SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
LÖSUNGEN ZU SERIE NR. 07

Abgabedatum: Freitag, 28. Juni 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten (10 Punkte)

Lernziel: Eine weitere Modifikation des Beweises des Theorems von Picard–Lindelöf.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz-stetig, und $u_0 \in U$. Wir betrachten für die Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = F(u(t))$ und $u(0) = u_0 \in U$

Zeigen Sie bitte, dass die Lösung $t \mapsto u(t)$ im folgenden Sinne stetig vom Anfangsdatum abhängt: Sei $r_0 > 0$ wie im Beweis von Picard–Lindelöf gegeben. Dann existiert $\delta = \delta(u_0, F) > 0$, sodass für alle $u_1 \in B_{r_0/2}(u_0)$ eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung $v \in C^1([-\delta, \delta], U)$ des Anfangswertproblem $\dot{v}(t) = F(v(t))$ und $v(0) = u_1$ existiert; weiterhin existiert $C = C(u_0, F) > 0$ mit der Abschätzung

$$\|u - v\|_{C^1([-\delta,\delta],U)} \leq C|u_0 - u_1|, \quad \text{wobei } \|u - v\|_{C^1([-\delta,\delta],U)} := \|u - v\|_\infty + \|\dot{u} - \dot{v}\|_\infty.$$

Hinweis: Eine geeignete Modifikation von Theorem 3.6 in den Vorlesungsnotizen ist ein guter Startpunkt für die Aussage. Wählen sie $r_0 > 0$ wie im Beweis, und betrachten sie für $u_1 \in B_{r_0/2}(u_0)$ die Abbildung $\Phi_{u_1} : M \to M$ gegeben durch

$$\Phi_{u_1}(v)(t) = u_1 + \int_0^t F(v(s))\, ds.$$

Weiterhin braucht man anstelle von Behauptung 2 eine Abschätzung für den Term $\|\Phi_{u_0}(v) - \Phi_{u_1}(w)\|_\infty$.

2. Fluss von Differentialgleichungen (10 Punkte)

Lernziel: Machen sie sich mit dem Konzept des Flusses in einfachen Beispielen vertraut.

Betrachten sie für eine gesuchte Funktion $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = F(x(t))$ und $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.

Beantworten Sie bitte für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

(1) $F(x) = |x|$,
(2) $F(x) = x^3$,

die folgenden Fragen:

(1) Lösen Sie bitte das Anfangswertproblem; und finden sie bitte für $x_0 \in \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich der Lösung.
(2) Finden Sie bitte den Definitionsbereich des Flusses, und die Flussabbildung.
(3) Was können sie über die Regularität der Flussabbildung aussagen?