \mathbb{R}^3.$$

Dann gilt $\widetilde{I} = I$.

(b) Verhalten von I bei Umparametrisierung: Sei $\varphi : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to U \subset \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus, $\widetilde{X} := X \circ \varphi$, $\widetilde{q} \in \widetilde{U}$, $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\widetilde{I}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = I_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_1, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_2)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E}(\widetilde{q}) & \widetilde{F}(\widetilde{q}) \\ \widetilde{F}(\widetilde{q}) & \widetilde{G}(\widetilde{q}) \end{pmatrix} = D\varphi(\widetilde{q})^{\perp} \begin{pmatrix} E(\varphi(\widetilde{q})) & F(\varphi(\widetilde{q})) \\ F(\varphi(\widetilde{q})) & G(\varphi(\widetilde{q})) \end{pmatrix} D\varphi(\widetilde{q}).$$

Zu diesem Transformationsverhalten sagt man "I ist ein $(0,2)$- Tensorfeld".

Beweis. (a) $D\widetilde{X} = A \circ DX$, $A \in O(3) \Rightarrow$ Behauptung.

(b) $\widetilde{I}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = \langle (D\widetilde{X}(\widetilde{q})\widetilde{w}_1, \rangle D\widetilde{X}(\widetilde{q})\widetilde{w}_2\rangle \overset{Kettenregel}{=} \langle DX(\varphi(\widetilde{q}))(D\varphi(\widetilde{q})w_1), DX(\varphi(\widetilde{q}))(D\varphi(\widetilde{q})w_2)\rangle = I_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q})w_1, D\varphi(\widetilde{q})w_2)$.

□

4.4 Definition. Sei $U :\to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück, $R \subset U$ meßbar (z.B. kompakt oder offen). Der Flächeninhalt $A(X|_R) \in [0, \infty]$ von $X|_R$ ist definiert durch

$$A(X|_R) := \int_R \sqrt{(EG - F^2)(u,v)}dudv = \int_R \left|\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}\right|(u,v)dudv.$$

Bemerkung. Erinnerung:

$$|v \times w|^2 = \det(v, w, v \times w) = \big(\det((v, w, v \times w))\det((v, w, v \times w)^T)\big)^{\frac{1}{2}}$$

Determinantenproduktsatz$= \big(\det((v, w, v \times w) \cdot (v, w, v \times w)^T)\big)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\det\begin{pmatrix} |v|^2 & \langle v, w\rangle & 0 \\ \langle w, v\rangle & |w|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |v \times w|^2 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = |v \times w|\sqrt{|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2}.$$

Beweis von Fakt 4.2. (1) $L(\hat\alpha) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt$

$$I_q(w, w) = c^2|w|^2 \ \Rightarrow\ L(\hat\alpha) = \int_a^b c|\alpha'(t)|dt = cL(\alpha)$$

Umkehrung:$L(\hat\alpha|_{[0,t]}) = cL(\alpha|_{[0,t]})\ \forall t \overset{\text{Differenzieren bei } t=0}{\Rightarrow} \sqrt{I_{\alpha(0)}(\alpha'(0), \alpha'(0))} = c|\alpha'(0)|$

Sei nun $(x, w) \in U \times \mathbb{R}^2$ beliebig $\Rightarrow \exists \alpha : [a, b] \to U, (\alpha(0), \alpha'(0)) = (q, w)$. Damit folgt $I_q(w, w) = c^2|w|^2$.

(2) winkeltreu $\iff \forall (q, w_1) = (q, w_2) \in U \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$:

$$\angle_{Eukl}(w_1, w_2) = \angle_{Eukl}(DX(q)w_1, DX(q)w_2) = \angle_{I_q}(w_1, w_2).$$

Insbesondere folgt $\langle e_1, e_2\rangle = 0 \Rightarrow I_q(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow F = 0$.

$$\langle e_1 - e_2, e_1 + e_2\rangle = 0 \ \Rightarrow\ I_q(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0 = E - G \ \Rightarrow\ E = G =: f.$$

□

Bemerkung (Bemerkung zu Satz (4.3) (b)).

$$D\varphi(q) : (\mathbb{R}^2, \widetilde{I}_q) \to (\mathbb{R}^2, I_q)$$

ist eine Isomorphismus zwischen Euklidischen Vektorräumen.

Erinnerung. $DX(q) : (\mathbb{R}^2, I_q) \to (DX(q)(\mathbb{R}^2), \langle\cdot,\cdot\rangle|_{DX(q)(\mathbb{R}^2)\times DX(q)(\mathbb{R}^2)})$ ist ein Isomorphismus zwischen Euklidischen Vektorräumen.

Beispiele. (1) $X(u, v) = (u, v, f(u, v)) \Rightarrow E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2, F = \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle$.

$$\Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}$$

$$R \subset \text{Definitionsbereich von } f \quad \Rightarrow A(X|_R) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}dudv.$$

Bemerkung. X heißt flächentreu (bis auf einen Faktor $\frac{1}{c^2}$) $\iff$ $\sqrt{EG-F^2}=c^2$.

4.5 Satz. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein (parametrisiertes) Flächstück, $R \subset U$ meßbar. Dann gilt*

(a) Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie, $\widetilde{X} = F \circ X$, dann $A(\widetilde{X}|_R) = A(X|_R)$.

(b) Ist $\varphi : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus, $\widetilde{R} := \varphi^{-1}(R)$, $\widetilde{X} = X \circ \varphi$, so gilt $A(\widetilde{X}|_{\widetilde{R}}) = A(X|_R)$.

Beweis. (a) Folgt direkt aus dem Satz (4.3) Teil (a).

(b) Satz (4.3) Teil (b) $\Rightarrow$

$$\sqrt{\widetilde{G}\widetilde{E}-\widetilde{F}^2} = \sqrt{\det\begin{pmatrix}\widetilde{E} & \widetilde{F}\\ \widetilde{F} & \widetilde{G}\end{pmatrix}} = \sqrt{\det\left(D\varphi^T\begin{pmatrix}E\circ\varphi & F\circ\varphi\\ F\circ\varphi & G\circ\varphi\end{pmatrix}D\varphi\right)} = \sqrt{EG-F^2}\circ\varphi|\det D\varphi|.$$

Mit der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}A(\widetilde{X}|_{\widetilde{R}}) &= \int\int_R \sqrt{\widetilde{E}\widetilde{G}-\widetilde{F}^2}d\widetilde{u}d\widetilde{v}\\ &= \int\int_R \sqrt{EG-F^2}\circ\varphi|\det D\varphi|d\widetilde{u}d\widetilde{v} = \int\int_{\varphi(\widetilde{R})=R}\sqrt{EG-F^2}dudv = A(X|_R).\end{aligned}$$

$\square$

4.6 Satz. *Seien $p \neq q$ Punkte auf $\mathbb{S}^2$. Ist $p \neq -q$, so ist das kürzere Großkreissegemnent $\hat{\alpha}_0$ von p nach q kürzeste Kurve auf $\mathbb{S}^2$, die p und q verbindet. Jede andere kürzeste Kurve auf $\mathbb{S}^2$ von p nach q ist eine monotone Umparametrisierung von $\hat{\alpha}_0$. Ist $q = -p$, so sind die kürzesten Kurven auf $\mathbb{S}^2$ von p nach q genau die (monoton parametrisierten) halben Großkreise duch p und $q = -p$.*

Beweis. $\exists A \in O(3)$: $Ap = (0,0,1)$ und $Aq = (0, \sin\theta_0, \cos\theta_0)$ mit $\theta_0 \in (0,\pi)$ (denn $p \neq -q$).

Sei $(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}\times(0,\pi) \mapsto (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$ Parametrisierung von $\mathbb{S}^2$ als parametrisiertes, reguläres Flächenstück (insbesondere nicht injektiv) (Rotationsfläche von $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$).

Sei $\alpha_0 : [0,\theta_0] \to \mathbb{R}\times(0,\pi)$, $\alpha_0(t) = (\frac{\pi}{2}, t)$. $\Rightarrow$ $\hat{\alpha}_0(t) = X\circ\alpha_0(t)$ parametrisiertes kürzeres Großkreissegment von p nach q, nach Bogenlänge parametrisiert , also $L(\hat{\alpha}_0) = \theta_0$.

Sei $\hat{\alpha} : [0,a] \to \mathbb{S}^2$ eine beliebige stückweise C^1-Kurve von p nach q, d.h. $\hat{\alpha}(0) = p$, $\hat{\alpha}(a) = q_0$.
Zu zeigen: $L(\hat{\alpha}) \geq L(\hat{\alpha}_0)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\hat{\alpha}(t) \neq p$ $\forall t \in (0,a)$. Sonst ersetzen wir $\hat{\alpha}$ durch $\hat{\alpha}|_{[t_0,a]}$ wobei $t_0 = \max\{t \in [0,a] : \alpha(t) = p\}$.

1. Fall. $\hat{\alpha}(t) \neq -p = q$ $\forall t \in [0,a]$ $\Rightarrow \exists\alpha : (0,a) \to \mathbb{R}\times(0,\pi)$ stückweise C^1, $\alpha(t) = (\varphi(t),\theta(t))$ so dass $X\circ\alpha = \hat{\alpha}$, nämlich

$$\hat{\alpha}(t) = (x(t),y(t),z(t)) \;\Rightarrow\; \theta(t) = \arccos z(t) \in (0,\theta)$$

und φ ist die Winkelfunktion zu $e(t) = \frac{1}{|(x(t),y(t)|}(x(t), y(t)) \in \mathbb{S}^1$.

Dann $z(0) = 1 \Rightarrow \lim_{t\downarrow 0} \theta(t) = 0$, $\theta_0 = \theta(a)$ und

$$\begin{aligned}
L(\hat{\alpha}) = L(X\circ\alpha) &= \int_0^a \underbrace{\sqrt{\langle DX(\alpha(t))\alpha'(t), DX(\alpha(t))\alpha'(t)\rangle}}_{\sqrt{\alpha'(t)^T \begin{pmatrix} E\circ\alpha(t) & F\circ\alpha(t) \\ F\circ\alpha(t) & G\circ\alpha(t)\end{pmatrix} \alpha'(t)}} dt \\
&= \int_0^a \sqrt{\sin^2\theta\varphi'(t)^2 + \theta'(t)^2} dt \geq \int_0^a |\theta'(t)| dt \geq \int_0^a \theta'(t) dt = \theta(a) = \theta_0 = L(\hat{\alpha}_0).
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\theta' > 0$ und $\varphi \equiv const.$

2. Fall. Falls $t \in (0, a]$ existiert mit $\alpha(t) = -p$, (d.h. $p = N$ Nordpol und $-p = S$ Südpol).

Ohne Einschränkung sei t_1 minimal, d.h. $t_1 = \min\{t \in [0, a] : \hat{\alpha}(t) = S\}$. Es folgt, dass $\hat{\alpha}((0, a)) \subset \mathbb{S}^2 \backslash \{(0, 0, 1), -(0, 0, 1)\}$.

1. Fall Sei $\hat{\alpha}|_{[0,t_1-\epsilon]} =: \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = X\circ\alpha$ für $\alpha(t) = (\varphi(t), \theta(t))$ mit $\lim_{t\to 0}\theta(t) = 0$ and $\lim_{\epsilon\to 0}\theta(t_1-\epsilon) = \pi$.

$$L(\hat{\alpha}) \geq L(\hat{\alpha}|_{[0,t_1-\epsilon]}) = \theta(t_1-\epsilon) - \theta(\epsilon) \;\Rightarrow\; L(\hat{\alpha}) \geq \lim_{\epsilon\downarrow 0} L(\hat{\alpha}|_{[\epsilon,t_1-\epsilon]}) = \pi.$$

Gleichheit genau dann, wenn $t_1 = a$, $\theta' > 0$ und $\varphi' = 0$ ($\Leftrightarrow \varphi \equiv const.$) $\Leftrightarrow \hat{\alpha}$ parametrisiert halben Längenkreis. □

5 Die 2. Fundamentalform

Die 1. Fundamentalform beschreibt genau das, was ein 2-dimensionaler Bewohner einer Fläche, der nichts vom umgebenden 3-dimensionalen Raum weiß, über seine Fläche durch Messen herausfinden kann.

Die 2. Fundamentalform wird beschreiben, wie sich die Fläche im umgebenden Raum "krümmt".

Vorbemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Dann gilt

$$X(U) \subset \text{Ebene} \iff N(p) \equiv const = N_0$$

Beweis der Vorbemerkung. " $\Rightarrow$ " trivial
" $\Leftarrow$ "

$$\frac{\partial\langle X, N\rangle}{\partial u} = \underbrace{\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N\rangle}_{=0} + \langle X, \frac{\partial N}{\partial u}\rangle \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\langle X, N_0\rangle}{\partial u} = 0 = \frac{\partial\langle X, N_0\rangle}{\partial v}.$$

Das heißt, die Abbildung $\langle X, N_0\rangle : U \to \mathbb{R}$ erfüllt $D\langle X, N_0\rangle = 0$. $\Rightarrow \langle X, N_0\rangle \equiv const \Rightarrow X(U) \subset$ affine Ebene. □

"X gekrümmt in $\mathbb{R}^3$" $\iff$ X liegt nicht in einer Ebene $\iff$ N ist nicht konstant.

5.1 Definition. Die 2. Fundamentalform II eines Flächenstücks $X : U \to \mathbb{R}^3$ C^2 ordnet jedem $q \in U$ die symmetrische Bilinearform II_q auf $\mathbb{R}^2$ zu, die durch

$$II_q(w_1, w_2) := -\langle DN(q)w_1, DX(q_2)w_2\rangle \overset{zu\ zeigen}{=} \langle w_1^T \underbrace{D^2X(q)}_{(\frac{\partial X}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,2}} w_2, N(q)\rangle$$

definiert ist. Man schreibt auch $w_1^T D^2X(q)w_2 = DX(q)(w_1, w_2)$.

Bemerkung. Die Matrix von II bzgl. e_1, e_2 wird bezeichnet durch $\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ wobei

$$l = -\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle,\ m = -\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle,\ n = -\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle.$$

Es gilt $\langle N, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle + \langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\rangle = 0 \Rightarrow\ l = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, N\rangle = \langle D^2X(e_1, e_1), N\rangle$.

$$\Rightarrow\ \langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle + \langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = 0\ \Rightarrow\ m = -\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle = \langle (D^2X(e_1, e_2)), N\rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle.$$

Ebenso für n.

Bezeichnung. Weitere Bezeichnungen sind: $II = h$, $II(e_i, e_j) = h_{i,j} = \langle \frac{\partial X}{\partial u_i \partial u_j}, N\rangle$.

5.2 Fakt. *Ist U zusammenhängend, so gilt: $II = 0 \iff X(U) \subset$ Ebene.*

Beweis. " $\Leftarrow$ " trivial " $\Rightarrow$ " Sei $II \equiv 0 \Rightarrow$ $\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle = 0$, $\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle = 0$, und $\langle N, N\rangle = 1$ $\Rightarrow \langle \frac{\partial N}{\partial u}, N\rangle = 0$.
Da $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, N ein Basis feld ist, folgt daraus, dass $\frac{\partial N}{\partial u} = 0$. Ebenso $\frac{\partial N}{\partial v} = 0$.
Da U zusammenhängend, folgt $N = const.$ $\overset{\text{Vorbemerkung}}{\Rightarrow}$ $X(U) \subset$ Ebene. □

Beispiel. Sei $X(U) = \mathbb{S}^2(r) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. $\Rightarrow N(u, v) = \pm\frac{1}{r}X(u, v) \Rightarrow$ $II = -\langle DN(u, v)\cdot, DX(u, v)\cdot\rangle = \mp\frac{1}{r}\langle DX(u, v)\cdot, DX(u, v)\cdot\rangle = \mp\frac{1}{r}I_q$.

5.3 Fakt. *Sei $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mit $f(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$.*
Dann gilt:

$$I_{(0,0)}(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2\rangle\ (\Leftrightarrow\ E(0, 0) = 1 = G(0, 0),\ F(0, 0) = 0)$$
$$II_{(0,0)}(w_1, w_2) = D^2 f((0, 0))(w_1, w_2)$$

und mit der Taylor entwicklung folgt

$$f(u, v) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + \underbrace{\langle \nabla f(0, 0), (u, v)\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle Df(0, 0)(u, v), (u, v)\rangle}_{=II_{(0,0)}((u,v),(u,v))} + R(u, v)|(u, v)|^2$$

mit $R(u, v) \to 0$ für $|(u, v)| \to 0$.

Beweis. Wir berechnen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \end{pmatrix}$$

$$D^2 X(e_1, e_1) = e_1^T D^2 X e_1 = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

. Mit

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$

folgt $II(e_1, e_1) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$.

Somit $II_{(0,0)}(e_1, e_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$. Analog gilt $II_{(0,0)}(e_2, e_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ und $II_{(0,0)}(e_1, e_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$. $\square$

5.4 Fakt (Invarianzeigenschaft von II)**.** *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ Flächenstück.*

(a) Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Isometrie und $\widetilde{X} := F \circ X$, so gilt $\widetilde{II} = \pm II$ mit " + " $\Leftrightarrow$ F orierentierungs erhaltend .

(b) Sei $\varphi : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to U$ Diffeomorphismus und $\widetilde{X} := X \circ \varphi$, $\widetilde{q} \in \widetilde{U} \Rightarrow \forall \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$\widetilde{II}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = \pm II_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_1, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_2)$$

mit " + " $\Leftrightarrow \det D\varphi(\widetilde{q}) > 0$.

Bemerkung (Bemerkung zu (b)). II definit (positive oder negativ) $\Leftrightarrow \widetilde{II}$ definit.

Beweis. (a) $F(x) = Ax + a \Rightarrow \widetilde{N} = \pm A \circ N$ mit " + " $\Leftrightarrow A \in SO(3)$.

$$\widetilde{N} = \frac{\left(A\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right) \times \left(A\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)\right)}{|\cdots|} = \underbrace{\det A}_{\pm} \frac{A\left(\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}\right)}{|\cdots|}.$$

$$\Rightarrow \widetilde{II} = -\langle D\widetilde{N}, D\widetilde{X}\rangle = \mp\langle ADN, ADX\rangle = \pm II.$$

(b)

$$\begin{aligned} \widetilde{II}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) &= -\langle D\widetilde{N}(\widetilde{q})\widetilde{w}_1, D\widetilde{X}(\widetilde{q})\widetilde{w}_2\rangle \\ &= \mp\langle DN(\varphi(\widetilde{q}))(D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_1), DX(\varphi(\widetilde{q}))D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_2\rangle \\ &= \pm II_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_1, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}_2) \end{aligned}$$

Beachte hier, dass

$$\widetilde{N} = \frac{\frac{\partial(X\circ\varphi)}{\partial \widetilde{u}} \times \frac{\partial(X\circ\varphi)}{\partial \widetilde{v}}}{|\ldots|} = \frac{DXw_1 \circ \varphi \times DXw_2}{|\ldots|} = \pm N \circ \varphi.$$

where $w_i = (D\varphi) \circ \varphi^{-1} e_i$.

$\square$

Bemerkung. II is ein $(0,2)$-Tensorfeld $\Leftrightarrow$ $\widetilde{h}_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(h_{kl} \circ \varphi)\frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j} \quad \forall 1 \leq i,j \leq 2$.

5.5 Folgerung. *II_q (positiv oder negativ) definit $\Rightarrow \exists$ Umgebung V von q in U so, dass*

$X(V) \cap \mathcal{T}(X,q) = \{q\},\ X(V) \subset$ *in einem von $\mathcal{T}(X,q)$ berandeten Halbraum.($\Leftrightarrow$ X ist local konvex um q.)*

II_q indefinit und nicht ausgeartet $\Rightarrow X$ ist (lokal) um$q$ eine Sattelfläche.

Begründung: Nach Drehung und Umparametrisierung kann jedes FS in einer Umgebung jedes Punktes dargestellt werden als Graph. (Positiv, negativ) definite bzw. indefinit sind invariant unter Drehung und Umparametrisierung. Also o.E. $II_{(0,0)} = D^2 f(0,0)$. Es folgt die Behauptung.

5.6 Satz (Satz von Meusnier, Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place (1754-1793))**.** *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein FS, $\alpha : I \to U$ eine reguläre Kurve, $\hat{\alpha}$ die Krümmung $\hat{\alpha} := X \circ \alpha$, $t \in I$ und $\hat{\kappa}(t) \neq 0$. Sei $\hat{\theta}(t) := \angle(\mathcal{T}(X, \alpha(t)), Schmiegebene\ von\ \hat{\alpha}\ in\ t) = \angle(N(\alpha(t)), \hat{B}(t)) \in [0,\pi]$ ($N : U \to \mathbb{S}^2$ Flächennormale). Dann gilt*

$$\hat{\kappa}(t) \sin \hat{\theta}(t) = \frac{\left| II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \right|}{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} \leq \hat{\kappa}(t).$$

Falls $\hat{\kappa}(t) = 0 \Rightarrow II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$.

Bemerkung. Alle Kurven $\hat{\alpha} = X \circ \alpha$ mit $\alpha(t_0) = q \in U$ und gleicher Schmiegebene $(\neq \mathcal{T}(X,q))$ in t_0 haben die gleiche Krümmung an der Stelle t_0.
Beispiel. $\hat{\alpha}$ Kurve auf $\mathbb{S}^2(r) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \Rightarrow \hat{\kappa} \circ \alpha \geq \frac{1}{r}$.

Beweis. (i) $\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'' \sim \hat{B}$ (Binormalenvektor von $\hat{\alpha}$).

$$|(\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'') \times N \circ \alpha| = |\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}''| \sin \hat{\theta} = \hat{\kappa} |\hat{\alpha}'|^3 \sin \hat{\theta}.$$

Hier ist N die Flächennormale.

(ii) $(v \times w) \times z = \langle v, z\rangle w - \langle w, z\rangle v \Rightarrow (\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'') \times N \circ \alpha = -\langle \hat{\alpha}'', N \circ \alpha\rangle \hat{\alpha}'$.

$$\hat{\alpha}''(t) = (X \circ \alpha)''(t) = (D^2 X(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t)) + \underbrace{DX(\alpha(t))\alpha''(t)}_{\perp N \circ \alpha(t)}.$$

$\Rightarrow \langle \hat{\alpha}'', N \circ \alpha\rangle = II_\alpha(\alpha', \alpha') \Rightarrow |(\hat{\alpha}' \times \hat{\alpha}'') \times (N \circ \alpha)| = |II_\alpha(\alpha', \alpha')||\hat{\alpha}'|$.
$\Rightarrow \hat{\kappa} \sin \hat{\theta} = \frac{|II_\alpha(\alpha', \alpha')|}{|\hat{\alpha}'|^2} = \frac{|II_\alpha(\alpha', \alpha')|}{I_\alpha(\alpha', \alpha')}$. □

5.7 Definition. Die Normalenkrümmung $\kappa_q(w)$ von $X : U \to \mathbb{R}^3$ an der Stelle $q \in U$ in Richtung von $w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist durch $\kappa_q(w) := \frac{II_q(w,w)}{I_q(w,w)}$ definiert.

Bemerkung. $|\kappa_{\alpha(t)}(\alpha'(t))| = \hat{\kappa}(t) \sin \hat{\theta}(t)$ für α wie oben.

Geometrische Bedeutung der Normalenkrümmung Sei $\hat{\alpha}$ die (parametrisierte) Schnittkurve von $E = X(q) + \operatorname{span}\{DX(q)w, N(q)\}$ mit $X(q) = \hat{\alpha}(0)$. Dann $\hat{\kappa}(0) = |\kappa_q(w)|$.

Beispiel. $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, $\kappa_{(0,0)}(w) = \frac{1}{|w|^2} D^2 f(0,0)(w,w)$.

In der Graph Situation: $E = X(q) + \operatorname{span}\{DX(q)w, N(q)\} = \operatorname{span}\{w, e_3\}$ and $E \cap X(U) = f(q + t\widetilde{w}) = \hat{\alpha}(t)$ with $|\widetilde{w}| = 1$. Also $\hat{\alpha}''(0) = D^2 f(q)(\widetilde{w}, \widetilde{w}) = \kappa_q(\widetilde{w})$.

5.8 Definition. Sei $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ FS, $q \in U$.

1. Die lineare Abbildung $L_q \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ mit $I_q(L_q w, z) = II_q(w, z)$ $\forall w, z \in \mathbb{R}^2$ heißt **Weingartenabbildung** von X in q.
2. Die Eigenwerte $k_1(q) \leq k_2(q)$ von L_q heißen die Hauptkrümmungen, die Eigenvektoren von L_q heißen die **Hauptkrümmungsrichtungen** von X in q.
3. Die Funktion $K : U \to \mathbb{R}$, $K(q) = \det(L_q) = k_1(q)k_2(q)$, heißt **Gausskrümmung** von X.
4. Die Funktion $H : U \to \mathbb{R}$, $H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{spur}(L_q) = \frac{1}{2}(k_1(q) + k_2(q))$ heißt **mittlere Krümmung** von X.
5. $q \in U$ heißt Nabelpunkt von $X \iff k_1(q) = k_2(q)$ ($\iff L_q = k_1(q)\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2} \iff II_q = k_1(q) I_q$.

Bemerkung. (a) Ist w_i Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung $k_i(q)$, $i = 1, 2$, so gilt

$$k_i(q) = \frac{I_q(L_q w_i, w_i)}{I_q(w_i, w_i)} = \frac{II_q(w_i, w_i)}{I_q(w_i, w_i)}$$

d.h. $k_i(q)$ ist die Normalenkrümmung in Richtung w_i.

(b) Ist $k_1(q) < k_2(q) \Rightarrow$ Hauptkrümmungsrichtungen sind orthogonal bzgl. I_q.

5.9 Satz. *Sei (w_1, w_2) ONB in $(\mathbb{R}^2, I_q)$ aus Eigenvektoren von L_q mit Eigenwerten (= Hauptkrümmungen) $k_1(q) \leq k_2(q)$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$:*

$$k_q(\cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2) = \cos^2\varphi k_1(q) + \sin^2\varphi k_2(q).$$

Speziell: $k_1(q) = \min_{w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} k_q(w)$, $k_2(q) = \max_{w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} k_q(w)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} k_q(\cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2) &= II_q(\cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2, \cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2) \\ &= I_q(\cos\varphi k_1(q) w_1 + \sin\varphi k_2(q) w_2, \cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2) \\ &= \cos^2\varphi k_1(q) + \sin^2\varphi k_2(q). \end{aligned}$$

$k_1(q) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)k_1(q) \leq \cos^2\varphi k_1(q) + \sin^2\varphi k_2(q) = k_q(\cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_2) \leq k_2(q)$.

□

Beispiel (Kreiszylinder). $X(u,v) = (u, \cos v, \sin v)) \;\Rightarrow\; E = G = 1,\; F = 0,\quad N(u,v) = (0, -\cos v, -\sin v)$.

$$l = -\langle DNe_1, DXe_1\rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle = 0,\; m = -\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle = 0,\; n = -\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle = 1.$$

Insbesondere ist II positiv semidefinit. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (II(e_i, e_j))_{i,j=1,2} = (\langle Le_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^2})_{i,j=1,2} = (L_{i,j})_{i,j=1,2}.$$

$\Rightarrow Le_1 = 0,\; Le_2 = e_2 \;\Rightarrow\; k_1 = 0,\; k_2 = 1$ mit Hauptkrümmungsrichtungen e_1, e_2.

$K = k_1 k_2 = 0, H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}$.

Beispiel (Sphäre). $X(U) \subset \mathbb{S}^2(r)$, $II = \pm\frac{1}{r} I \Rightarrow L = \pm\frac{1}{r}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, k_1 = k_2 = \pm\frac{1}{r}, K = \frac{1}{r^2}, H = \pm\frac{1}{r}$.

5.10 Satz (Berechnung von K, H, k_1, k_2 aus E, F, G, l, m, n)**.** *Sei* $(h_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ *die Darstellung von* II *und* $(g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ *die Darstellung von* I *(bzgl.* e_1, e_2*).*

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2},\quad H = \frac{1}{2}\frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} h_{i,j} g^{i,j}$$

wobei $(g^{ij})_{i,j=1,2}$ *die inverse Matrix von* $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ *ist.* k_1, k_2 *sind die Lösungen der Gleichung* $k^2 - 2Hk + K = 0$*, d.h.* $k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$*.*

Beweis. Berechne die Matrix von L bzgl. $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$, d.h. $Le_i = \sum_{k=1}^{2} L_i^k e_k$ ($\Rightarrow L = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix}$.)

$$II(e_i, e_j) = h_{ij} = I(Le_i, e_j) = \sum_{k=1}^{2} L_i^k I(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{2} L_i^k g_{kj}.$$

(d.h. $(h_{ij})_{i,j=1,2} = (g_{l,n})_{l,n=1,2} \cdot (L_i^k)_{k,i=1,2}$.)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{2} h_{ij} g^{jl} = \sum_{k=1}^{2} L_i^k (\sum_{j=1}^{2} g_{kj} g^{jl}) = L_i^l,\quad \text{d.h.}\; \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} \\ h^{21} & h^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix}$$

$K = \det L = \det(h_{i,j}) \det(g^{ij}) = \det(h_{ij}) / \det(g_{ij})$.

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{spur} L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} L_i^i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} g^{ij}$$

wobei $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\det(g_{ij})}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$. k_1, k_2 sind die Nullstellen des charakteristischen Polynomes $P_L(\lambda)$ von L, d. h. die Nullstellen von $\lambda^2 - \mathrm{spur}(L)t + \det(L)$. $\square$

Beispiel (Krümmung von Rotationsflächen). $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0), \quad y(t) > 0$, regulär. $X(t,\varphi) = (x(t), y(t)\cos\varphi, y(t)\sin\varphi)$.

$$E(t,\varphi) = \left|\frac{\partial X}{\partial t}\right|^2 = |\alpha'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2,\ F = \langle \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial \varphi}\rangle = 0,\ G(t,\varphi) = \left|\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right|^2 = y(t)^2.$$

$$N(t,\varphi) = \frac{1}{|\cdots|}\frac{\partial X}{\partial t}\times\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{1}{|\cdots|}\begin{pmatrix} x' \\ y'\cos\varphi \\ y'\sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -y\sin\varphi \\ y\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} yy' \\ -x'y\cos\varphi \\ -x'y\sin\varphi \end{pmatrix}}{y\sqrt{(x')^2 + (y')2}} = \frac{\begin{pmatrix} y' \\ -x'\cos\varphi \\ -x'\sin\varphi \end{pmatrix}}{|\alpha'(t)|}.$$

$$l = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, N\rangle = \frac{(x'', y''\cos\varphi, y''\sin\varphi)\cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x'\cos\varphi \\ -x'\sin\varphi \end{pmatrix}}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{|\alpha'|}(x''y' - x'y'').$$

$$m = \langle \frac{\partial X}{\partial t\partial \varphi}, N\rangle = \frac{(0, -y'\sin\varphi, y'\cos\varphi)\cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x'\cos\varphi \\ -x'\sin\varphi \end{pmatrix}}{|\alpha'(t)|} = 0$$

$$n = \frac{(0, -y\cos\varphi, -y\sin\varphi)\cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x'\cos\varphi \\ -x'\sin\varphi\cdot \end{pmatrix}}{|\alpha'(t)|} = \frac{x'y}{|\alpha'|}$$

$$\Rightarrow\ I = \begin{pmatrix} |\alpha'|^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix},\ II = \begin{pmatrix} \frac{x''y' - x'y''}{|\alpha'|} & 0 \\ 0 & \frac{x'y}{|\alpha'|} \end{pmatrix}$$

I, II bereits diagonal bzgl. $e_1, e_2 \Rightarrow e_1, e_2$ Hauptkrümmungsrichtungen.

$$\begin{pmatrix} |\alpha'|^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\alpha'|^2 y^2}\begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & |\alpha'|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha'|^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} |\alpha'|^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{x''y' - x'y''}{|\alpha'|} & 0 \\ 0 & \frac{x'y}{|\alpha'|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x''y' - x'y''}{|\alpha'|^3} & 0 \\ 0 & \frac{x'}{|\alpha'|y} \end{pmatrix}$$

Die Hauptkrümmungen k_1, k_2 sind die Diagonaleinträge der letzten Matrix. Insbesondere $k_1 = \kappa^\alpha$, die Krümmung der Kurve α.

$$K = k_1 k_2 = \frac{x'(x''y' - x'y'')}{|\alpha'|^4 y},\ H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(-\kappa^\alpha + \frac{x'}{|\alpha'|y}).$$

Falls $|\alpha'| = 1$, dann $x'x'' + y'y'' = 0. \Rightarrow\ K = -\frac{y''}{y}$.

5.11 Fakt (Invarianzeigenschaften der Krümmungsgrössen)**.** *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein FS.*

(a) Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie und $\widetilde{X} = F \circ X$, so gilt $\widetilde{L} = \pm L$, $\widetilde{K} = K$, $\widetilde{H} = \pm H$ mit "$+$" $\Leftrightarrow$ F ist orientierungserhaltend.

(b) *Ist* $\varphi : \widetilde{U} \to U$ *Diffeomorphismus und* $\widetilde{X} = X \circ \varphi$ *und* $\widetilde{q} \in \widetilde{U}$, *so gilt*

$$\widetilde{L}_{\widetilde{q}} = \pm D\varphi(\widetilde{q})^{-1} \circ L_{\varphi(\widetilde{q})} \circ D\varphi(\widetilde{q}), \widetilde{K} = K \circ \varphi, \widetilde{H} = \pm H \circ \varphi \text{ mit } "+" \Leftrightarrow \det D\varphi(\widetilde{q}) > 0.$$

Bemerkung. $q \mapsto L_q$ ist ein Tensorfeld wegen (b).

Beweis. (a) Erinnerung: $\widetilde{I} = I$ und $\widetilde{II} = \pm II$. Daraus folgt die Behauptung.

(b) $\widetilde{II}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}, \widetilde{z}) = \widetilde{I}_{\widetilde{q}}(\widetilde{L}_{\widetilde{q}}\widetilde{w}, \widetilde{z}) = I_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q}) \circ \widetilde{L}_{\widetilde{q}}\widetilde{w}, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{z})$. Andererseits

$$\widetilde{II}_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}, \widetilde{z}) = \pm II_{\varphi(\widetilde{q})}(D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{z}) = \pm I_{\varphi(\widetilde{q})}(L_{\varphi(\widetilde{q})} \circ D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}, D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{z}).$$

Es folgt $D\varphi(\widetilde{q}) \circ \widetilde{L}_{\widetilde{q}} = \pm L_{\varphi(\widetilde{q})} \circ D\varphi(\widetilde{q})$ und damit die Behauptung.

□

Bemerkung. $\widetilde{X} = X \circ \varphi$. Sei $\widetilde{w}$ die Hauptkrümmungsrichtung von $\widetilde{X}$ in $\widetilde{q} \Longleftrightarrow D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}$ ist Hauptkrümmungsrichtung von X in $\varphi(\widetilde{q})$, denn

$$L_{\varphi(\widetilde{q})} D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w} = D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{L}_{\widetilde{q}}\widetilde{w} = k_i(\widetilde{q}) D\varphi(\widetilde{q})\widetilde{w}.$$

Bemerkung (Hinweis). In den meisten Büchern ist die Weingartenabbildung definiert durch $\bar{L}_{X(q)} : DX(q)(\mathbb{R}^2) \to DX(q)(\mathbb{R}^2)$ wobei $\bar{L}_{X(q)} = DX(q) \circ L_q \circ DX(q)^{-1}$. Dann ist $DX(q)w$ ein Eigenvektor von $\bar{L}_{X(q)}$ falls w Hauptkrümmungsrichung von X in q.

5.12 Satz. *Sei* $X : U \to \mathbb{R}^3$ *FS,* $q \in U$. *Dann gilt*

$$DX(q) \circ L_q = -DN(q)$$

d.h. $DN(q)(\mathbb{R}^2) \subset DX(q)(\mathbb{R}^2)$ *und* $L_q = -(DX(q))^{-1} \circ DN(q)$.
Insbesondere gilt: $w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *HKR von* X *a. d. St.* $q \Longleftrightarrow DN(q)w$ *und* $DX(q)w$ *linear abhängig.*

Beweis. Für $w, z \in \mathbb{R}^2$ gilt: $II_q(w, z) = -\langle (DN(q)w), (DX(q)z) \rangle = I_q(L_q w, z) = \langle DX(q) \circ L_q w, DX(q)z \rangle$.

$$\Rightarrow \langle (DX(q) \circ L_q + DN(q))w, DX(q)z \rangle = 0 \ \forall w, z \in \mathbb{R}^2.$$

Daraus folgt die Behauptung. Beachten Sie, dass $DN(q)w \in DX(q)(\mathbb{R}^2)$, da $DN(q)w \perp N(q)$. □

Erinnerung. Flächenelement von X: Sei $R \subset U$ messbar. Dann

$$A(X|R) := \int\int_R \sqrt{EG - F^2} dudv = \int\int_R \left| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right| dudv.$$

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ messbar, dann

$$\int\int_R f dA^X = \int\int_R f \sqrt{EG - F^2} dudv$$

falls diese integrale existieren,

5.13 Satz. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ C^2-FS. Dann gilt für alle meßbaren $R \subset U$:*

$$\int_R |K| dA^X = \int_R |\frac{\partial N}{\partial u} \times \frac{\partial N}{\partial v}| dudv = A(N|R).$$

Die linke Seit heißt totale absolute Gaußkrümmung. Die rechte Seite ist die Fläche des Bildes von $N : U \to \mathbb{S}^2$ in $\mathbb{S}^2$. Insbesondere gilt $|K(q)| = \lim_{r \downarrow 0} \frac{A(N|B_r(q))}{A(X|B_r(q))}$.

Bemerkung. Die Gaußkrümmung beschreibt die Flächenverzerrung der Normalenabbildung.

Beweis. Aus dem vorigen Satz folgt

$$\frac{\partial N}{\partial u} = -DX \circ L(e_1),\ \frac{\partial N}{\partial v} = -DX \circ L(e_2).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial u} \times \frac{\partial N}{\partial v} &= \left(DX \circ \left(\sum_{i=1}^2 L_1^i e_i \right) \right) \times \left(DX \circ \sum_{j=1}^2 L_2^j e_j \right) \\
&= \left(L_1^1 \frac{\partial X}{\partial u} + L_1^2 \frac{\partial X}{\partial v} \right) \times \left(L_2^1 \frac{\partial X}{\partial u} + L_2^2 \frac{\partial X}{\partial v} \right) \\
&= L_1^1 L_2^2 \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} + L_1^2 L_2^1 \frac{\partial X}{\partial v} \times \frac{\partial X}{\partial u} = \det L \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = K \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Außerdem

$$\min_{B_r(q)} |K| A(X|B_r(q)) \leq A(N|B_r(q)) \leq \max_{B_r(q)} |K| A(X|B_r(q)).$$

Mit der Stetigkeit von $|K|$ folgt die letzte Behauptung. □

5.14 Satz. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein C^3-FS, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenhängend. Ist jedes $q \in U$ ein Nabelpunkt von X, so gilt $X(U) \subset$ Kugeloberfläche oder Ebene.*

Beweis. $\exists \lambda : U \to \mathbb{R}$ so, dass $II = \lambda I$ ($\lambda = k_1 = k_2$). Zeige: λ ist konstant.

$$II = \lambda I \;\Leftrightarrow\; L = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \;\Rightarrow\; DN = -\lambda DX.$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial X}{\partial u},\; \frac{\partial N}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial X}{\partial v} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \lambda \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \lambda \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}.$$

$\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial X}{\partial u}$ linear unabhängig $\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0 = \frac{\partial \lambda}{\partial v}$.

$$\stackrel{U \text{ zusammenhängend}}{\Longrightarrow} \lambda \equiv const.$$

$N + \lambda X = const$, denn $0 = DN + \lambda DX = D(N + \lambda X)$ und U zusammenhängend.

1. Fall: $\lambda = 0$. $\Rightarrow N = const \Rightarrow X(U) \subset$ Ebene.

2. Fall: $\lambda \neq 0$. $m := \frac{1}{\lambda}(N + \lambda X) = X + \frac{1}{\lambda} N \in \mathbb{R}^3$ konstant.

$$\Rightarrow\; |X - m| = \frac{1}{|\lambda|} |N| = \frac{1}{|\lambda|} = const.$$

$\Rightarrow X(U) \subset$ Kugeloberfläche mit Mittelpunkt m und Radius $\frac{1}{|\lambda|}$. □

Geometrische Bedeutung von $H \equiv 0$ ($\Leftrightarrow\ k_1 = -k_2$)

Sei $X_0 : U \to \mathbb{R}^3$ FS mit Normale $N : U \to \mathbb{S}^2$. Betrachte eine Funktion

$$h : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$$

mit $h_0 \equiv 0$, wobei für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$: $h(\cdot, t) =: h_t(\cdot)$. Dann heißt

$$X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3,\ X(q,t) = X_t(q) = X_0(q) + h(q,t)N(q)$$

eine normale Variation von X_0.

5.15 Definition. X_0 heißt Minimalfläche, falls für jede normal Variation X_t von X_0 und jedes kompakte $C \subset U$ gilt

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(X_t|C) = 0$$

Man sagt dazu, der Flächeninhalt $A(X_0|C)$ sei stationär unter normaler Variation.

Bemerkung. 1. I.a. ist $A(X_0|C)$ kein Minimum von $t \mapsto A(X_t|C)$.

2. $A(X_t|C)$ endlich.

3. $X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ heißt Variation von X_0 mit kompaktem Träger $K \subset U$, falls

$$\forall (q,t) \in (U \backslash K) \times (-\epsilon, \epsilon) :\ X_t(q) = X_0(q).$$

   Dann existiert $\delta \in (0, \epsilon)$, so dass für $t \in (-\delta, \delta)$ ein Diffeomorphismus $\varphi_t : U \to U$ existiert, so $\widetilde{X}_t = X_t \circ \varphi_t$ eine normale Variation ist.

5.16 Satz. *X_0 Minimalfläche $\iff$ X_0 hat mittlere Krümmung $H_0 \equiv 0$.*

Lemma. *Falls $G : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ in $t = 0$ differenzierbar und $\det G(0) \neq 0$, dann*

$$\frac{d}{dt} \det G(t)|_{t=0} = \det G(0) \mathit{Spur}(G(0)^{-1} G'(0)).$$

Beweis von Satz 5.16. $A(X_t|C) = \int\int_C \sqrt{E_t G_t - F_t^2} dudv = \int\int_C \sqrt{\det(g_{t,ij})_{ij}} dudv$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(X_t|C) &= \int\int_C \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\sqrt{E_t G_t - F_t^2}\right) dudv \\
&= \int\int_C \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{0,ij})_{ij}}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det((g_{t,ij})_{ij}) dudv \\
&= \int\int_C \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{0,ij})_{ij}}} \det((g_{0,ij})) \mathrm{Spur}\left((g_0^{ij}) \frac{d}{dt}|_{t=0} (g_{t,ij}) \right) dudv = (*)
\end{aligned}$$

Betrachte

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} g_{t,ij} = \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle \frac{\partial X_t}{\partial u_i}, \frac{\partial X_t}{\partial u_j} \rangle = \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{\partial X_t}{\partial u_i}, \frac{\partial X_0}{\partial u_j} \rangle + \langle \frac{\partial X_0}{\partial u_i}, \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{\partial X_t}{\partial u_j} \rangle = (**).$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X_t}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\frac{d}{dt}X_t = \frac{\partial}{\partial u_i}\frac{d}{dt}h(\cdot,t)N = \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\dot{h}_t\right)N + \dot{h}_t\frac{\partial N}{\partial u_i}.$$

Da $N \perp \frac{\partial X}{\partial u_i}$, folgt

$$(**) = \dot{h}_0\langle\frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial X_0}{\partial u_j}\rangle + \dot{h}_0\langle\frac{\partial X_0}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j}\rangle = 2\dot{h}_0 h_{0,ij}$$

$$\Rightarrow \ (*) = \int\int_C \dot{h}_0 \mathrm{Spur}\left((g_0^{ij})(h_{0,ij})\right)\sqrt{\det(g_{0,ij})_{ij}}dudv = 2\int\int_C \dot{h}_0 H_0\sqrt{\det(g_{0,ij})_{ij}}dudv.$$

□

6 Krümmungs- und Asymptotenlinien

6.1 Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ FS. $w \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ heißt Asymptotenrichtung von X in $q \in U$, falls $II_q(w,w) = 0$. Eine reguläre Kurve α in U bzw ihr Bild $\hat{\alpha} = X \circ \alpha$ heißt Asymptotenlinie, falls $II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0 \ \forall t$.

Eine reguäre Kurve α in U (bzw. $\hat{\alpha} = X \circ \alpha$) heißt Krümmungslinie, falls $\alpha'(t)$ für alle t Hauptkrümmungsrichtung von X in $\alpha(t)$ ist, d.h. falls $(N \circ \alpha)'(t) \sim \hat{\alpha}'(t)$ für alle t.

Ziel:

- Finde (Um)Parametrisierung von $X(U)$, so dass alle Koordinatenlinien Krümmungslinien bzw. Asymptotenlinien sind.
- Untersuchung von Flächen mit $K = 0$.

6.2 Lemma. *$X : U \to \mathbb{R}^3$ FS, $q \in U$.*

(a) Ist q nicht Nabelpunkt von X, so existieren eine Umgebung $V \subset U$ von q und differenzierbare Vektorfelder $A_1, A_2 : V \to \mathbb{R}^2$, so dass gilt: $A_1(p), A_2(p)$ sind linear unabhängige HKR von X in p für alle $p \in V$.

(b) Gilt $K(q) < 0$, so existieren eine Umgebung $V \subset U$ von q und differenzierbare Vektorfelder $B_1, B_2 : V \to \mathbb{R}^2$, so dass gilt: $B_1(p), B_2(p)$ sind linear unabhängige Asymptotenrichtungen von X in p für alle p in V.

Beweis. (a) Wegen $L_i^k = \sum_{j=1}^2 h_{ij}g^{jk}$ sind die Funktionen $L_i^k \in C^{l-2}(U,\mathbb{R})$ falls $X \in C^l$. Für festes $p \in U$ hat die Gleichung

$$L_p w = k_i(p)w, \ w \in \mathbb{R}^2, \ i = 1,2 \tag{8}$$

einen 1-dimensionalen Lösungsraum, falls p kein Nabelpunkt ist, d.h. $k_1(p) < k_2(p)$. Mit dem Gaußschen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssystem sieht man, dass in einer Umgebung von q (wo $k_1 < k_2$) C^{l-2}-Vektofelder A_1 und A_2 gefunden werden können, die (8) lösen.

(b) Wegen $K(q) = k_1(q)k_2(q) < 0$ ist q nicht Nabelpunkt von X. Normiere A_1, A_2 aus (a), so dass $I(A_i, A_i) = 1$, $i = 1, 2$. Dann folgt

$$II(\cos\varphi A_1 + \sin\varphi A_2, \cos\varphi A_1 + \sin\varphi A_2) = \cos^2\varphi k_1 + \sin^2\varphi k_2.$$

In einer Umgebung von q gilt $K(p) = k_1(p)k_2(p) < 0$, so dass wir dort $\varphi := \arctan\left(\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}\right)$ definieren können. Für die C^{l-2}-Vektorfelder gilt dann

$$B_1 = \cos\varphi A_1 + \sin\varphi A_2,\ B_2 = \cos\varphi A_1 + \sin\varphi A_2$$

gilt dann $II(B_i, B_i) = 0$ und B_1, B_2 sind linear unabhängig, da $\varphi > 0$.

□

6.3 Satz. *Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $q_0 \in U$ und $A_1, A_2 : U \to \mathbb{R}^2$ C^l-Vektorfelder mit $A_1(q_0), A_2(q_0)$ linear unabhängig. Dann $\exists \epsilon > 0$ und C^l-Diffeomorphimus*

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to V \subset U \text{ mit } \varphi(0,0) = q_0$$

so dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t) \sim A_1 \circ \varphi(s,t), \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t) \sim A_2 \circ \varphi(s,t)\ \forall (s,t) \in (-\epsilon,\epsilon)^2.$$

$v \sim w$ heißt, es existiert $\lambda \neq 0$ mit $w = \lambda v$.

Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $q_0 \in U$ und $A : U \to \mathbb{R}^2$ C^l mit $l \geq 1$ und $A(q_0) \neq 0$. Dann existiert einen Umgebung $V \subset U$ von q_0 und $h \in C^l(V, \mathbb{R})$: $h(q_0) = 0$ und $\forall q \in V$: $Dh(q) \neq 0$ und $Dh(q)(A(q)) = 0$.*

Beweis des Lemmas. Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf über gew. DGL: $\exists \epsilon > 0$: für alle p in einer Umgebung von q_0 existiert genau eine Lösung $\beta_p : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ der DGL

$$\beta_p'(t) = A(\beta_p(t)) \text{ mit Anfangswert } \beta_p(0) = p.$$

Für eine beliebige C^l-Kurve α mit $\alpha(0) = q_0$, $\alpha'(0)$ linear unabh. von $A(q_0)$, setzen wir

$$\widetilde{\varphi}(s,t) = \beta_{\alpha(s)}(t) \text{ insbesondere also } \widetilde{\varphi}(0,0) = \beta_{q_0}(0) = q_0.$$

Die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung der DGL von ihren Anfangswerten (Picard-Lindelöf) zeigt, dass $\widetilde{\varphi}$ ebenfalls C^l ist. $\widetilde{\varphi}$ hat die Eigenschaft

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}(s,t) = \beta'_{\alpha(s)}(t) = A(\beta_{\alpha(s)}(t)) = A(\widetilde{\varphi}(s,t))$$

also insbesondere $\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}(0,0) = A(\widetilde{\varphi}(0,0)) = A(q_0)$. Außerdem $\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial s}(0,0) = \alpha'(0)$.
Damit folgt es existiert $\eta \in (0, \epsilon)$ klein, so dass $\widetilde{\varphi} : (-\eta, \eta)^2 \to V \subset U$ ein C^l-Diffeomorphismus ist (Satz über lokale Umkehrbarkeit). Setze $(\psi_1, \psi_2) = \psi = \varphi^{-1}$.
Betrachte nun $h = \psi_1 : V \to \mathbb{R}$. Da ψ ein Diffeomorphismus ist, folgt $Dh(q) \neq 0\ \forall q \in V$. Außerdem

$$h \circ \widetilde{\varphi}(s,t) = s \ \Rightarrow\ t \mapsto h \circ \widetilde{\varphi}(s,t) = s = const \text{ bzgl. } t \ \Rightarrow\ Dh(\widetilde{\varphi}(s,t)) \underbrace{\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}(s,t)}_{=A(\widetilde{\varphi}(s,t))} = 0.$$

$\Rightarrow Dh(q)(A(q)) = 0\ \forall q \in V$. □

Beweis von Satz 6.3. Wähle $h_1, h_2 : V \to \mathbb{R}$ wie in dem Lemma für jeweils A_2 und A_1 $(A_1 \to h_2,\ A_2 \to h_1)$, und setze $h = (h_1, h_2)$.

Da $A_1(p), A_2(p)$ lin. unabh. $\forall p \in V$ und da $Dh_1(p) \neq 0 \neq Dh_2(p)$ $\forall p \in V$, folgt

$$Dh_1(A_1) =: \lambda : V \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, Dh_2(A_2) =: \mu : V \to \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Mit $h = (h_1, h_2)$ folgt dann

$$Dh(A_1) = \lambda e_1,\ Dh(A_2) = \mu e_2.$$

Also ist h ein lokaler Diffeomorphismus in q_0.

Sei nun φ die lokale Umkehrung von h in einer Umgebung $\widetilde{V}$ von q_0. Dann folgt

$$D\varphi(e_1) = (Dh)^{-1}(e_1) = \frac{1}{\lambda \circ \varphi} A_1 \circ \varphi, D\varphi(e_2) = (Dh)^{-1}(e_2) = \frac{1}{\mu \circ \varphi} A_2 \circ \varphi.$$

Da $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = D\varphi(e_1)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D\varphi(e_2)$, folgt die Behauptung. □

6.4 Folgerung. *$X : U \to \mathbb{R}^3$ C^l-FS, $l \geq 3$, und $q \in U$.*

(a) Ist q kein Nabelpunkt von X, so existiert ein C^{l-3}-Diffeomorphismus.

$$\varphi : \widetilde{U} \to \varphi(\widetilde{U}) \subset U \text{ mit } q \in \varphi(\widetilde{U})$$

und für $\widetilde{X} = X \circ \varphi$ gilt: $\widetilde{F} = 0$ und $\widetilde{m} = 0$.

(b) Ist $K(q) < 0$, so existiert ein C^{l-3}-Diffeomorphimus $\varphi : \widetilde{U} \to \varphi(\widetilde{U}) \subset U$ mit $q \in \varphi(\widetilde{U})$ und für $\widetilde{X} = X \circ \varphi$ gilt $\widetilde{l} = 0$ und $\widetilde{n} = 0$.

Beweis. (a) Wähle A_1, A_2 wie in Lemma 6.2 und wende den vorigen Satz an. Dann existiert also eine Umparametrisierung $\varphi : \widetilde{U} \to U$ wie dort. Für $\widetilde{X} = X \circ \varphi$ folgt dann

$$\widetilde{F} = \widetilde{I}(e_i, e_j) = I(A_i, A_j) = 0 \text{ falls } i \neq j$$

da A_i, A_j HKR (Eigenvektoren von L) sind, und

$$\widetilde{m} = \widetilde{II}(e_i, e_j) = \pm II(A_i, A_j) = \pm k_i I(A_i, A_j) = 0 \text{ falls } i \neq j.$$

(b) Analog.

□

Bemerkung. Aus $\widetilde{F} = \widetilde{m} = 0$ folgt, dass $\widetilde{I}$ und $\widetilde{II}$ Diagonalgestalt bzgl. e_1, e_2 haben. Daraus folgt e_1, e_2 sind die HKR von $\widetilde{X}$ in $\widetilde{p}$ für alle $\widetilde{p} \in \widetilde{U}$. Alle Kurven $s \mapsto (s, t_0)$ und $t \mapsto (s_0, t)$ (bzw. Ihre Bildkurven unter $\widetilde{X}$) sind also Krümmungslinien. Man nennt diese Parametrisierung deshalb "Krümmungslinienparameter".

Analog: falls $\widetilde{l} = \widetilde{n} = 0$ folgt $II(e_1, e_1) = II(e_2, e_2) = 0$, d.h. die Koordinatenlinien sind Asymptotenlinien. Man nennt diese Parametrisierung deshalb " Asymptotenlinienparameter".

6.5 Satz. *$X : U \to \mathbb{R}^3$ C^4-FS mit $K \equiv 0$. Sei $q \in U$ und $H(q) \neq 0$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : \widetilde{U} \to \varphi(\widetilde{U}) \subset U$ mit $q \in \varphi(\widetilde{U})$, so dass gilt*

$$X \circ \varphi(s,t) = \widetilde{X}(s,t) = c(s) + tV(s)$$

wobei $c, v : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\det(c', V, V') \equiv 0$. ($X(U)$ ist Teil einer Regelfläche).

Beweis. Wegen $K(q) = k_1(q)k_2(q) = 0$ und $H(q) = \frac{1}{2}(k_1(q) + k_2(q)) \neq 0$ ist q kein Nabelpunkt von X.
6.4 Satz $\Rightarrow$ o. E. sei $F \equiv 0 \equiv m$ und $k_1 = \frac{l}{E} \equiv 0$.
Wir wollen zeigen, dass dann die Kr.-linien $\hat{\alpha}_v(u) := X(u,v)$ (zur HK $k_1 = 0$) auf einer Geraden verläuft.

$$\text{Aus } -m = \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle = 0,\ -l = \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \rangle = 0$$

folgt wegen $\langle N, \frac{\partial N}{\partial u} \rangle = 0$:

$$\frac{\partial N}{\partial u} = 0.$$

Aus $-m = \langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \rangle = 0$, $\langle \frac{\partial N}{\partial v}, N \rangle = 0$ folgt wegen $0 = F = \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle$:

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \lambda \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Es folgt $\lambda = -k_2$ und somit

$$-n = \langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle = k_2 \langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle = k_2 G \quad \Rightarrow k_2 = -\frac{n}{G} \neq 0.$$

Also:

$$\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle = -\frac{1}{k_2} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial N}{\partial v} \rangle = \frac{1}{k_2} \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial N}{\partial u} \rangle = 0.$$

Wegen $0 = F = \langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle$ und $0 = l = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, N \rangle$ folgt daraus $\hat{\alpha}_v'' = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(\cdot, v) \sim \frac{\partial X}{\partial u} = \hat{\alpha}_v'$, d.h. $\hat{\alpha}_v' \times \hat{\alpha}_v'' = 0$. Somit verschwindet die Krümmung der Kurven $\hat{\alpha}_v = X(\cdot, v)$ und sie verlaufen somit auf Geraden nach Fakt 1.19, d.h.

$$X(u,v) = X(u_0, v) + \widetilde{t}(u,v) \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v) \quad (q = (u_0, v_0))$$

für eine Funktion $\widetilde{t}(u,v)$ mit $\frac{\partial \widetilde{t}}{\partial u} \neq 0$ ($\Leftarrow$ X regulär).
Die Abbildung $\Psi(u,v) := (v, \widetilde{t}(u,v))$ ist also in einer Umgebung von q ein Diffeomorphismus und für $\Phi(s,t) = \Psi^{-1}(s,t)$ (mit $s = v$) gilt:

$$\widetilde{X}(s,t) = X \circ \Phi(s,t) = \underbrace{X(u_0, s)}_{=:c(s)} + t \underbrace{\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, s)}_{=:V(s)}.$$

□

Bemerkung. Wir wissen bereits, dass $\det(c', V, V') = 0$ genau die Regelflächen mit $K = 0$ kennzeichnet (genannt: "Torsen"). Der Satz besagt also, dass eine nicht-nabelsches Flächenstück mit $K = 0$ lokal eine Torse ist.

Wir erhalten folgende "typischen" Fällen, wobei die " atypischen" Fälle genau die Punkte auf X betrifft die isolierte Nabelpunkte von X sind:

1. $V(s), V'(s)$ linear unabhängig $\Rightarrow \exists a, b : I \to \mathbb{R}$: $c' = aV + bV'$.

   1a. $a(s) = b'(s) \Rightarrow (bV)' = c' \Rightarrow c(s) - b(s)V(s) = const. = P \in \mathbb{R}^3$.
   $$\Rightarrow \ \widetilde{X}(s,t) = P + (t + b(s))V(s) \ \text{ Kegel.}$$

   1b. $a(s) \neq b'(s)$. Definiere neue Leitkurve $\widetilde{c}(s) = c(s) - b(s)V(s)$.
   $$\Rightarrow \widetilde{X}(s,t) = \widetilde{c}(s) + (t + b(s))V(s)$$
   wobei $\widetilde{c}' = c' - b'V - bV' = (a - b')V \sim V$.
   $\Rightarrow \widetilde{X}$ liegt auf der Tangentfläche von $\widetilde{c}$: $\widetilde{X}(s,t) = \widetilde{c}(s) + \underbrace{\dfrac{t - b(s)}{a(s) - b'(s)}}_{\text{linear in } t} \widetilde{c}'(s)$.

   ($X(s,t)$ Tangententfläche von $c \Leftrightarrow X(s,t) = c(s) + tc'(s)$.)

2. $V(s), V'(s)$ linear abhängig in einer Umgebung von s_0.

   $V' = \rho V$ und o.E. $|V| = 1 \Rightarrow V \equiv const.$

   $\Rightarrow X(s,t) = c(s) + tV$ liegt auf einem (verallgemeinerten) Zylinder.

6.6 Folgerung. *$X : U \to \mathbb{R}^3$ C^4-FS mit $K \equiv 0$. Dann ex. eine offene, dichte Teilmenge $\widetilde{U}$ von U: $\forall q \in \widetilde{U}\ \exists V \subset \widetilde{U}$ offen mit $q \in V$, so dass $X(V)$ entweder auf einer Tangentenfläche, oder auf einem Kegel, oder auf einem Zylinder (das schließt den Fall einer Ebene ein) liegt.*

Beweis. $\widetilde{U} = U_0 \cup U_{1a} \cup U_{1b} \cup U_2$ wobei
$$U_0 = \{q \in U : II \equiv 0 \text{ auf einer Umgebung von } q\}$$
$$U_i = \{q \in U : II_q \neq 0 \text{ und in einer Umgebung von } q \text{ triff Fall } i = 1a, 1b, 2 \text{ ein}\}.$$
$\widetilde{U}$ ist eine dichte Teilmenge von U, vgl. mit Anwesenheitsblatt 11. □

7 Hauptsatz der Flächentheorie und Theorema Egregium

Notation: $X = X(u^1, u^2)$, $\frac{\partial X}{\partial u^i} = X_i$, $\frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j} =: X_{ij}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.
$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $\frac{\partial N}{\partial u^i} := N_i$, $h_{ij} = II(e_i, e_j) = -\langle N_i, X_j \rangle = \langle N, X_{ij} \rangle$.

7.1 Satz (Strukturgleichungen)**.** *$X : U \to \mathbb{R}^3$ reguläres C^2-Flächenstück. Dann gilt*

1. $X_{ij} = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l X_l + h_{ij} N$
2. $N_i = -\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_{il} g^{lk} X_k$

wobei die Funktionen $\Gamma_{ij}^l : U \to \mathbb{R}$ durch

3. $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{lk} \left(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}\right)$

gegeben sind.

Bemerkung. Die Funktionen Γ_{ij}^l, $1 \leq i,j,l \leq 2$, heißen Christoffelsymbole von X. Da $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$ handelt es sich um 6 (i.a. verschiedene) Funktionen.

Beweis. 1. $\langle X_{ij}, N\rangle = h_{ij}$. Die Christoffelsymbole Γ_{ij}^l werden dann durch 1. definiert (die Koeffizienten von X_{ij} bzgl. der Basis X_1, X_2, N) und erfüllen

$$\langle X_{ij}, X_k\rangle = \langle \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l X_l, X_k\rangle = \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l g_{lk} \quad (*)$$

3. Benützt man $g_{ik,j} = \frac{\partial}{\partial u^j}\langle X_i, X_k\rangle = \langle X_{ij}, X_k\rangle + \langle X_{jk}, X_i\rangle$, so ergibt $(*)$ 6 lineare Gleichungen für die Funktionen Γ_{ij}^l, wobei die Koeffizienten des Gleichungssystems aus den g_{ij} und den $g_{ij,k}$ bestehen. Explizit rechnet man:

$$\begin{aligned} g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k} &= \langle X_{ij}, X_k\rangle + \langle X_i, X_{kj}\rangle + \langle X_{ki}, X_j\rangle + \langle X_k, X_{ij}\rangle - \langle X_{ik}, X_j\rangle - \langle X_i, X_{kj}\rangle \\ &= 2\langle X_{ij}, X_k\rangle \overset{(*)}{=} 2\sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit g^{kr}, und summieren über $k = 1,2 \Rightarrow 3.$

2. Aus Satz 5.12 folgt $DN(q) = -DX(q)\cdot L_q$. Es folgt $N_i = -\sum_{k=1}^2 L_i^k X_k$. Außerdem gilt $L_i^k = \sum_{l=1}^2 h_{il} g^{lk}$. $\Rightarrow 2.$

$\square$

7.2 Folgerung. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und $X, \widetilde{X} : U \to \mathbb{R}^3$ reg. C^2-FSe mit $\widetilde{I} = I$ und $\widetilde{II} = II$. Dann existiert eine orientierungserh. Isometrie F des $\mathbb{R}^3$ mit $F \circ X = \widetilde{X}$.*

Beweis. Sei $q_0 \in U$. Wegen $I_{q_0} = \widetilde{I}_{q_0}$, existiert eine Isometrie F, so dass $F \circ X(q_0) = \widetilde{X}(q)$ und $(F\circ X)_i(q_0) = \widetilde{X}_i(q_0)$, $i = 1,2$, gilt.
Wir ersetzen X durch $F \circ X$ und können ab jetzt $X(q_0) = \widetilde{X}(q_0)$ und $X_i(q_0) = \widetilde{X}_i(q_0)$ für $i = 1,2$ annehmen. Insbesondere auch $N(q_0) = \widetilde{N}(q_0)$.
Zu $q \in U$ wälen wir eine C^1-Kurve $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0,1] \to U$ mit $\alpha(0) = q_0$ und $\alpha(1) = q$. Die Strukturgleichungen liefern nun ein System gewöhnlicher, linearer DG für die 3 Vektorfunktionen $X_i \circ \alpha,\ N \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} (X_i\circ\alpha)' &= \sum_{k=1}^{2} (X_{ik}\circ\alpha)(\alpha^k)' = \sum_{k,l=1}^{2} (\Gamma_{ik}^l \circ\alpha)(\alpha^k)'(X_l\circ\alpha) + \sum_{k=1}^{2} (h_{ik}\circ\alpha)(\alpha^k)' N\circ\alpha \\ (N\circ\alpha)' &= \sum_{i=1}^{2} (N_i\circ\alpha)(\alpha^i)' = \sum_{i,l,k=1}^{2} (h_{il}\circ\alpha)(g^{lk}\circ\alpha)(\alpha^i)'(X_k\circ\alpha) \end{aligned}$$

Das sind 9 gew. lineare DGL für die 9 Komponentfunktionen von $X_i \circ \alpha$, $i = 1,2$, und $N \circ \alpha$.
Wegen $g_{ij} = \widetilde{g}_{ij}$ und $h_{ij} = \widetilde{h}_{ij}$ erfüllen die $\widetilde{X}_i \circ \alpha$, $\widetilde{N} \circ \alpha$ das gleiche System und haben

wegen $X_i(q_0) = \widetilde{X}_i(q_0)$, $N(q_0) = \widetilde{N}(q_0)$ die gleichen Anfangswerte für $t = 0$.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf liefert $X_i \circ \alpha(t) = \widetilde{X}_i \circ \alpha(t)$ (und $N \circ \alpha(t) = \widetilde{N} \circ \alpha(t)$) für alle $t \in [0,1]$, und insbesondere $X_i(q) = \widetilde{X}_i(q)$ für ein beliebiges $q \in U$.
Da U zshg. ist, folgt $X - \widetilde{X} = const.$ und wegen $X(q_0) = \widetilde{X}(q_0)$: $X = \widetilde{X}$. $\square$

7.3 Satz. *Für jedes C^3-FS $X : U \to \mathbb{R}^3$ gilt:*

(1) Gauß Gleichungen:

$$\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} + \sum_{n=1}^{2} \left(\Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} - \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} \right) = \sum_{n=1}^{2} \left(h_{ij}h_{kn} - h_{ik}h_{jn} \right) g^{nl}.$$

(2) Gleichungen von Codazzi und Mainardi:

$$\sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma^l_{ij}h_{lk} - \Gamma^l_{ik}h_{lj} \right) + h_{ij,k} - h_{ik,j} = 0.$$

Beweis. Differenzieren von 1. in Satz (7.1) und benutzen von $X_{ijk} = X_{ikj}$:

$$\begin{aligned} X_{ijk} &= \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{ij,k} X_l + \sum_{n=1}^{2} \Gamma^n_{ij} X_{nk} + h_{ij,k}N + h_{ij}N_k \\ &= \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma^l_{ij,k} + \sum_{n=1}^{2} \Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} \right) X_l - \sum_{l,n=1}^{2} h_{ij}h_{kn}g^{nl}X_l + \left(\sum_{n=1}^{2} \Gamma^n_{ij}h_{nk} + h_{ij,k} \right) N \end{aligned}$$

Vertausche nun j mit k: $X_{ijk} - X_{ikj} = 0 \Leftrightarrow$ (1) und (2). $\square$

Bemerkung. Die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi müssen also für I und II erfüllt sein, damit ein FS X existiert, so dass I und II dessen 1. und 2. Fundamentalform sind.

7.4 Satz (Theorema Egregium, Gauß 1827)**.** *Die Gaußsche Krümmung eines C^3-FS ist aus der 1. Fundamentalform (g_{ij}) berechenbar durch:*

$$K = \frac{1}{\det(g_{ij})} \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma^l_{11,2} - \Gamma^l_{12,1} + \sum_{n=1}^{2} \left(\Gamma^n_{11}\Gamma^l_{n2} - \Gamma^n_{12}\Gamma^l_{n1} \right) \right) g_{l2}.$$

Beweis. Multipliziere die Gauß Gleichung mit g_{lm} und summiere über l.

$$\Rightarrow h_{ij}h_{km} - h_{ik}h_{jm} = \sum_{l=1}^{2} \left(\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} + \sum_{n=1}^{2} \left(\Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} - \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} \right) \right) g_{lm}$$

Setze dann $i = j = 1$ und $k = m = 2$. Die linke Seit ist dann einfach $\det(h_{ij})$. Es folgt, die rechte Seite geteilt durch $\det(g_{ij})$ ist die Gauß Krümmung. $\square$

Bemerkung. Die ursprüngliche Formel von K benötigt 2 Ableitungen von X. In vorigem Satz benötigt man 3 Ableitungen von X.

Bemerkung.

Größen der Inneren Geometrie eines FS, d.h. Größen, die nur von (g_{ij}) abhängen	Größen der äußeren Geometrie eines FS, d.h. Größen, die von (g_{ij}) **und** (h_{ij}) abhängen
• Länge von Kurven • Winkel • Flächeninhalt • Gaußsche Krümmung • Geodätische	• Weingartenabbildung • Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen • Asymptotenrichtungen • Mittlere Krümmung

7.5 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend und seien für $i,j = 1,2$ Funktionen $g_{ij} \in C^2(U,\mathbb{R})$ und $h_{ij} \in C^2(U,\mathbb{R})$ gegeben, so dass gilt*

1. *$g_{ij} = g_{ji}$, $h_{ij} = h_{ji}$, (g_{ij}) positiv definit und*
2. *Die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi sind für die nach Satz (7.1) 3. aus den (g_{ij}) berechneten Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k erfüllt.*

Dann existiert bis auf Isometrie genau ein C^3-Flächstück $X : U \to \mathbb{R}^3$, dessen 1. und 2. Fundamentalform die gegebenen g_{ij} und h_{ij} sind.

Beweisidee. Die Eindeutigkeit folgt aus Folgerung (7.2).

Sei $\alpha : [0,1] \to U$ Kurve von $\alpha(0) = q_0$ nach $\alpha(1) = q$.

Die Stukturgleichungen 1. und 2. ergeben ein System gewöhnlicher partieller DGL für zu findende Funktionen $f_1 := X_1 \circ \alpha, f_2 := X_2 \circ \alpha, f_3 := N \circ \alpha$:

$$(X_i \circ \alpha)'(t) = \sum_{j=1}^{2} X_{ji} \circ \alpha(t)(\alpha^j)'(t) = \sum_{j,l=1}^{2} \Gamma_{ij}^l \circ \alpha(t) X_i \circ \alpha(t)(\alpha^j)'(t) + \sum_{j=1} h_{ij} \circ \alpha(t) N \circ \alpha(t)(\alpha^j)'(t)$$

$$(N \circ \alpha)(t) = \sum_{j,k,l=1}^{2} h_{kl} g^{kl} N_j \circ \alpha(t)(\alpha^j)'(t).$$

Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ Es existiert für gegebene AWe $X_1(q_0)$, $X_2(q_0)$ und $N(q_0)$ genau eine Lösung $f_1 = X_1 \circ \alpha, f_2 = X_2 \circ \alpha, f_3 = N \circ \alpha$

Gauß und Codazzi-Mainardi, U einfach zshg. $\Rightarrow$ $X_1(\alpha(1)), X_2(\alpha(1)), N(\alpha(1))$ hängen nur von $q = \alpha(1)$ und nicht von der Wahl von α ab.

Es folgt: es existieren $X_1, X_2, N : U \to \mathbb{R}^3$. Da $X_{12} = X_{21}$ und U einfach zusammenhängend $\Rightarrow \exists\, X : U \to \mathbb{R}^3$ wie gesucht. □

8 Riemannsche Metriken und Geodätische

8.1 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Riemannsche Metrik g auf U ist eine Abbildung, die jedem $q \in U$ ein Skalarprodukt g_q zuordnet.

g heißt C^k, falls für alle $1 \leq i, j \leq 2$ die Funktionen $g_{i,j} : U \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(q) := g_q(e_i, e_j)$, k-mal stetig differenzierbar sind (wobei $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$).

Beispiele.

1. $X : U \to \mathbb{R}^3$ reguläres C^{k+1}-FS. Dann ist $g = I^X$ eine C^k-Riemannsche Metrik auf U.
2. $U = H = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ obere Halbebene, $g^H_{ij}(q) = \frac{1}{v^2}\delta_{ij}$ wobei $q = (u, v)$, d.h.
$$g^H_{(u,v)} = \begin{pmatrix} v^{-2} & 0 \\ 0 & v^{-2} \end{pmatrix}$$
bzw. $g^H_{(u,v)}(w, z) = \frac{1}{v^2}\langle w, z\rangle$ für $w, z \in \mathbb{R}^2$ und $(u, v) \in H$.
(H, g^H) heißt oberes Halbebenen-Modell der hyperbolischen Ebene.
Bemerkung. Es gibt kein FS X in $\mathbb{R}^3$, das diese Riemannsche Metrik als 1. Fundamentalform besitzt (Satz von Hilbert).

Bemerkung. Alle Größen, die wir für FSe definiert haben und die nur von der 1. Fundamentalform abhängen, können für Riemannsche Metriken definiert werden:

1. Die g-Länge einer Kurve $\alpha : [a, b] \to U$:
$$L^g(\alpha) := \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt.$$
2. Der g-Flächeninhalt einer meßbaren Teilmenge $R \subset U$"
$$A^g(R) := \int\int_R \sqrt{\det(g_{ij})}dudv.$$
3. Die Christoffelsymbole von g: $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^2(g^{lk}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})$.
4. Die Gaußsche Krümmung.

8.2 Definition. Sei g eine Riem. Metrik auf U, $\widetilde{g}$ Riem. Metrik auf $\widetilde{U}$. Eine Isometrie von (U, g) nach $(\widetilde{U}, \widetilde{g})$ ist ein Diffeomorphimus $\varphi : U \to \widetilde{U}$, so dass für alle $(q, v) \in U \times \mathbb{R}^2$ gilt:
$$\widetilde{g}_{\varphi(q)}(D\varphi(q)v, D\varphi(q)v) = g_q(v, v).$$

Beispiele.

1. Ist $X = \widetilde{X} \circ \varphi$ für ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to \widetilde{U}$, so ist φ eine Isometrie von (U, I) nach $(\widetilde{U}, \widetilde{I})$.
2. Die *Euklidische Metrik in Polarkoordinaten.*
Sei $\varphi : \underbrace{(0, \infty) \times (0, 2\pi)}_{=:U} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}}_{=:\widetilde{U}}$, $\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.
Wir berechnen $D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. Es folgt
$\widetilde{I}_{\varphi(r,\theta)}(e_1, e_1) = 1$, $\widetilde{I}_{\varphi(r,\theta)}(e_1, e_2) = 0, \widetilde{I}_{\varphi(r,\theta)}(e_2, e_2) = r^2$, also $\widetilde{I}_{\varphi(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

3. Eine allgemeine Riem. Metrik g auf U wird keine Isometrien $\varphi \neq \mathrm{id}_U$ von (U,g) nach (U,g) besitzen.

   Die hyperbolische Ebene besitzt jedoch sehr viele solcher Isometrien:

   Für $H = \mathbb{R} \times (0,\infty) \subset \mathbb{C}$ und $g^H_{(u,v)} = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind die Abbildungen $\varphi : H \to H$ mit $\varphi(z) := \frac{ay+b}{cz+d}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2,\mathbb{R})$ Isometrien von (H, g^H).

   Beweis. (a) Alle φ wie oben sind Diffeomorphismen von H. Das folgt, da die Abbildung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\varphi_A : H \to H)$ mit $\varphi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ eine "Gruppenoperation"von $Sl(2,\mathbb{R})$ auf H ist, d.h. es gilt für $A, B \in Sl(2,\mathbb{Z})$:

   $$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}.$$

   Insbesondere $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.

   (b) Für alle $z = u + iv \in H$, $w \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ gilt:

   $$g^H_{\varphi(z)}(D\varphi(z)w, D\varphi(z)w) = \frac{1}{\mathrm{Im}(\varphi(z))^2}|\varphi'(z)|^2|w|^2.$$

   Außerdem $g^H_z(w,w) = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2}|w|^2$. Zu zeigen ist also $|\varphi'(z)| = \frac{\mathrm{Im}(\varphi(z))}{\mathrm{Im}(z)}$. Wir berechnen $\varphi'(z) = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cz+b)^2} = \frac{1}{(cz+b)^2}$,

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi(z)) &= \mathrm{Im}\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{1}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}(acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad-bc)\mathrm{Im}z = |\varphi'(z)|\mathrm{Im}z \end{aligned}$$

   □

8.3 Folgerung. *Die hyperbolische Ebene (H, g^H) ist ein Raum freier Beweglichkeit. D.h. $\forall (q,w), (\widetilde{q}, \widetilde{w}) \in H \times \mathbb{R}^2$ mit $g^H_q(w,w) = g^H_{\widetilde{q}}(\widetilde{w}, \widetilde{w})$ existiert eine orientierungserh. Isometrie φ von (H, g^H) mit $\varphi(q) = \widetilde{q}$, $D\varphi(q)w = \widetilde{w}$.*

Bemerkung (Wichtige Bemerkung). Ist $\varphi : (U,g) \to (\widetilde{U}, \widetilde{g})$ Isometrie, so gilt

1. Ist $\alpha : [0,1] \to U$, so gilt $L^g(\alpha) = L^{\widetilde{g}}(\varphi \circ \alpha)$.

   Dies folgt direkt aus der Definition einer Isometrie.

2. Ist $R \subset U$ meßbar, so gilt $A^g(R) = A^{\widetilde{g}}(\varphi(R))$.

   Dies folgt aus der Transformationsformel.

3. $K = \widetilde{K} \circ \varphi$.

   Falls g die 1. Fundamentalform eines FS haben wir das bereits gezeigt. Der allgemeine Fall erfordert eine längere, aber triviale, Rechnung.

Bemerkung. Aus 3. und der der Folgerung 8.3 folgt, dass die Gaußsche Krümmung der hyperbolischen Ebene konstant ist.

Ziel: Wir suchen nach Kurven in (U, g) deren g-Länge minimal ist bei festgehaltenen Endpunkten. Da die g-Länge sich beim einer Umparametrisierung der Kurve nicht ändert und da reguläre Kurven stets nach Bogenlänge parametrisiert werden können, betrachten wir im Folgenden nach g-Bogenlänge parametrisierte Kurven.

8.4 Definition. Sei g eine Riem. Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$ und $\alpha_0 : [a, b] \to U$. α_0 heißt Geodätische von (U, g), falls $g_{\alpha_0(t)}(\alpha_0'(t), \alpha_0'(t)) = const.$ ist und falls jede Variation $\alpha : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to U$ (C^1) von $\alpha_0(t) = \alpha(t, 0)$ mit $\alpha(a, s) = \alpha_0(a)$ und $\alpha(b, s) = \alpha_0(b)$ gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L^g(\alpha_s) = 0.$$

Ist g die 1. FF eines FS $X : U \to \mathbb{R}^3$ und α eine Geodätische von (U, g), so heißt $\hat{\alpha}_0 = X \circ \alpha_0$ Geodätische auf X.

8.5 Satz. $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ *ist genau dann eine Geodätische von* (U, g)*, wenn*

$$(\alpha^i)'' + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{jk}^i \circ \alpha (\alpha^j)'(\alpha^k)' = 0, \quad i = 1, 2 \quad (*).$$

Bemerkung.
1. Die i.a. nichlineare gew. DG zweiter Ordnung $(*)$ für die gesuchten Funktionen (α^1, α^2) heißt DG der Geodätischen, oder Geodätischengleichung, von (U, g).

2. Die Variationscharakterisierung der Gedätischen (Definition 8.4) zeigt: Ist $\varphi : (U, g) \to (\widetilde{U}, \widetilde{g})$ eine Isometrie und erfüllt $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ die DGl $(*)$, dann erfüllt $\varphi \circ \alpha =: \widetilde{\alpha}$ die ensprechende Gleichung $\widetilde{(*)}$.

3. Der Satz von Picard-Lindelöf zeigt: Zu jedem $(q, w) \in U \times \mathbb{R}^2$ existiert ϵ und genau eine Geodätische $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ mit $\alpha(0) = q$ und $\alpha'(0) = w$. Explizit gelöst werden kann die Gleichung $(*)$ aber nur in Ausnahmefällen, z.B. für die hyperbolische Ebene (H, g).

Beispiel (Triviales Beispiel). Falls $g_{11} = g_{22} = 1$ und $g_{12} = 0$ (Euklidische Metrik) $\Rightarrow$ $\Gamma_{ij}^k = 0 \; \forall i, j, k \Rightarrow (*)$ wird zu $(\alpha^i)'' = 0 \Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0)$.

Beweis. Sei $\alpha(t, s) = (\alpha^1(t, s), \alpha^2(t, s))$, $\alpha_s(t) := \alpha(t, s)$. Dann

$$L^g(\alpha_s) = \int_a^b \left(\sum_{i,j} (g_{ij} \circ \alpha_s)(\alpha_s^i)'(\alpha_s^j)' \right)^{\frac{1}{2}} (t) dt.$$

Sei $g_{\alpha_0(t)}(\alpha_0'(t), \alpha_0'(t)) = c^2 = const.$ Dann folgt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L^g(\alpha_s) = \frac{1}{2c} \int_a^b \left(\sum_{i,j,k=1}^{2} (g_{ij,k} \circ \alpha)(D_2\alpha^k)(D_1\alpha^i)(D_1\alpha^j) + 2\sum_{i,j} (g_{ij} \circ \alpha)(D_2 D_1 \alpha^i)(D_1 \alpha^j) \right) (t, 0)) dt.$$

Wegen $D_2\alpha(a,s) = D_2\alpha(b,s) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= g_{ij} \circ \alpha(b,s) D_2\alpha^i(b,s) D_1\alpha^j(b,s) - g_{ij} \circ \alpha(a,s) D_2\alpha^i(a,s) D_1\alpha^j(a,s) \\
&= \int_a^b D_1(g_{ij} \circ \alpha D_2\alpha^i D_1\alpha^j)(t,s)dt \\
&= \int_a^b \left(g_{ij} \circ \alpha D_2 D_1\alpha^i D_1\alpha^j + g_{ij} \circ \alpha D_1 D_1\alpha^j D_2\alpha^i + \sum_{k=1}^{2} g_{ij,k} \circ \alpha D_1\alpha^k D_1\alpha^j D_2\alpha^i \right)(t,s)dt.
\end{aligned}$$

Setzt man die 2. Formel in die 1. Formel ein und benennt in der Summe $\sum_{i,j,k}$ den Index k um in i und den Index i um in k, erhält man

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L^g(\alpha_s) = -\frac{1}{c}\int_a^b \sum_{i=1}^{2} \left(D_2\alpha^i \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} g_{ij} \circ \alpha D_1 D_1\alpha^j + \sum_{j,k=1}^{2} \left(g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{jk,i} \right) \circ \alpha D_1\alpha^j D_1\alpha^k \right)\right)(t,0)dt.$$

Für die Christoffelsymbole gilt $2\sum_{l=1}^{2} g_{il}\Gamma^l_{jk} = g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}$, wobei $g_{ij,k} + g_{ki,j}$ symmetrisch ist in k und j. Es folgt

$$\sum_{j,k=1}^{2} \left(g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{jk,i} \right) \circ \alpha D_1\alpha^j D_1\alpha^k = \sum_{j,k,l} \left(g_{il}\Gamma^l_{jk} \right) \circ \alpha D_1\alpha^j D_1\alpha^k.$$

Also folgt (nach weiterer Umbenennung eines Index, und zwar $\sum_{j=1}^{2} g_{ij} \circ \alpha D_1 D_1\alpha^j = \sum_{l=1}^{2} g_{il} \circ \alpha D_1 D_1\alpha^l$)

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L^g(\alpha_s) = -\frac{1}{c}\int_a^b \sum_{i=1}^{2} \left(\underbrace{D_2\alpha^i}_{V^i} \cdot \sum_{l=0}^{2} g_{il} \circ \alpha \left(D_1 D_1\alpha^l + \sum_{j,k} \Gamma^l_{jk} \circ \alpha D_1\alpha^j D_1\alpha^k \right)\right)(t,0).$$

Gilt nun, dass $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L^g(\alpha_s) = 0$ für jede solche Variation, so muss dieses Integral für jedes $t \in [a,b] \mapsto V(t,0)$, das in a und b verschwinden, gleich 0 sein. Daraus folgt für $\alpha(t,0) = \alpha_0(t)$:

$$(\alpha_0^l)'' + \sum_{j,k}^{2} \Gamma^l_{jk} \circ \alpha_0 (\alpha^j)'(\alpha_0^k)' \equiv 0 \quad \text{für } l = 1,2.$$

Ist umgekehrt dieser Ausdruck $\equiv 0$, dann ist $\frac{d}{ds}\Big| L^g(\alpha_s) = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass für Lösungen der DGl gilt $g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = const$. Dies folgt aust $\frac{d}{dt} g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$, was sich aus der DG für Geodätische berechnen lässt. $\square$

8.6 Folgerung. *Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ Flächenstück mit 1. FF g. Dann ist $\alpha : [a,b] \to U$ genau dann Geodätische von g, wenn für $\hat{\alpha} := X \circ \alpha$ gilt: $\hat{\alpha}''(t)$ und $N \circ \alpha(t)$ sind linear abhängig für alle $t \in [a,b]$.*

Beweis der Folgerung.

$$\hat{\alpha}'' = (X \circ \alpha)'' = \left(\sum_{j=1}^{2} (\alpha^j)' X_j \circ \alpha \right)'$$
$$= \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk} \circ \alpha (\alpha^j)'(\alpha^k)' X_i \circ \alpha + \sum_{i=1}^{2} (\alpha^i)'' X_i \circ \alpha}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} \circ \alpha (\alpha^i)'(\alpha^j)'}_{=II_\alpha(\alpha',\alpha')} N \circ \alpha.$$

□

Bemerkung. Insbesondere erhalten wir auch

$$\frac{d}{dt} g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \frac{d}{dt} \langle \hat{\alpha}'(t), \hat{\alpha}'(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 2 \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 2 II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \langle \hat{\alpha}'(t), N \circ \alpha \rangle = 0.$$

Beispiel. Sei $x \in \mathbb{S}^2$ und $w \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x, w \rangle = 0$ und $|w| = 1$. Dann ist die Geodätische $\hat{\alpha}$ auf $\mathbb{S}^2$ mit $\hat{\alpha}(0) = 0$ und $\hat{\alpha}'(0) = w$ gegeben durch $\hat{\alpha}(s) = \cos(s) x + \sin(s) w \in \mathbb{S}^2$ (Großkreissegment auf $\mathbb{S}^2$). Es folgt $\hat{\alpha}'' = -\hat{\alpha} \sim N \circ \alpha$.

8.7 Satz. *Die geodätischen von $(H, g^H) = (\mathbb{R} \times (0, \infty), \frac{1}{u^2} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ verlaufen auf Halbkreisen oder Halbgeraden in H, die senkrecht auf der x-Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$ aufsetzen. Jede Geodätische kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden.*

Beweis. Zunächst $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) = (0, e^t) \in H$ ist eine Geodätische von (H, g^H): Die Isometrie $I(u, v) = (-u, v)$ von g^H bilded die Geodätische mit AWen $q = (0, 1)$ und $w = (0, 1)$ auf eine Geodätische mit den gleichen AWen ab, also wegen der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf auf sich selbst. Also verläuft diese Geodätische in der Fixpunktmenge $\{0\} \times (0, \infty) \subset H$ von I. Da die Kurve $\alpha(t) = (0, e^t)$ in $\{0\} \times (0, \infty)$ verläuft und $g^H_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = const = 1$ erfüllt, ist α die gesuchte Geodätische.
Wir wissen $\forall (q, w) \in H \times \mathbb{R}^2$ mit $g^H_q(w, w) = 1 \; \exists \, \varphi_A$ eine Isometrie von H mit $\varphi_A(0, 1) = q$ und $D\varphi_A|_{(0,1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w$. Dann ist $\varphi_A(0, e^t)$ die Geodätische mit AWen q und w. Man kann $\varphi_A(0, e^t)$ explizit ausrechenen. Wichtig ist folgendes: Die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bilden die Menge der Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ in sich ab und erhalten Schnittwinkel. Es gilt offenbar $\varphi_A(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Also sind die Bilder von $\{0\} \times (0, \infty)$ Halbkreise oder Halbgeraden in H, die senkrecht auf der x-Achse stehen. □

Bemerkung. Ist $\alpha : \mathbb{R} \to H$ eine Geodätische bzgl. g^H und ist $q \in H \backslash \alpha(\mathbb{R})$, so existieren ∞-viel g^H-Geodätische durch q, die α nicht schneiden und nicht parallel zu α sind, "H erfüllt Euklid's Parallelaxiom nicht".

8.8 Satz (Fermi Koordinaten)**.** *Sei g eine Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$ und $q_0 \in U$. Dann existiert eine offene Menge $V \subset U$ mit $q_0 \in V$ und eine Isometrie $\varphi : (\widetilde{U}, \widetilde{g}) \to (V, g|_V)$ mit*

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{g}_{22} \end{pmatrix}, \; \widetilde{g}_{22}(0, t) = 1 \text{ und } \widetilde{g}_{22,1}(0, t) = 0.$$

8.9 Satz. *Sei* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ *Riem. Metrik auf* $U \subset \mathbb{R}^2$. *Dann ist jedes in* U *enthaltene Segment einer Koordinatenlinie* $s \mapsto (s, t_0)$ *kürzeste Verbindung bzgl.* g *seiner Endpunkte.*

Beweis. Sei $\alpha_0 : [a, b] \to U$, $\alpha_0(s) = (s, t_0)$ ein solches Segement und $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [a, b] \to U$ eine beliebige Kurve mit $\alpha(a) = \alpha_0(a)$ und $\alpha(b) = \alpha_0(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L^g(\alpha) &= \int_a^b \left((\alpha^1)'^2(t) + g_{22} \circ \alpha(t)(\alpha^2)'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_a^b |(\alpha^1)'(t)| dt \geq \int_a^b (\alpha^1)'(t) dt = \alpha^1(b) - \alpha^1(a) = L^g(\alpha_0). \end{aligned}$$

Außerdem gilt Gleichheit genau dann, wenn $(\alpha^2)' \equiv 0$, also $\alpha^2 \equiv t_0$. □

8.10 Folgerung. *Sei* g *eine Riem. Metrik auf* $U \subset \mathbb{R}^2$ *und* $\alpha : [a, b] \to U$ *Geodätische von* g. *Dann existiert ein* $\epsilon > 0$, *so dass gilt: Ist* $[\widetilde{a}, \widetilde{b}] \subset [a, b]$ *und* $\widetilde{b} - \widetilde{a} < \epsilon$, *so ist* $\alpha|_{[\widetilde{a}, \widetilde{b}]}$ *die (bis auf Umparametrisierung) einzige kürzeste Verbindung von* $\alpha(\widetilde{a})$ *nach* $\alpha(\widetilde{b})$.

Beweis. Seit $s_0 \in [a, b]$ und ohne Einschränkung $\alpha'(s_0) = (1, 0)$. Dies ist möglich, nachem wir (U, g) und α ersetzten durch $(\widetilde{U} = \varphi^{-1}(U), \widetilde{g})$ mit $\widetilde{g}_q(\cdot, \cdot) = g_{\varphi(q)}(D\varphi(q)\cdot, D\varphi(q)\cdot)$ und $\widetilde{\alpha} = \varphi^{-1} \circ \alpha$ wobei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = \alpha(s_0) + A(p - \alpha(s_0))$, wobei φ die Euklidische Bewegung ist, so dass $\varphi(\alpha(s_0)) = \alpha(s_0)$ und $D\varphi(\alpha(s_0))e_1 = Ae_1 = \alpha'(s_0)$ $(A \in SO(2))$. Wir wählen Fermi-Koordinaten in einer Umgebung V von $\alpha(s_0)$ und für $\epsilon > 0$ klein genug ist $\alpha(t) \in V$ $\forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf muss $\alpha(s) = (s - s_0, t_0)$ für eine $t_0 \in \mathbb{R}$ sein. Aus dem vorigen Satz folgt, dass $\alpha|_{[-\epsilon, \epsilon]}$ ist die Kürzeste zwischen ihren Endpunkten. □

8.11 Lemma. *Die Gaußsche Krümmung* K *einer Riem. Metrik der Form* g *wie oben berechnet sich als:* $K = -\frac{\partial_1^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}$.

Beweis. Das Theorema Egregium ergibt $K = -\frac{1}{2} \frac{g_{22,11} \cdot g_{22} - \frac{1}{2}(g_{22,1})^2}{(g_{22})^2}$. □

8.12 Folgerung (Satz von Minding)**.** *Je 2 Riem. Metriken der gleichen konstanten Gaußschen Krümmung sind lokal isometrisch.*

Beweis. Aus dem vorigen Lemma folgt, dass die beiden Metriken in Fermi-Koordinaten übereinstimmen, da $s \mapsto \sqrt{g_{22}(s, t)}$ die eindeutige Lösung von

$$(\sqrt{g_{22}})_{11} + K\sqrt{g_{22}} = 0 \quad \text{mit} \quad \sqrt{g_{22}(0, t)} = 1, \; \sqrt{g_{22,1}(0, t)} = 0$$

ist, d.h.

$$g_{22}(s, t) = \begin{cases} \cos^2(\sqrt{K} s) & \text{falls } K > 0, \\ 1 & \text{falls } K = 0, \\ \cosh^2(\sqrt{|K|} s) & \text{falls } K < 0. \end{cases}$$

□

Bemerkung. Ist zusätzlich $\alpha : t \to (0,t)$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, d.h. $g_{22}(0,t) = 1$, $g_{22,1}(0,t) = 0$ und ist $K > 0$ bzw. $K < 0$ in einer Umgebung von α, so folgt aus dem vorigen Lemma:

$$g_{22}(s,t) \leq \cos^2(\sqrt{K}s) \leq 1 \text{ falls } K > 0,$$
$$g_{22}(s,t) \geq \cosh^2(\sqrt{|K|}s) \geq 1 \text{ falls } K < 0.$$

D.h. die im Beweis zum Satz über Fermi-Koordinaten betrachteten "Parallelkurven"$t \mapsto \beta_t(s)$ von α sind kürzer bzw. länger also α.

Beweis Fermi Koordinaten. Wähle $\alpha : (-\delta,\delta) \to U$ regulär mit $\alpha(0) = q_0$ und für $t \in (-\delta,\delta)$ Geodätische $\beta_t = \beta_t(s) : (-\epsilon,\epsilon) \to U$ mit $\beta_t(0) = \alpha(t)$, $g_{\beta_t}(\beta_t', \beta_t') = 1$ und $g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \beta_t'(0)) = 0$.
Wählen wir $\beta_t'(0)$ so, dass $\alpha'(t), \beta_t'(0)$ positiv orientiert ist, so ist

$$\varphi : (-\epsilon,\epsilon) \times (-\delta,\delta) \to U,\ \varphi(s,t) = \beta_t(s),$$

differenzierbar und mindestens C^{k-2}, falls g und α C^k sind.
Genauer: Sei $V : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^2$ C^k, so dass $\langle\alpha'(t), V(t)\rangle = 0$ und $\det(\alpha'(t), V(t)) > 0$, und β_t die Lösung von $(*)$ mit $\beta_t(0) = \alpha(t)$ und $\beta_t'(0) = V$. Aus dem Satz Picard-Lindelöf folgt dann, dass φ wie oben C^{k-2}.
Da $D_1\varphi(0,0) = \beta_0'(0)$ und $D_2\varphi(0,0) = \alpha'(0)$ linear unabhängig, können wir wegen dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit annehmen, dass φ ein Diffeomorphismus von $(-\epsilon,\epsilon) \times (-\delta,\delta) = \widetilde{U}$ nach V ist (verkleinere δ und ϵ gegebenenfalls).
Die Metrik $\widetilde{g}$ auf $\widetilde{U}$ ist nun durch die Bedingung charakterisiert, dass $\varphi : (\widetilde{U}, \widetilde{g}) \to (U, g)$ eine Isometrie sein soll, d.h. es soll gelten

$$\widetilde{g}_{(s,t)}(e_i, e_j) = g_{\varphi(s,t)}(D\varphi(s,t)e_i, D\varphi(s,t)e_j).$$

Wir definieren $\widetilde{g}$ durch die letzte Gleichung. Nach Konstruktion ergibt sich

$$1 = g_{\beta_t(s)}(\beta_t'(s), \beta_t'(s)) = \widetilde{g}_{(s,t)}(e_1, e_1) \text{ und } 0 = g_{\alpha(t)}(\beta_t'(0), \alpha'(t)) = \widetilde{g}_{(0,t)}(e_1, e_2).$$

Zu zeigen ist $\widetilde{g}_{1,2} \equiv 0$, d.h. die Parallelkurven $t \mapsto \varphi(s,t) = \beta_t(s)$ von $\alpha(t) = \beta_t(0)$ im Abstand $|s|$ die Geodätischen $s \mapsto \beta_t(s)$ g-orthogonal schneiden: Da φ eine Isometrie ist, sind die Koordinatenlinien $\widetilde{\beta} : s \to (s,t)$ $\widetilde{g}$-Geodätische, d.h. es gilt

$$0 = (\widetilde{\beta}^i)'' + \sum_{j,k=1}^{2} \widetilde{\Gamma}^i_{ij} \circ \widetilde{\beta}(\widetilde{\beta}^j)'(\widetilde{\beta}^k)' = (\widetilde{\beta}^i)'' + \widetilde{\Gamma}^i_{11}((\widetilde{\beta}^1)')^2, \quad i = 1,2.$$

Gleichzeitig gilt $(\widetilde{\beta}^1)' = 1$, $(\widetilde{\beta}^1)'' = 0$ und $(\widetilde{\beta}^2)' = 0$. Also folgt

$$\widetilde{\Gamma}^1_{11} = 0 = \widetilde{\Gamma}^2_{11}.$$

Wegen $\widetilde{\Gamma}^1_{11} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^2 \widetilde{g}^{1,l}(\widetilde{g}_{l1,1} + \widetilde{g}_{1l,1} - \widetilde{g}_{11,l})$ und $\widetilde{g}_{11} = 1$ erhalten wir

$$0 = \widetilde{\Gamma}^1_{11} = -\det(\widetilde{g}_{ij})^{-1}\widetilde{g}_{12}\widetilde{g}_{12,1}$$

Also $\frac{\partial}{\partial s}(\widetilde{g}_{12})^2 = ((\widetilde{g}_{12})^2)_1 = 0$. Zusammen mit $\widetilde{g}_{12}(0,t) = 0$ folgt daraus $\widetilde{g}_{12} = 0$.
Die Eigenschaft $\widetilde{g}_{22}(0,t) = 1$ erhalten wir, wenn α nach Bogenlänge parametrisiert ist, und eine ähnliche Rechnung wie oben zeigt auch $\widetilde{g}_{22,1}(0,t) = 0$, wenn α Geodätische ist. □

9 Der Satz von Gauß-Bonnet

9.1 Lemma. *Sei* $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ *Geodätische von* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$, $g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 1$. *Sei* $\theta(t)$ *stetig* ($\Rightarrow$ *differenzierbare) Winkelfunktion mit*

$$\alpha'(t) = \cos\theta(t) e_1 + \sin\theta(t) \frac{1}{\sqrt{g_{22} \circ \alpha(t)}} e_2.$$

Dann gilt: $\theta' = -(\sqrt{g_{22}})_1 \circ \alpha \cdot ((\alpha^2)')$.

Bemerkung. Beachte, dass $\alpha'(t) = \varphi(t) e_1 + \psi(t) \frac{1}{\sqrt{g_{22} \circ \alpha(t)}} e_2$. Dann $g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 1 \Rightarrow \varphi(t)^2 + \psi(t)^2 = 1$, also $(\varphi, \psi) \in \mathbb{S}^1$.
Außerdem $\langle \alpha'(t), e_1 \rangle = \cos\theta(t)$, d.h. θ sind die Winkel unter denen die Geodätische α die Schar der Geodätischen $s \mapsto (s, t_0)$ schneidet.

Beweis. Aus $\cos\theta(t) = g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), e_1) = (\alpha^1)'(t)$ folgt $-\sin\theta \cdot \theta' = (\alpha^1)''$. Ein Rechnung mit Hilfe der Strukturgleichungen zeigt: $\Gamma^1_{11} = 0, \Gamma^1_{12} = 0$, so dass die DGl der Geodätischen impliziert:

$$(\alpha^1)'' + \Gamma^1_{22} \circ \alpha((\alpha^2)')^2 = 0$$

wobei $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} g_{22,1}$.
Also gilt $\sin\theta\theta' = -(\alpha^1)'' = -\frac{1}{2} g_{22,1} \circ \alpha((\alpha^2)')^2$. Andererseits

$$\sin\theta(t) = g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \frac{1}{\sqrt{g_{22} \circ \alpha(t)}} e_2) = \sqrt{g_{22} \circ \alpha(t)} (\alpha^2)'(t).$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die Behauptung. □

9.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, g Riemann. Metrik auf U. Ein geodätisches Polygon in U ist ein kompaktes Gebiet $G \subset U$ (das die abgeschlossene Hülle der Menge seiner inneren Punkte ist), so dass ∂G aus einfach geschlossenen, stückweise geodätischen Kurven besteht.

9.3 Lemma. *Sei* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ *Riem. Metrik auf* $U \subset \mathbb{R}^2$ *und* $G \subset U$ *geodätisches Polygon mit zusammenhängendem Rand. Dann gilt*

$$\int_G K dA^g = 2\pi - \sum_{i=1}^k \beta_i = \sum_{i=1}^k \bar{\beta}_i + (2-k)\pi$$

wobei $\beta_i \in (-\pi, \pi)$ *die Außen winkel (bzgl.* g*) in den* k *Eckpunkten von* ∂G *sind, bzw.* $\bar{\beta}_i = \pi - \beta_i \in (0, 2\pi)$ *die Innenwinkel.*

Beweis. Sei $\alpha : [a, b) \to \partial G$ bijectiv, so dass G links von α liegt, und $\exists a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass $\alpha|_{[t_i, t_{i+1})}$ Geodätische sind $\forall i = 1, \ldots, k$.
Wir approximieren α durch C^1-Kurven α^ϵ, so dass $\alpha|_{[t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon]} = \alpha^\epsilon|_{[t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon]}$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Es existieren Winkelfunktionen θ^ϵ mit $\theta^\epsilon(a) = 0$ und

$$(\alpha^\epsilon)'(t) = \cos\theta^\epsilon(t) e_1 + \sin\theta^\epsilon(t) \frac{1}{\sqrt{g_{22} \circ \alpha}} e_2.$$

Für $\epsilon \to 0$ konvergiert θ^ϵ gegen eine Winkelfunktion θ für $\alpha'(t)$ so dass gilt $\alpha'(t) = \cos\theta(t)e_1 + \sin\theta(t)\frac{1}{\sqrt{g_{22}\circ\alpha}}e_2$ falls $t \in [t_{i-1}, t_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$, und

$$\theta(t_i) = \lim_{t\to t_i} \theta|_{[t_{i-1},t_i]} + \beta_i \quad \forall i \in \{1, k-1\}.$$

Mit dem Hopfschen Umlaufsatz gilt

$$2\pi = \theta^\epsilon(b) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \left(\theta^\epsilon(t_i - \epsilon) - \theta^\epsilon(t_{i-1} + \epsilon)\right)}_{\to\sum_{i=1}^{k}(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \left(\theta^\epsilon(t_{i+1} + \epsilon) - \theta^\epsilon(t_{i-1} - \epsilon)\right)}_{\to\sum_{i=1}^{k}\beta_i}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_G K dA^g &= \int_G K\sqrt{\det(g_{ij})}du^1du^2 = -\int_G \frac{(\sqrt{g_{22}})_{11}}{\sqrt{g_{22}}}\sqrt{g_{22}}du^1du^2 = -\int_G (\sqrt{g_{22}})_{11}du^1du^2 \\ &= -\int_a^b (\sqrt{g_{22}})_1 \circ \alpha(t)(\alpha^2)'(t)dt = \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta'(t)dt = \sum_{i=1}^{k}(\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\beta_i.\end{aligned}$$

$\square$

Eulercharakteristik

Der Satz von Gauß-Bonnet gibt einen Zusammenhang zwischen der Geometrie (Krümmung) und einer topologischen Invariante, der Eulercharakteristik. Diese Invariante soll jetzt für Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand, oder allgemeiner für 2-dim. Untermgften, eingeführt werden.

9.4 Definition. Sei G ein kompaktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ mit glattem Rand ∂G (oder eine Untermannigfaltikeit des $\mathbb{R}^3$) und $G = \bigcup_{i=1}^F G_i$ eine Zerlegung von G in einfach zusammenhängende kompakte Gebiete mit stückweise glattem Rand. Bezeichnet E die Anzahl der Kanten und V die Anzahl der Eckpunkte dieser Zerlegung, so ist

$$\chi(G) := F - E + V$$

die Eulercharakteristik von G. Dabei bedeutet Zerlegung, dass $G_i \cap G_j$ aus gemeinsamen Kanten und Eckpunkten von G_i und G_j besteht (oder $G_i \cap G_j = \emptyset$). Jede Kante soll 2 Eckpunkte als Rand haben, also keine geschlossenen Kanten.

Beispiel. $G = \mathbb{S}^2$, $\partial G = \emptyset$. $\mathbb{S}^2$ wird z.B. durch 2 Großkreise in 4 Geodätische (einfach-zusammenhängende) Zweieck zerlegt. Es folgt $F = 4$, $E = 4$, $V = 2 \Rightarrow \chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

Die Zahl $F - E + V$ hängt nicht von der Zerlegung ab, also ist $\chi(G)$ wohldefiniert, wobei wir voraussetzen, dass es solche Zerlegungen wirklich gibt. Unahängigkeit von der gewählten Zerlegung folgt aus

1. Die Summe $F - E + V$ ändert sich nicht, wenn man die Zerlegung $G = \bigcup_i G_i$ verfeinert, indem man zusätzliche Eckpunkte und Kanten einführt.

2. Je 2 Zerlegungen von G besitzen einen gemeinsame Verfeinerung.

Bemerkung. Aus der Definition ist klar, dass $\chi(G) = \chi(\widetilde{G})$ falls eine Diffeomorphismus $\varphi : G \to \widetilde{G}$ existiert.

9.5 Satz (Satz von Gauß-Bonnet für Polygone)**.** *Sei g eine Riemannsche Metric auf $U \subset \mathbb{R}^2$ und $G \subset U$ ein geodätisches Polygon mit Außenwinkeln β_i, $1 \leq i \leq k$. Dann gilt*

$$\int_G K dA^g + \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 2\pi\chi(G),$$

Beweis. G ist kompakt. $\Rightarrow$ Es existieren endlich viele offene Mengen $U_l \subset U$ mit $G \subset \bigcup_l U_l$, so dass für g auf U_l Fermi-Koordinaten existieren.

Wir setzen ohne Beweis voraus, dass wir eine Zerlegung $G = \bigcup_{j=1}^F G_j$ finden können, so dass gilt

1. jedes G_j ist einfach-zusammenhängendes geod. Polygon, und
2. Jedes G_j ist in einem der U_l enthalten.

k_j bezeichnet die Anzahl der Eckpunkte (= Kanten) G_j und $\bar{\beta}_i^j$, $1 \leq i \leq k_j$, die Innenwinkel von G_j.

$$\Rightarrow \quad \int_G K dA^g = \sum_{j=1}^{F} \int_{G_j} K dA^g = \sum_{j=1}^{F} \left(\sum_{i=1}^{k_j} \bar{\beta}_i^j + (2 - k_j)\pi \right) = (*).$$

V^{in} bezeichnet die Anzahl der Eckpunkte der Zerlegung, die in $G^\circ = G \backslash \partial G$ liegen, $V^a = V - V^{in}$. Analog zerlegen wir $E = E^{in} + E^a$. Dann gilt $E^a = V^a = k$.

Da sich die Innenwinkel der G_j an einem inneren Eckpunkt zu 2π ergänzen, an einem äußeren zum entsprechenden Innenwinkel von G, gilt

$$\sum_{j=1}^{F} \left(\sum_{i=1}^{k_j} \bar{\beta}_i^j \right) = 2\pi V^{in} + \sum_{i=1}^{k} \bar{\beta}_i.$$

Weiter gilt $k_j = E_j$ und $\sum_{j=1}^F k_j = 2E^{in} + E^a$ da jede Innenkante zu genau 2 der Gebiete G_j gehört. Setzt man diese Identitäten in $(*)$ ein, so folgt

$$\int_G K dA^g = 2\pi(F - E + V) - 2\pi V^a + \pi E^a + \sum_{i=1}^{k} \bar{\beta}_i = 2\pi\chi(G) - \sum_{i=1}^{k} (\pi - \bar{\beta}_i).$$

□

Anwendungen

- Ist $K \geq 0$ (≤ 0), so ist die Winkelsumme in jedem geodätischen Dreieck $\geq \pi$ ($\leq \pi$).

  Beweis. Satz von GB für $G = \Delta$ (geod. Dreieck) ($\chi(\Delta) = 1$) $\Rightarrow$ $\int_\Delta K dA^g = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \bar{\beta}_i) = \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_i - \pi$. □

- Ist $q \in U$ und ist Δ_i eine Folge von geod. Dreiecken, die gegen q konvergieren (d.h. $\Delta_i \subset B_{r_i}(q)$ mit $r_i \downarrow 0$) so gilt

$$K(q) = \lim_{i \to \infty} \frac{(\bar{\beta}_1^i + \bar{\beta}_2^i + \bar{\beta}_3^i) - \pi}{A(\Delta_i)}.$$

Beweis. $\forall \epsilon > 0 \; \exists i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $i \geq i_0$ gilt

$$(K(q) - \epsilon) A(\Delta_i) \leq \int_{\Delta_i} K dA^g \leq (K(q) + \epsilon) A(\Delta_i).$$

□

Dies ist eine innergeometrische Deutung der Gaußkrümmung als infinitesimaler Winkelexzess von geod. Dreiecken.

9.6 Satz (Satz von Gauß-Bonnet für Untermannigfaltikeiten in $\mathbb{R}^3$)**.** *Sei M 2-dimensionale kompakte Untermannigfaltikeit des $\mathbb{R}^3$ (ohne Rand). Dann gilt*

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M).$$

Akzepiert man, dass M sich in endlich viele, einfach zusammenhängende geod. Polygone, auf denen man Fermi-Koordinaten einführen kann, zerlegt werden kann, so ist der Beweis eine einfache Version des Beweises für geod. Polygone.