SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 09

Abgabedatum: Freitag, 12. Juli 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Gleichgewichtspunkte gewöhnlicher Differentialgleichungen (10 Punkte)

Lernziel: Auffinden von Gleichgewichtspunkten

Finden sie bitte alle Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungen. Bitte diskutieren sie für die erste Teilaufgabe auch die Stabilität der Gleichgewichtspunkte.

(1) Die Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $\dot{z} = \exp(z)\sin(z)$.
(2) Die Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Komponenten $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ erfüllt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + z(t)(x(t) - c) \end{cases}$$

wobei $a, b, c > 0$ und $c^2 - 4ab > 0$. Dieses System ist in der Literatur als Rössler-Attraktor bekannt. Es ist ein weiteres Beispiel eines chaotischen Systemes neben dem Lorenz-System.
(3) Die Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ erfüllt

$$\dot{u}(t) = F(u(t)), \text{ wobei } F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ definiert ist durch } F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ y^2 + xz \\ z^2 + xy \end{pmatrix}$$

Dieses System, welches oft als Hamilton-ODE bezeichnet wird, taucht in der Literatur im Zusammenhang mit dem Ricci-Fluss von 3-Mannigfaltigkeiten auf.

2. Stabilität für eine nichtlineare Differentialgleichungen (10 Punkte)

Lernziel: Untersuchung eines nichlinearen Systems auf Stabilität der Gleichgewichtspunkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Für eine gesuchte Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $u(t) = (x(t), y(t))$ betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a + x^2(t)y(t) - bx(t) - x(t), \\ \dot{y}(t) = bx(t) - x^2(t)y(t). \end{cases}$$

(1) Bitte klassifizieren sie die Differentialgleichung.
(2) Finden sie bitte alle Gleichgewichtspunkte $(\bar{x}, \bar{y})$ des obigen Systemes mit $\bar{x} \geq 0$ und $\bar{y} \geq 0$.
(3) Diskutieren sie bitte die Stabilität der Gleichgewichtspunkte.
Hinweis: Die Antwort sollte in Form einer algebraischen Ungleichung zwischen a und b gegeben werden. Die Stabilität für Gleichheit in dieser Ungleichung muss nicht diskutiert werden.