SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 03

Abgabedatum: Montag, 13. Mai 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Der gedämpfte harmonische Oszillator (10 Punkte)

Lernziel: Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizenten durch Umschreiben in ein System erster Ordnung

In dieser Übung modifizieren wir das Beispiel aus der Vorlesung, um den gedämpften harmonischen Oszillator zu lösen. Die Gleichung ist gegeben durch

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0,$$

wobei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist, und $\omega_0 > 0$ und $\beta > 0$ gilt. Wir nehmen an, dass die Dämpfung schwach ist, i.e. $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$.

Bitte finden sie die Lösung für das Anfangswertproblem mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ durch Ausarbeiten der folgenden Schritte:

(1) Umschreiben der Gleichung in ein System erster Ordnung.
(2) Berechnung des Matrixexponentials (durch Diagonalisieren der Matrix).
(3) Berechnung der Lösung $t \mapsto x(t)$ aus der Lösung des Systemes.

2. Matrixexponential und Normalformen (10 Punkte)

Lernziel: Eigenschaften des Matrixexponentials im Zusammenhang mit Normalformen von Matrizen ausnutzen

(1) Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, und sei $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix, i.e. $A^T = -A$. Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblemes $\dot{u} = Au$ und $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$ Bitte berechnen sie die Größe $t \mapsto \|u(t)\|$ für alle $t \geq 0$.
(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ eine Matrix, sodass für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ der Matrix A die Abschätzung $|\lambda| < 1$ gilt. Bitte zeigen sie, dass $\lim_{k\to\infty} A^k = 0_{\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})}$ gilt.