SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
LÖSUNGEN ZU SERIE NR. 08

Abgabedatum: Freitag, 05. Juli 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Ein Kriterium für globale Existenz von Lösungen (10 Punkte)

Lernziel: Differentialungleichungen in Verbindung mit der Charakterisierung von globaler Existenz

Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und sei $\psi : [0, \infty) \to [1, \infty)$ eine stetige Funktion, sodass $|F(u)| \leq \psi(|u|)$ für alle $u \in \mathbb{R}^m$ und $\int_0^\infty \frac{1}{\psi(r)}\, dr = \infty$.

Wir betrachten für $u_0 \in \mathbb{R}^m$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Bitte zeigen sie, dass das obige Anfangswertproblem für jeden Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige globale Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ besitzt.

2. Volumen im Phasenraum (10 Punkte)

Lernziel: Anwendungen von Eigenschaften des Flusses einer Differentialgleichung

(1) Der harmonische Oszillator wird durch die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} u(t), \quad u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

beschrieben. Sei $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der dazugehörige Fluss. Sei $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ der offene Einheitsball.

(a) Berechnen sie bitte das Phasenraumvolumen $\mathrm{vol}(\Phi_t(B_1(0))$ für $t \geq 0$ auf zwei Arten: Einerseits durch Verwenden der expliziten Lösung, andererseits durch Verwenden von Resultaten aus der Vorlesung.

(b) Wie ändert sich die Antwort auf die vorherigen Fragen, falls man den gedämpften harmonischen Oszillator mit Dämpfungskonstante $\beta > 0$ betrachet?

(2) Das mathematische Pendel wird durch die Lösung $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\omega_0^2 \sin u_1(t) \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

beschrieben. Sei $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der dazugehörige Fluss. Sei $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ der offene Einheitsball.

(a) Zeigen Sie bitte, dass $I_{\max}(u_0) = \mathbb{R}$ für alle $u_0 \in \mathbb{R}^2$ gilt.
Hinweis: Verwenden sie Serie 08, Aufgabe 1.

(b) Verwenden sie bitte Resultate aus der Vorlesung über den Fluss, um das Phasenraumvolumen $\mathrm{vol}(\Phi_t(B_1(0)))$ für $t \geq 0$ zu berechnen.