**SOMMERSEMESTER 2024**
**GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**
**SERIE NR. 06**

**Abgabedatum: Freitag, 21. Juni 2024, 16.00 Uhr**
**Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!**

## 1. Kurzzeitexistenz für nichtautonome Probleme (10 Punkte)

*Lernziel: Analyse und Verallgemeinerung des Beweises zur Kurzzeitexistenz nach Picard–Lindelöf*

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^m$ stetig und bezüglich der zweiten Variable $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ lokal gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$ lokale Lipschitz-stetig ist, i.e. für alle $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ existieren $r_0 > 0$, $T_0 > 0$ und $L > 0$, sodass für alle $u, v \in B_{r_0}(u_0) \subseteq U$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < T_0$ die folgende Abschätzung haben:

$$|F(t,u) - F(t,v)| \leq L|u - v|.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{1}$$

Bitte zeigen Sie, dass $\delta = \delta(u_0, F) > 0$ existiert, und eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung $u : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblemes (1).

## 2. Picard-Iterationen und Lösungen einer Differentialgleichung (5 Punkte)

*Lernziel: Explizites Berechnen einer Lösung mit Picard–Iterationen*

Betrachten Sie für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\omega_0 > 0$ das Anfangswertproblem $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, und $\dot{x}(0) = 0$ für den harmonischen Oszillator.

Bitte schreiben Sie das obige Anfangswertproblem in ein System erster Ordnung um, und berechnen Sie anschliessend die Picard-Iterationen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und deren Grenzwert für $k \to \infty$. Was können Sie über die Konvergenz aussagen? Beweisen Sie ihre Aussagen mittels Induktion.

## 3. Global definierte Lösungen einer Differentialgleichung (5 Punkte)

*Lernziel: Globale Existenz trotz Abwesenheit einer globalen Lipschitz-Schranke*

Bitte konstruieren Sie eine Funktion $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, sodass $F$ nicht global Lipschitz-stetig ist, aber das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

hat für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$ global definierte Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie bitte ihre Aussagen.