SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 02

Abgabedatum: Freitag, 03. Mai 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen (10 Punkte)

Lernziel: Die schnelle und korrekte Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Interval in den reellen Zahlen. Die Funktionen $x, y, z, \varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind reellwertig, und die Variablen werden s und t genannt. Die griechischen Buchstaben ω, θ und κ bezeichnen positive reelle Zahlen, und der lateinische Buchstabe n bezeichnet eine reelle Zahl.

Bitte klassifizieren sie die untenstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen bezüglich der folgenden Kriterien: *Ordnung*, *Skalare Gleichung oder System*, *Linear oder Nichtlinear*, und *Autonom oder Nicht-autonom*. Falls die Gleichung linear ist, entscheiden sie bitte auch ob die Gleichung *homogen* ist, und ob sie *konstante Koeffizenten* hat.

(1) Die Mathieu-Differentialgleichung
$$\ddot{x} + (1 - 2\cos(2t))x = 0.$$
(2) Die Differentialgleichung des mathematischen Pendels
$$\ddot{\varphi} + \kappa \sin(\varphi) = 0.$$
(3) Die Funktionen x und y erfüllen
$$\ddot{x}(t) = G(t)^2 \text{ und } \dot{y}(t) = x(t),$$
wobei G eine beliebige reellwertige Funktion ist.
(4) Die Differentialgleichung
$$\dot{y}(t) = F(t)y(t) + G(t).$$
(5) Die Differentialgleichung
$$\dot{y} = F[y],$$
wobei F eine beliebige reellwertige Funktion ist.
(6) Die Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $u(s) = (x(s), y(s), z(s))$ erfüllt $\dot{u} = Au$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(7) Die Lorenz-Differentialgleichung
$$\begin{cases} x' = \omega(y - x)) \\ y' = x(\theta - z) - y \; . \\ z' = xy - \kappa z \end{cases}$$

(8) Die Laguerre-Differentialgleichung
$$sy''(s) + (1-s)y'(s) + ny(s) = 0.$$

2. Reduktion auf erste Ordnung (10 Punkte)

Lernziel: Die Reduktion einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System erster Ordnung

Bitte schreiben sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein System erster Ordnung um:

(1) Betrachten sie für ω_0, $\beta > 0$ und $\epsilon > 0$ den gedämpften anharmonischen Oszillator, welcher durch das Anfangswertproblem
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0, \end{cases}$$
für eine gesuchte Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Bitte klassifizieren sie die gewöhnliche Differentialgleichung und schreiben sie die gewöhnliche Differentialgleichung in ein System erster Ordnung von der Form
$$\begin{cases} \dot{u} = F(u) \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$
für eine gesuchte Funktion $u : I \to \mathbb{R}^m$ um. Geben sie die ganze Zahl $m \geq 1$, den zugehörigen Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und die Abbildung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ explizit an.

(2) Zwei gekoppelte harmonisce Oszillatoren mit Kopplungskonstante $\rho > 0$ werden durch das System
$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -\rho x_1 - \rho(x_1 - x_2) \\ \ddot{x_2} = -\rho(x_2 - x_1) - \rho x_2 \end{cases}.$$
für gesuchte Funktionen $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ beschrieben. Bitte klassifizieren sie die gewöhnliche Differentialgleichung und schreiben sie die gewöhnliche Differentialgleichung in ein System erster Ordnung von der Form
$$\dot{w} = Aw$$
für eine gesuchte Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ um. Bestimmen sie die ganze Zahl $l \geq 1$, und die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(l; \mathbb{R})$ explizit.