SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 04

Abgabedatum: Freitag, 17. Mai 2024, 16.00 Uhr
Abgabe auch nach der Pfingstpause bis Montag, 27. Mai 2024, 16.00 Uhr möglich
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Der gedämpfte harmonische Oszillator mit äusserer Kraft (10 Punkte)

Lernziel: Lösung von inhomogenen Systemen erster Ordnung

In dieser Übung modifizieren wir ein Beispiel auf der Vorlesung / den Übungen, um den gedämpften harmonischen Oszillator mit einer äußeren Kraft zu lösen. Die Gleichung ist gegeben durch

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t),$$

wobei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist, und $\omega_0 > 0$, $\beta > 0$, $F_0 > 0$ und $\Omega > 0$ gilt. Wir nehmen an, dass die Dämpfung schwach ist, i.e. $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, und setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

(1) Bitte finden sie die Lösung für das Anfangswertproblem mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.
Hinweis: Recyclen sie die Fundamentallösung für das homogene Problem (vgl. Serie 03, Aufgabe 1). Diese ist gegeben durch

$$\Phi(t) = \exp(-\beta t)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega}\sin(\omega t) & \cos(\omega t) - \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

(2) Diskutieren sie die maximale Amplitude als Funktion $\Omega \mapsto A(\Omega)$. Für welche $\Omega > 0$ wird diese Funktion maximal? Was passiert für $\beta \to 0$?
Hinweise: Vergleichen sie ihre Zwischenergebnisse mit dem Beispiel aus den Vorlesungsnotizen, indem sie $\beta = 0$ setzen. Für die Funktion $\Omega \mapsto A(\Omega)$ sollten sie die folgende Form erhalten:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m_0}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

2. Matrizen und Eigenwerte (10 Punkte)

Lernziel: Eine Wiederholung in Linearer Algebra zu Matrizen und ihren Eigenwerten

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(m; \mathbb{C})$. Bitte zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Die Matrizen $AB, BA \in \mathrm{Mat}(m; \mathbb{C})$ haben die gleichen Eigenwerte.
(2) Es gilt $\det \exp(tA) = \exp(t \cdot \mathrm{tr}\, A)$, wobei $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}(m; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die Spur bezeichnet.
Hinweis: Überlegen sie sich zuerst den Fall A diagonal, dann A diagonalisierbar, und dann den allgemeinen Fall.