

SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 01

Abgabedatum: Freitag, 26. April 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. ALLERLEI DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (10 PUNKTE)

Lernziel: Lösen von einfachen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- (1) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die gesuchte Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ löst die Differentialgleichung

$$y''(t) = -\alpha \cos(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(1) = y_0 \in \mathbb{R}$ und $y'(1) = y_1 \in \mathbb{R}$. Bitte lösen Sie das obige Anfangswertproblem.

- (2) Seien $a_0, b_0 > 0$. Für eine gesuchte Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (a_0(1 - \cos(2\pi t))x(t) - b_0$$

mit Anfangswert $x(0) = x_0 > 0$. Bitte lösen Sie das Anfangswertproblem.

Bemerkung: Diese Problem kann als Model für das jahreszeitabhängige Wachstum einer Fischpopulation unter konstanter Abfischung betrachtet werden.

- (3) Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wir betrachten für eine gesuchte Funktion $r : [0, T) \rightarrow (0, \infty)$ die Differentialgleichung

$$r'(t) = -\frac{m-1}{r(t)}$$

mit Anfangsbedingung $r(0) = r_0 > 0$. Bitte lösen Sie das obige Anfangswertproblem.

Bemerkung: Diese Differentialgleichung beschreibt den Radius der Evolution einer runden Sphäre unter dem Ricci-Fluss.

2. FREIER FALL MIT NEWTONSCHER REIBUNG (10 PUNKTE)

Lernziel: Separation der Variablen und Integration einer elementaren Differentialgleichung für ein Anwendungsproblem.

Sei $m > 0$ die Masse, $g > 0$ die Gravitationskonstante, und $\gamma > 0$ der Reibungskoeffizient. Für eine gesuchte Funktion $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Höhe (bzgl. der nach unten orientierten Achse) zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$ beschreibt, betrachten wir das Anfangswertproblem

$$m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x}^2, \quad x(0) = 0, \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0,$$

welches den freien Fall mit Newtonscher Reibung beschreibt (z.B. Fallschirmsprung).

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann aufgrund der speziellen Struktur (keine Terme in $t \mapsto x(t)$ auf der rechten Seite) in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt werden.

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen:

- (1) Bitte lösen Sie das Anfangswertproblem

$$m\dot{v} = mg - \gamma v^2, \quad \text{und} \quad v(0) = 0,$$

für die Geschwindigkeit $v : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (2) Skizzieren Sie bitte die Geschwindigkeit $t \mapsto v(t)$ in einem Graph.
(3) Berechnen Sie bitte den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.

Bemerkung: Dies beschreibt die Grenzgeschwindigkeit für einen freien Fall mit Newtonscher Reibung.

- (4) Verwenden Sie ihre Lösung $v : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, um das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \text{und} \quad x(0) = 0,$$

für die Position $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ zu lösen.

- (5) Sei $x_0 > 0$ gegeben. Berechnen Sie $T > 0$, sodass $x(T) = x_0$.

Bemerkung: Dies beschreibt die Zeit $T > 0$, die benötigt wird, um die Höhe $x_0 > 0$ im freien Fall mit Newtonscher Reibung zu fallen.