SOMMERSEMESTER 2024
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SERIE NR. 10

Abgabedatum: Freitag, 19. Juli 2024, 16.00 Uhr
Bitte kontaktiert uns bei Fragen oder Schwierigkeiten!

1. Stabilität für eine nichtlineare Differentialgleichungen II (20 Punkte)

Lernziel: Untersuchung eines nichlinearen Systems auf Stabilität der Gleichgewichtspunkte mittels Linearisierung und Lyapunow-Funktionen

(1) Für eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ betrachten wir das mathematische Pendel

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 \sin(u_1) \end{pmatrix}.$$

(a) Bitte finden sie alle Gleichgewichtspunkte des obigen Systems.
(b) Finden sie bitte eine Lyapunow-Funktion, um zu zeigen, dass der Punkt $\bar{u} = (0, 0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.
(c) Berechnen sie bitte die Linearisierung bei $\bar{u} = (0, 0)$, und zeigen sie, dass die Linearisierungkriterien keine Aussage über die Stabilität bei $\bar{u} = (0, 0)$ machen.
(d) Untersuchen sie bitte das gedämpfte mathematische Pendel mit $\dot{u}_2 = -\omega_0^2 \sin(u_1) - 2\beta u_2$ für $\beta > 0$ und $\omega_0^2 > \beta^2$ analog zum obigen Vorgehen auf asymptotische Stabilität.

(2) Für eine Funktion $u : I \subseteq \mathbb{R} \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ betrachten wir das System

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} u_2 \\ (1 + u_2^2)\left(\frac{1}{u_1} - 2\sqrt{1 + u_2^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dieses System taucht im Kontext von Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung auf.
(a) Zeigen sie bitte, dass das System genau einen Gleichgewichtspunkt $\bar{u} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ hat, und berechnen sie diesen.
(b) Berechnen sie die Linearisierung am Gleichgewichtspunkt $\bar{u} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Argumentieren sie bitte, dass man anhand der Linearisierung weder über Stabilität noch Instabilität entscheiden kann.
(c) Zeigen sie bitte, dass $L : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(u_1, u_2) = u_1^2 - \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_2^2}}$$

entlang von Lösungen des System (1) erhalten ist. Folgern sie daraus, dass $\bar{u} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.
(d) Verwenden sie die Lyapunow-Funktion L, um zu zeigen, dass der Gleichgewichtspunkt $\bar{u} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ nicht asymptotisch stabil ist.
(e) Diskutieren Sie bitte, ob es sich beim System (1) um ein Gradiensystem oder ein Hamiltonsches System handeln kann.