

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

FLORIAN JOHNE

florian.johne@math.uni-freiburg.de

ALBERT-LUDWIGS UNIVERSITÄT FREIBURG

VERSION VOM 23. JULI 2024



## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Elementare Differentialgleichungen und erste Beobachtungen	5
1. Elementar integrierbare Differentialgleichungen	5
2. Skalare lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	6
3. Separation der Variablen	9
4. Klassifikation von Differentialgleichungen	12
5. Reduktion der Ordnung	18
Kapitel 2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	21
1. Das Matrixexponential	21
2. Systeme erster Ordnung	27
3. Inhomogene Systeme erster Ordnung	30
4. Homogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten von höherer Ordnung	31
5. Inhomogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten von höherer Ordnung	34
6. Asymptotisches Verhalten von Lösungen	39
Kapitel 3. Existenztheorie für nichtlineare Gleichungen	41
1. Der Banachsche Fixpunktsatz	42
2. Existenz und Eindeutig mittels dem Satz von Picard–Lindelöf	43
3. Der Fluss einer gewöhnlichen Differentialgleichung	49
4. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsdaten	50
5. Der Satz von Liouville	55
Kapitel 4. Analyse von Gleichgewichtspunkten	57
1. Stabilitätsanalyse mittels der Linearisierung	57
2. Lyapunow-Funktionen	59
3. Gradientensysteme	60
4. Hamiltonsche Systeme	61
Anhang A. Normalformen für Matrizen	63
1. Diagonalisierbare Matrizen	63
2. LN-Zerlegung	64
Anhang B. Erweiterungen zur Existenztheorie	67
1. Der Satz von Peano	67



## Elementare Differentialgleichungen und erste Beobachtungen

In diesem Kapitel werden wir zuerst drei elementare Lösungsmethoden für einfache, aber fundamentale Differentialgleichungen besprechen.

Anschließend werden wir die Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen besprechen, die als Leuchtturm für die Auswahl der korrekten Lösungsmethode dient. Zum Abschluss besprechen wir die Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung, die für eine Vereinheitlichung und Vereinfachung der theoretischen Diskussion sorgt.

### 1. Elementar integrierbare Differentialgleichungen

Die einfachste Klasse von Differentialgleichungen sind elementar integrierbare Differentialgleichungen: Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene stetige Funktion, und  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine gesuchte Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \quad x^{(n)}(t) = f(t).$$

Das Vorgehen wird am Besten anhand von mehreren Beispielen aus der Physik illustriert:

- (1) Eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0 \in \mathbb{R}$  wird durch die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = v_0$  beschrieben. Um die Lösung dieser Differentialgleichung zu finden, beobachten wir mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung die Gleichung

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) \, ds = \int_0^t v_0 \, ds = v_0 t.$$

Mit dem Anfangswert  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  ist die Lösung gegeben durch

$$x(t) = x_0 + v_0 t.$$

Dieses Beispiel tritt für Körper in uniformer Bewegung auf.

- (2) Eine eindimensionale Bewegung mit vorgeschriebener Geschwindigkeit  $t \mapsto v(t)$  wird durch die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = v(t)$  beschrieben. Wiederum impliziert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung die Gleichung

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) \, ds = \int_0^t v(s) \, ds.$$

Daher ist die Lösung für den Anfangswert  $x(0) = x_0$  gegeben durch

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s) \, ds.$$

Dieses Beispiel tritt in der Diskussion des freien Fall mit newtonscher Reibung auf, z.B. beim Fallschirmspringen. Mehr dazu im Abschnitt über separierbare Gleichungen.

- (3) Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung  $a_0 \in \mathbb{R}$  werden durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form  $\ddot{x}(t) = a_0$  beschrieben. Für die Lösung wenden wir den Fundamentalsatz der Integral- und Differentialgleichung zweimal an. Zuerst gilt

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \int_0^t \ddot{x}(s) \, ds = \int_0^t a_0 \, ds = a_0 t.$$

Daher haben wir mit dem Anfangswert  $\dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$  für die Geschwindigkeit die Gleichung

$$\dot{x}(t) = v_0 + a_0 t.$$

Eine weitere Anwendung des Fundamentalsatz der Integral- und Differentialgleichung liefert

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) ds = \int_0^t (v_0 + a_0 s) ds = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

Mit der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  für die Position finden wir

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

Der freie Fall im (homogenen) Gravitationsfeld der Erde wird beschrieben durch die Beschleunigung  $a_0 = -g$ , wobei  $g > 0$  die Graviationskonstante des (homogenen) Graviationsfeldes der Erde ist.

- (4) Bewegungen mit vorgeschriebener Beschleunigung  $t \mapsto a(t)$  werden durch die Differentialgleichung  $\ddot{x}(t) = a(t)$  beschrieben. Die erste Anwendung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\dot{x}(s) - \dot{x}(0) = \int_0^s a(r) dr.$$

Umstellen und verwenden der Anfangsbedingung  $\dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$  liefert

$$\dot{x}(s) = v_0 + \int_0^s a(r) dr.$$

Eine weitere Integration unter Benutzung des Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= x_0 + \int_0^t \left( v_0 + \int_0^s a(r) dr \right) ds \\ &= x_0 + v_0 t + \int_0^t \left( \int_0^s a(r) dr \right) ds, \end{aligned}$$

wobei wir den Anfangswert  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  verwendet haben.

Wir haben den Lösungsprozess für Gleichungen erster und zweiter Ordnung illustriert. Der Prozess für höhere Ordnungen funktioniert analog.

Der Lösungsprozess für eine gewöhnliche Differentialgleichung wird in Anlehnung an das obige Vorgehen oft **Integration der Differentialgleichung** genannt — sogar wenn keine Integration im Lösungsprozess sichtbar ist.

Die Lösungsmethode **Separation der Variablen**, welche später vorgestellt wird, funktioniert mit einem ähnlichen Vorgehen für eine wichtige Klasse nichtlinearer Gleichungen.

## 2. Skalare lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Differentialgleichung

$$(2) \quad \dot{x}(t) = ax(t)$$

für eine unbekannte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  ist eine weitere einfache und fundamentale Differentialgleichung.

Diese Differentialgleichung tritt zum Beispiel beim exponentiellen Wachstum ( $a > 0$ ) oder beim radioaktiven Zerfall ( $a < 0$ ) auf.

PROPOSITION 1.1.

*Eine Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  löst die Differentialgleichung (2) genau dann, wenn  $x(t) = c \exp(at)$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gilt.*

BEWEIS.

Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (2). Wir betrachten die Hilfsfunktion  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $z(t) = \exp(-ta)x(t)$ . Dann folgt mit der Produktregel und der Differentialgleichung (2) die Gleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}(\exp(-ta)x(t)) = \exp(-ta)(x'(t) - ax(t)) = 0.$$

Daher schliessen wir, dass die Funktion  $t \mapsto z(t)$  konstant ist, i.e. es existiert  $c \in \mathbb{R}$ , sodass  $z(t) = c$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Umstellen ergibt  $x(t) = c \exp(at)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Für die andere Richtung nehmen wir an, dass  $x(t) = c \exp(at)$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Differenzieren liefert  $x'(t) = ca \exp(at) = ax(t)$ . Somit erfüllen diese Funktionen die Differentialgleichung. Dies beendet den Beweis.  $\square$

PROPOSITION 1.2.

Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Betrachte für eine unbekannte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dann hat dieses Anfangswertproblem die eindeutige Lösung  $x(t) = x_0 \exp(a(t - t_0))$ .

BEWEIS.

Der erste Teil des Beweises von Proposition 1.1 liefert, dass  $x(t) = c \exp(at)$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Die Bedingung  $x(t_0) = x_0$  impliziert dann, dass  $x_0 = c \exp(at_0)$ . Umstellen liefert  $c = x_0 \exp(-at_0)$ , und somit  $x(t) = x_0 \exp(a(t - t_0))$ .

Wie im Beweis von Proposition 1.1 rechnet man direkt nach, dass die Funktion  $x(t) = x_0 \exp(a(t - t_0))$  das Anfangswertproblem (3) löst.  $\square$

Im nächsten Schritt betrachten wir eine etwas allgemeinere Differentialgleichung. Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in J$  und sei  $a : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

PROPOSITION 1.3.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblem (4) ist gegeben durch

$$(5) \quad x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) x_0.$$

Wir motivieren zuerst die Form der obigen Lösung: Die Lösung  $x(t) = \exp(at)x_0$  für die gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = ax(t)$  legt den Ansatz  $x(t) = C \exp(g(t))$  für die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$  nahe. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$0 = \dot{x}(t) - a(t)x(t) = C \exp(g(t)) [\dot{g}(t) - a(t)].$$

Aber die Differentialgleichung  $\dot{g}(t) = a(t)$  mit der Wahl des Anfangswertes  $g(t_0) = 1$  ist elementar integrierbar, und daher mit den Methoden aus dem vorherigen Abschnitt lösbar.

BEWEIS.

Wir betrachten für eine beliebige Lösung  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  die Hilfsfunktion

$$z(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) x(t).$$

Dann gilt  $z(t_0) = x(t_0) = x_0$ . Differenzieren liefert

$$\dot{z}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) = 0.$$

Damit ist die Funktion  $t \mapsto z(t)$  konstant. Daher gilt für  $c \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $x(t) = c \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ . Der Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  liefert auch noch  $c = x_0$ .

Für die andere Richtung verifiziert man direkt mit dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung, dass die Funktion aus Gleichung (5) das Anfangswertproblem (4) löst.  $\square$

Als Beispiel betrachten wir auf  $J = (0, \infty)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t), \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Mit der obigen Lösungsformel erhalten wir die Lösung  $x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s} ds\right) x(1) = \exp(\ln t) \cdot 1 = t.$$

Wir verallgemeinern die Differentialgleichung weiter, indem wir eine Inhomogenität auf der rechten Seite hinzufügen. Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in J$  und seien  $a, f : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

PROPOSITION 1.4.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblem (6) ist gegeben durch

$$(7) \quad x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) f(s) ds\right).$$

BEWEIS.

Sei  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblem (6). Wie in den vorherigen Beweisen betrachten wir die Hilfsfunktion

$$z(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) x(t)$$

mit  $z(t_0) = x(t_0) = x_0$ . Durch die analoge Rechnung zum vorherigen Beweis erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) f(t).$$

Dies ist eine elementar integrierbare Differentialgleichung mit Lösung

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) f(s) ds.$$

Umstellen liefert die gesuchte Lösungsformel (7).

Die Umkehrrichtung folgt wie in den vorherigen Beweisen durch direktes Nachrechnen.  $\square$

Als Beispiel betrachten wir auf  $J = \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = tx(t) + t^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Zur Lösung verwenden wir die obige Lösungsformel. Zuerst berechnen wir

$$\int_0^t a(r) dr = \int_0^t r dr = \frac{1}{2}t^2.$$



Damit folgt

$$x(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) \left(1 + \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) s^2 ds\right),$$

wobei sich das Integral im zweiten Term nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lässt.

### 3. Separation der Variablen

Separierbare Gleichungen sind eine Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, die in geschlossener Form (wenn auch teilweise nur in impliziter Form) lösbar sind. Diese treten oft in der Physik, insbesondere im Zusammenhang mit Erhaltungssätzen wie der Energieerhaltung, auf.

Separierbarkeit ist ein Konzept für Differentialgleichungen der Form

$$(8) \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

wobei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist,  $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion ist, und  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine gesuchte Funktion ist.

DEFINITION 1.5 (Separierbare gewöhnliche Differentialgleichungen).

Die gewöhnliche Differentialgleichung (8) heißt separierbar, falls die rechte Seite  $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als Produkt

$$F(t, x) = g(t)h(x)$$

zweier Funktionen geschrieben werden kann, wobei eine Funktion nur von der Variable  $t \in J$  abhängt und die andere Funktion nur von der Variable  $x \in \mathbb{R}$  abhängt.

Insbesondere sind Differentialgleichungen der Form  $\dot{x} = F(x)$ , die auch autonome Differentialgleichungen genannt werden (vgl. der Abschnitt über Klassifikation), separierbar.

Weitere Beispiele separierbarer Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$\dot{y}_1(t) = a(t)y_1(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}_2(t) = t(1 + y_2(t)^2);$$

während die Differentialgleichungen

$$\dot{y}_3(t) = \cos(ty_3(t)) \quad \text{und} \quad \dot{y}_4(t) = t(y_4(t) + ty_4^2(t))$$

nicht separierbar sind.

Separierbare Gleichungen tauchen in allerlei Anwendungen auf: Der radioaktive Zerfall und das exponentielle Wachstum sind durch die separierbare Differentialgleichungen

$$\dot{y} = ay,$$

mit  $a \in \mathbb{R}$  beschrieben. Natürlich ist diese Gleichung auch mit den Methoden aus dem vorherigen Abschnitt lösbar.

Die nichtlineare Differentialgleichung (mit Parametern  $\alpha > 0$  und  $K > 0$ )

$$\dot{z} = \alpha \left(1 - \frac{z}{K}\right) z$$

heißt **logistische Differentialgleichung** - sie taucht in der Populationsdynamik, in der Linguistik, in der Autokatalyse in der Chemie, oder im Zusammenhang mit der Fermi-Distribution in der Physik auf.

Eine weitere große Klasse an Beispielen liefern Bewegungen in eindimensionalen Potentialen in der Physik. Die separierbare Differentialgleichung ist dann gegeben durch

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m} - U(x)},$$

wobei  $E \in \mathbb{R}$  die Energie ist,  $m > 0$  die Masse und  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Potentialfunktion. Ein konkretes Beispiel ist das Kepler-Problem (i.e. die Bewegung eines Planeten im Gravitationsfeldes der Sonne), welches auf eine Differentialgleichung des obigen Typs reduziert werden kann.

Abschliessend führen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung mit hoher Symmetrie oft auf separierbare Differentialgleichungen. Ein Beispiel ist die Differentialgleichung für den Ricci-Fluss

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, x) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}(t, x),$$

welche sich für sphärisch symmetrische Lösungen auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} r^2(t) = -2 \rightsquigarrow \dot{r}(t) = -\frac{1}{r(t)},$$

für die gesuchte Funktion  $r : [0, T) \rightarrow (0, \infty)$  reduziert.

### 3.1. Lösungsmethode für separierbare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Für separierbare gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es eine direkte Lösungsmethode, welche zumindest eine implizit definierte Lösung findet. Wir betrachten für  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  und  $t_0 \in I, J$  das Anfangswertproblem

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

für eine gegebene stetige Funktion  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in J$ , eine gegebene stetige Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und eine gesuchte Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Im ersten Schritt betrachten wir die Größe  $h(x_0)$ . Es gibt zwei Fälle:

Falls  $h(x_0) = 0$  können wir die Variablen nicht separieren, aber eine Lösung (und je nach Regularität der rechten Seiten auch die eindeutige Lösung) ist gegeben durch  $x(t) = x_0$  für alle  $t \in [t_0, \infty)$ .

Falls  $h(x_0) \neq 0$ , so existiert bei Stetigkeit der Funktion  $h$  ein Intervall  $\tilde{J} \subseteq I$ , sodass  $h(x(t)) \neq 0$  für alle  $t \in \tilde{J}$ . Dann dürfen wir für alle  $t \in \tilde{J}$  durch  $h(x(t))$  dividieren. Dies ergibt

$$\frac{\dot{x}(s)}{h(x(s))} = g(s),$$

wobei wir den Namen der Variablen von  $t$  in  $s$  geändert haben.

Im nächsten Schritt integrieren wir beide Seiten von  $t_0$  nach  $t$  bezüglich der Variablen  $s \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{h(x(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Das Integral auf der linken Seite kann mit der Substitutionsregel für Integrale umgeschrieben werden:

PROPOSITION 1.6.

Sei  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\phi(a) = c$  und  $\phi(b) = d$ . Dann gilt für jede stetige Funktion  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  die Formel

$$\int_c^d f(s) ds = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Falls  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  ist, und  $G$  eine Stammfunktion von  $G$  ist, so gelten nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung die Gleichungen

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{h(u)} du = H(x(t)) - H(x_0), \text{ und } \int_0^t g(s) ds = G(t) - G(0).$$

Daher folgt

$$H(x(t)) - H(x_0) = G(t) - G(t_0).$$

Dies ist eine implizite Lösung des obigen Anfangswertproblem.

Zumindest auf formaler Ebene können wir unsere Lösung in der Form

$$x(t) = H^{-1}(H(x_0) + G(t) - G(t_0))$$

ausdrücken. Manchmal haben wir Glück und es ist möglich, diesen Ausdruck nach der gesuchten Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  aufzulösen — und dies ergibt dann eine explizite Lösung des Anfangswertproblem.

BEISPIEL (Eine andere Perspektive auf lineare skalare Differentialgleichungen).

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene stetige Funktion. Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Falls  $x_0 \neq 0$ , gibt es ein Intervall  $J \subseteq I$ , sodass  $x(t) \neq 0$  für  $t \in J$ . Daher dürfen wir auf der rechten Seite dividieren und erhalten

$$\frac{\dot{x}(s)}{x(s)} = a(s) \rightsquigarrow \int_{t_0}^t a(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{u} du = [\ln |u|]_{x_0}^{x(t)} = \ln \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} = \ln \frac{x(t)}{x(t_0)},$$

wobei wir den Absolutbetrag weggelassen haben, da die Terme  $x(t)$  und  $x(t_0)$  auf dem Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  aufgrund von Stetigkeit das gleiche Vorzeichen haben.

Exponentiation und Umstellen dieser Formel liefert natürlich das bereits erhaltene Resultat:

$$x(t) = x(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

BEISPIEL (Eine quadratische Nichtlinearität I).

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Für die gesuchte Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x^2), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung ist separierbar. Wir beobachten

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{1 + x^2(t)} = 1, & \rightsquigarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{1 + s^2} ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{1 + x^2(s)} ds = \int_0^t 1 ds = t, \\ & \rightsquigarrow [\arctan s]_{x_0}^{x(t)} = \arctan x(t) - \arctan x_0 = t, \rightsquigarrow \arctan x(t) = t + \arctan x_0. \end{aligned}$$

Die Lösung ist daher gegeben durch

$$x(t) = \tan(t + \arctan x_0).$$

Wir beobachten, dass die Lösung für jedes Anfangsdatum  $x_0 \in \mathbb{R}$  in endlicher Zeit  $T^* = T^*(x_0) > 0$  explodiert. Dabei gilt

$$T^* + \arctan x_0 = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow T^* = \frac{\pi}{2} - \arctan x_0.$$

Das Existenzintervall ist daher durch  $I = [0, T^*) = [0, \frac{\pi}{2} - \arctan x_0)$  gegeben.

BEISPIEL (Eine quadratische Nichtlinearität II).

Das Verhalten einer Lösung hängt möglicherweise stark von den Anfangsdaten ab. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Für eine gesuchte Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Für die Lösung dieses Anfangswertproblems betrachten wir zwei Fälle:  $x_0 = 0$  und  $x_0 \neq 0$ . Im Fall  $x_0 = 0$  ist die eindeutige Lösung des Problems durch  $x(t) = 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$  gegeben.

Für  $x_0 \neq 0$  benutzen wir Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1, & \rightsquigarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{s^2} ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)^2} ds = \int_0^t 1 ds = t \\ & \rightsquigarrow \left[ -\frac{1}{s} \right]_{x_0}^{x(t)} = t, \rightsquigarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t, \rightsquigarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}. \end{aligned}$$

Wir schliessen daher: Für  $x_0 > 0$  explodiert die Lösung bei  $T = \frac{1}{x_0}$  im Sinne, dass  $|x(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow T$ . Daher existiert die Lösung auf dem Intervall  $I = \left[0, \frac{1}{x_0}\right)$ . Für  $x_0 = 0$  ist die Lösung konstant, und daher existiert die Lösung auf  $[0, \infty)$ .

Für  $x_0 < 0$  beobachten wir

$$x(t) = \frac{-|x_0|}{1 + |x_0|t}.$$

Daher existiert die Lösung für alle  $t \in [0, \infty)$ , und es gilt  $x(t) < 0$  für alle  $t > 0$ , und  $x(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

BEISPIEL (Eine separierbare gewöhnliche Differentialgleichung mit impliziter Lösung).

Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $|x_0| \neq 1$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{t^2}{1 - x^2(t)}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Da  $|x_0| \neq 1$  können wir Variablen separieren. Dies ergibt

$$\dot{x}(s) (1 - x^2(s)) = s^2.$$

Integration von  $s = 0$  bis  $s = t$  liefert mit der Substitutionsregel für Integrale

$$\int_{x_0}^{x(t)} (1 - u^2) du = \int_0^t (1 - x^2(s)) ds = \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}t^3.$$

Auf der linken Seite erhalten wir nach Auswertung des Integrals den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x(t)} (1 - u^2) du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{x_0}^{x(t)} = x(t) - x_0 - \frac{1}{3}x(t)^3 + \frac{1}{3}x_0^3.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist daher implizit gegeben durch

$$x^3(t) - 3x(t) + t^3 + (3x_0 - x_0^3) = 0.$$

In diesem Fall kann man möglicherweise eine explizite Formel finden, indem man die Lösungsformel für kubische Gleichungen verwendet - das ist aber etwas verwickelt.

#### 4. Klassifikation von Differentialgleichungen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, and seien  $l, m, n \geq 1$  natürliche Zahlen.

DEFINITION 1.7 (Gewöhnliche Differentialgleichung).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion. Ein Ausdruck der Form

$$(10) \quad F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = 0$$

für eine gesuchte Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **gewöhnliche Differentialgleichung**. Eine Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **Lösung der Differentialgleichung** (10), falls wir für alle  $t \in I$  die Identität

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), u^{(3)}(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0$$

haben.

Im Allgemeinen lässt man zu, dass die Anzahl  $m \geq 1$  der gesuchten reellwertigen Funktion  $u_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ , (mit  $1 \leq i \leq m$ ) von der Anzahl  $l \geq 1$  der Gleichungen verschieden sein kann. In den meisten Anwendungen gilt jedoch  $m = l$ .

Oft schreibt man auch etwas salopp

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), u^{(3)}(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0$$

für die Differentialgleichung - insbesondere wenn man auf die Zeitabhängigkeit  $t \mapsto u(t)$  aufmerksam machen möchte.

Eine wichtige Teilklasse sind Differentialgleichungen, in denen die Gleichung nicht explizit von der Variable  $t \in I$  abhängt:

DEFINITION 1.8 (Autonome gewöhnliche Differentialgleichungen).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion, und sei

$$F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = 0$$

die dazugehörige Differentialgleichung. Wir nennen die Differentialgleichung **autonom**, falls eine Funktion  $G : (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$  existiert, sodass

$$F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = G(u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = 0.$$

Autonome Differentialgleichungen treten häufig in der Physik für die Beschreibung von Systemen, die invariant unter Zeittranslation sind, auf.

DEFINITION 1.9 (Ordnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion, und sei

$$F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung. Dann heißt  $n \in \mathbb{N}$  die **Ordnung der Differentialgleichung**.

Die Ordnung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der gewöhnlichen Differentialgleichung auftritt. In den meisten Anwendungen hat man es mit Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu tun. In Abschnitt 5 dieses Kapitels werden wir sehen, dass man Differentialgleichungen höherer Ordnung in reduzierter Standardform (siehe Definition 1.11 unten) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben kann.

Als Leitlinie gilt, dass eine höhere Ordnung der Differentialgleichung das Verstehen der Differentialgleichung schwieriger macht.

DEFINITION 1.10 (Skalare und Systeme von Differentialgleichungen).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion. Sei

$$F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \dots, u^{(n)}) = 0$$

die dazugehörige Differentialgleichung. Dann heißt die Differentialgleichung **skalare gewöhnliche Differentialgleichung**, falls  $m = 1$ ; und **System von gewöhnlichen Differentialgleichungen**, falls  $m > 1$ .

Als Faustregel gilt, dass Systeme von Differentialgleichungen schwieriger zu verstehen sind als skalare Differentialgleichungen.

In vielen Betrachtungen reduziert man die Diskussion auf Differentialgleichungen in welchen die höchste Ableitung isoliert ist.

DEFINITION 1.11 (Standardform und reduzierte Standardform für Differentialgleichungen).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Funktion und (10) die dazugehörige Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist in **Standardform**, falls eine matrixwertige Funktion  $A : I \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R}^m)$  und eine stetige Funktion  $f : I \times (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existieren, sodass

$$A(\cdot)u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}).$$

Die Differentialgleichung ist in **reduzierter Standardform**, falls

$$u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}).$$

Zum Beispiel ist eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für eine gesuchte Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$a(\cdot) x' = f(t, x),$$

wobei  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegebene stetige Funktionen sind.

Eine weiteres Beispiel ist eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in reduzierter Standardform. Dann haben wir für eine gesuchte Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Gleichung

$$x'' = f(t, x, x'),$$

wobei  $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene stetige Funktion ist.

Im Folgenden betrachten wir gewöhnliche Differentialgleichungen in Standardform und reduzierter Standardform.

DEFINITION 1.12 (Lineare Differentialgleichungen).

Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt **lineare gewöhnliche Differentialgleichung**, falls sie in der Form

$$(11) \quad \sum_{j=0}^n A_j \cdot u^{(j)} = g$$

geschrieben werden kann, wobei  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  die gesuchte Funktion ist,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine vektorwertige Funktion ist, und  $A_j : I \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  gegebene matrixwertige Funktionen sind.

PROPOSITION 1.13 (Gewichtetes Superpositionsprinzip).

Seien  $u_1, u_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lösungen einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (11), und seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ . Dann löst die Funktion  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert durch

$$w = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

ebenfalls die lineare gewöhnliche Differentialgleichung (11).

Insbesondere gilt dies für  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Diese Proposition sagt aus, dass der Lösungsraum

$$\mathcal{L} := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^m : u \text{ löst die Differentialgleichung (11)}\}$$

der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (11) ein affiner Raum ist.

BEWEIS.

Der Beweis ist eine direkte Rechnung. Seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , und  $u_1, u_2, w : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  wie in der Aussage. Dann gilt aufgrund der Linearität der Ableitung

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n A_j \cdot w^{(j)} &= \sum_{j=0}^n A_j \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \right)^{(j)} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{j=0}^n A_j \cdot (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^{(j)} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \lambda_1 \sum_{j=0}^n A_j \cdot u_1^{(j)} + \lambda_2 \sum_{j=0}^n A_j \cdot u_2^{(j)} \right) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 g + \lambda_2 g) = g. \end{aligned}$$

Somit löst die Funktion  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  die lineare Differentialgleichung (11). Dies beweist die Behauptung.  $\square$

DEFINITION 1.14 (Homogene lineare Differentialgleichungen).

Eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung (11) heißt **homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung**, falls

$$(12) \quad \sum_{j=0}^n A_j \cdot u^{(j)} = 0,$$

wobei  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  die gesuchte Funktion ist, und  $A_j : I \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  gegebene matrixwertige Funktionen sind.

Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen ein Superpositionsprinzip:

PROPOSITION 1.15 (Superpositionsprinzip für homogene lineare Differentialgleichungen).

Seien  $u_1, u_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung (12). Dann ist für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  die Funktion  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert durch

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung (12)

Insbesondere ist  $w = 0$  immer eine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung. Der Lösungsraum

$$\mathcal{L} := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^m : u \text{ löst die Differentialgleichung (12)}\}$$

einer linearen homogenen Differentialgleichung (12) ist daher ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

BEWEIS.

Der Beweis ist eine direkte Konsequenz des Beweises des gewichteten Superpositionsprinzips für lineare Differentialgleichungen, Proposition 1.13.  $\square$

Ein weiterer wichtiger Spezialfall von linearen Differentialgleichungen sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

DEFINITION 1.16 (Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten).

Eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung (11) hat **konstante Koeffizienten**, falls

$$\forall t \in I : \sum_{j=0}^n A_j \cdot u^{(j)}(t) = g(t)$$

gilt, wobei  $A_j \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  gegebene Matrizen, und  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  die gesuchte Funktion ist.

BEISPIEL (Freier Fall im homogenen Gravitationsfeld).

Die gewöhnliche Differentialgleichung für den freien Fall eines Massenpunkts (ohne Reibung) in einem homogenen Gravitationsfeld (i.e. nahe bei der Erdoberfläche) kann aus dem zweiten Newtonschen Axiom hergeleitet werden. Es gilt für eine gesuchte Funktion  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Gleichung

$$m\ddot{x} = -mg,$$

wobei  $m > 0$  die Masse des Massenpunktes und  $g > 0$  die Gravitationskonstante ist. Hier wird das Koordinatensystem so gewählt, dass die  $x$ -Achse nach oben zeigt.

Diese Differentialgleichung ist eine autonome skalare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Weiterhin hat die Gleichung konstante Koeffizienten, ist aber inhomogen. Weiterhin ist die Differentialgleichung in Standardform, und kann durch Division durch  $m > 0$  in reduzierte Standardform überführt werden.

BEISPIEL (Radioaktiver Zerfall).

Der radioaktive Zerfall einer Substanz wird durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = -kx,$$

beschrieben. Hier ist  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion, wobei  $x(t)$  die Masse an Substanz beschreibt, die zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  vorhanden ist (und daher gilt auch  $x(t) \geq 0$  für alle  $t \in [0, T]$ ). Die Konstante  $k > 0$  ist die Zerfallskonstante des radioaktiven Zerfalls.

Diese Differentialgleichung ist eine autonome skalare lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die weiterhin homogen ist, und konstante Koeffizienten hat. Die Differentialgleichung ist in reduzierter Standardform.

BEISPIEL (Harmonischer Oszillator).

Wir betrachten eine Masse  $m > 0$ , die an einer elastischen Feder mit Federkonstante  $k > 0$  befestigt ist. Das zweite Newtonsche Axiom ergibt, dass die Kinematik des Systemes (ohne Reibung) durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Dies ist eine autonome homogene lineare skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Gleichung ist in Standardform, und Division durch  $m > 0$  überführt die Gleichung in die reduzierte Standardform

$$(13) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

wobei wir die Oszillarkonstante  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  eingeführt haben. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind gegeben durch

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

für  $A, B \in \mathbb{R}$ . Das Anfangswertproblem mit Anfangswerten  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$  hat die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Der harmonische Oszillator (13) ist das fundamentale Beispiel in der Physik: die Gleichung tritt auf, wenn man eine Bewegung um ein lokales Minimum (mit nichtverschwindender zweiter Ableitung) eines Potentials in der quadratischen Näherung betrachtet.

BEISPIEL (Lotka–Volterra-Modell).

In den 1920er Jahren schlugen A.J. Lotka and V. Volterra ein Modell für die Populationsdynamik zweier interagierender Spezies — einer Beutespezies und einer Räuberspezies — vor. Die Funktion  $t \mapsto x_1(t)$  beschreibt die Population der Beute, und die Funktion  $t \mapsto x_2(t)$  beschreibt die Population der Räuber. Das Modell ist gegeben durch

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) := (\alpha - \beta x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) := (\gamma x_1 - \delta)x_2 \end{cases}$$

wobei  $(x_1, x_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  die gesuchte Funktion ist, und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  positive Konstanten sind. Die Konstanten  $\alpha$  und  $\delta$  beschreiben die Geburtsrate der Beute und die Toderate der Räuber in Abwesenheit von Interaktionen, während die Konstanten  $\beta$  und  $\gamma$  die Interaktion des Spezies beschreiben.

Diese Differentialgleichung ist ein autonomes nichtlineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Weiterhin ist die Gleichung in reduzierter Standardform.

BEISPIEL (Die Hamilton-Differentialgleichung für den Ricci-Fluss in drei Dimensionen).

Die Hamilton-Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion  $(x, y, z) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + yz, \\ \dot{y} = y^2 + xz, \\ \dot{z} = z^2 + xy. \end{cases}$$

Die Gleichung ist ein autonomes nichtlineares System erster Ordnung von Differentialgleichungen. Das System ist in reduzierter Standardform.

BEISPIEL (Bessel-Gleichung).

Sei  $\nu \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \nu > 0$  eine Parameter. Die Bessel-Gleichung mit Parameter  $\nu$  für die gesuchte Funktion  $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist eine lineare homogene skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber nicht autonom ist, und auch keine konstanten Koeffizienten hat. Die Gleichung ist in Standardform. Häufigt trifft man auch die Gleichung in reduzierter Standardform

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y(x) = 0.$$

an, die durch Division durch  $x > 0$  entsteht.

Die Bessel-Gleichung tritt in der Physik in vielen Problemen mit zylindrischer und sphärischer Symmetrie auf, z.B. bei der Berechnung der Eigenfrequenzen einer Membran.

Allgemeiner kann man diese Gleichung als Differentialgleichung mit meromorphen Koeffizienten für eine gesuchte Funktion  $y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auffassen — dies führt zu einer interessanten und reichhaltigen Theorie.



BEISPIEL (Der freie Fall mit newtonscher Reibung).

Für ein Koordinatensystem, in welchem die  $x$ -Achse nach unten zur Erdoberfläche orientiert ist, ergibt das zweite Newtonsche Axiom für den freien Fall mit newtonscher Reibung die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = g - \gamma(\dot{x})^2$$

wobei  $\gamma > 0$  der massennormalisierte Reibungskoeffizient ist.

Diese Differentialgleichung ist eine autonome skalare nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung, welche in reduzierter Standardform gegeben ist.

Durch den Variablenwechsel  $v = \dot{x}$  können wir die Gleichung auch als

$$\dot{v} = g - \gamma v^2$$

ausdrücken. Dies ist nun eine separierbare Differentialgleichung erster Ordnung.

BEISPIEL (Lorenz-Gleichung).

Die Lorenz-Gleichung für eine gesuchte Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -a(u_1 - u_2), \\ \dot{u}_2 = bu_1 - u_2 - u_1u_3, \\ \dot{u}_3 = u_1u_2 - u_3, \end{cases}$$

wobei  $a, b, c > 0$  positive Konstanten sind.

Diese Gleichung ist ein autonomes nichtlineares System erster Ordnung von Differentialgleichungen, welches in reduzierter Standardform ist.

Das System wurde von E.N. Lorenz im Jahr 1961 in die Literatur eingeführt. Diese gewöhnliche Differentialgleichung wurde durch Trunkation der Fouriermoden der Boussinesq-Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Die Gleichung zeigt Bifurkation und Chaos. Die Gleichung tritt oft im Kontext des *Schmetterlingseffekt* auf, unter anderem auch dadurch, dass die Visualisierung der Trajektorien zwei Schmetterlingsflügeln ähnelt.

In den meisten Anwendungen in der Mathematik und den Naturwissenschaften ist man an Lösungen der Differentialgleichung mit gewissen Anfangswerten interessiert.

DEFINITION 1.17 (Anfangswertproblem).

Sei  $F : I \times (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Funktion,  $t_0 \in I$ , und  $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ . Die gewöhnliche Differentialgleichung (10) zusammen mit den Hilfsbedingungen

$$u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$$

wird als **Anfangswertproblem** bezeichnet.

Man kürzt Anfangswertproblem in der Literatur auch ofte mit AWP ab; und man betrachtet oft nur  $t_0 = 0$  als Anfangszeit. Die Anzahl an Anfangsbedingungen ist so gewählt, dass man hoffen kann, dass das Anfangswertproblem (unter Regularitätsannahmen an die Differentialgleichung) eine eindeutige Lösung hat. Wir werden die später in Kapitel 3, Abschnitt 2 diskutieren.

Eine weitere Klasse von Hilfsbedingungen sind Randwerte für eine gewöhnliche Differentialgleichung. Diese treten vor allem auf, wenn die unabhängige Variable der Differentialgleichung eine Raumvariable ist. Wir betrachten hier skalare Gleichungen zweiter Ordnung.

DEFINITION 1.18 (Randwertproblem).

Sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung  $x'' = f(t, x, x')$ . Ein **Randwertproblem** ist die eine Differentialgleichung zusammen mit Nebenbedingungen

$$g_1(x(a), x'(a)) = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x(b), x'(b)) = 0,$$

wobei  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

In der Literatur wird manchmal Randwertproblem auch mit RWP abgekürzt.

Vier Beispiele für Randwerte sind gegeben durch

- **Dirichlet-Randwerte:**  $x(a) = A$  and  $x(b) = B$ ,
- **Neumann-Randwerte:**  $\dot{x}(a) = A$  and  $\dot{x}(b) = B$ ,
- **gemischte Dirichlet–Neumann-Randwerte:**  $x(a) = A$  and  $\dot{x}(b) = B$ ,
- **periodische Randbedingungen:**  $x(a) = x(b)$  and  $\dot{x}(a) = \dot{x}(b)$ ,

wobei  $A, B \in \mathbb{R}$  gilt. Falls  $A = B = 0$  spricht man auch von **homogenen Randbedingungen**.

Im Vergleich zum Anfangswertproblem sind Fragen zur Existenz und Eindeutigkeit (unter Regularitätsannahmen) an die Gleichung schwieriger zu beantworten: Es ist möglich, dass ein Randwertproblem keine, eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen zulässt.

Zum Beispiel hat das Dirichlet-Problem

$$\ddot{x} + x = 0, x(0) = x(\pi) = 0$$

unendlich viele Lösungen, während das Dirichlet-Randwertproblem

$$\ddot{x} + x = 0, x(0) = 0, x(\pi) = 1$$

keine Lösung hat.

## 5. Reduktion der Ordnung

Für eine einheitliche Behandlung der Theorie (und teilweise auch aus einer rechentechnischen Perspektive) ist es nützlich gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu überführen.

Wir illustrieren das Vorgehen mit drei Beispielen — einmal eine lineare skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung, einmal eine nichtlineare skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung, und einmal eine nichtautonome lineare skalare Differentialgleichung erster Ordnung.

BEISPIEL (Umschreiben des harmonischen Oszillators in ein System erster Ordnung).

Die gewöhnliche Differentialgleichung, die den harmonischen Oszillator beschreibt, ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

wobei  $\omega_0 > 0$  die Oszillationskonstante ist, und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion.

Wir schreiben diese skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Dafür definieren wir eine Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Komponenten  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  durch die Formel

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Zeitableitung:

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega_0^2 x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\omega_0^2 u_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t).$$

Daher haben wir die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung

$$\dot{u} = A \cdot u, \text{ where } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

für eine gesuchte Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  umgeschrieben.

BEISPIEL (Umschreiben des anharmonischen Oszillators in ein System erster Ordnung).

Die gewöhnliche Differentialgleichung, die den anharmonischen Oszillator beschreibt, ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0,$$

wobei  $\omega_0 > 0$  die Eigenfrequenz des linearen Oszillators,  $\lambda > 0$  die Anharmonizitätskonstante, und  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion ist.

Wir gehen wie im vorherigen Beispiel vor: Wir definieren  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Komponenten  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  durch die Formel

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Wie oben berechnen wir die Zeitableitung:

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega_0^2 x(t) - \lambda x(t)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\omega_0^2 u_1(t) - \lambda u_1(t)^3 \end{pmatrix}$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite nichtlinear in  $u$  ist, können wir die rechte Seite nicht weiter als Matrix-Vektor-Produkt umschreiben.

Damit haben wir den anharmonischen Oszillator in ein System erster Ordnung gegeben durch  $\dot{u} = F(u)$ , wobei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben ist durch

$$F(u) = F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 - \lambda u_1^3 \end{pmatrix}$$

umgeschrieben.

In ähnlicher Weise ist es auch möglich nichtautonome Differentialgleichungen für eine gesuchte Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  in eine autonome Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  umzuschreiben. Wir illustrieren dies anhand der Bessel-Differentialgleichung:

BEISPIEL (Umschreiben der Bessel-Differentialgleichung in eine autonome Gleichung).

Wir betrachten die Bessel-Differentialgleichung (mit  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \nu > 0$ ) für eine gesuchte Funktion  $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y(x) = 0.$$

Wir definieren eine Funktion  $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit Komponenten  $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$  durch

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Ableitung der Funktion  $x \mapsto u(x)$  und beobachten

$$u'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ -\frac{2}{x} y'(x) - \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ -\frac{2}{u_3(x)} u_2(x) - \frac{u_3(x)^2 - \nu^2}{u_3(x)^2} u_1(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die Bessel-Differentialgleichung als System erster Ordnung  $\dot{u} = F(u)$  für eine gesuchte Funktion  $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  umgeschrieben. Hier ist  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$F(u) = F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{2u_2}{u_3} - \frac{u_3^2 - \nu^2}{u_3^2} u_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



## Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

### 1. Das Matrixexponential

DEFINITION 2.1 (Operatornorm).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Die **Operatornorm** der Matrix  $A$  ist definiert durch den Ausdruck

$$\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} := \sup \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{C}^m \text{ mit } \|x\| \leq 1 \}.$$

Im folgenden Abschnitt schreiben wir auch oft  $\|\cdot\|$  anstelle von  $\|\cdot\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}$ , falls es aus dem Kontext klar ist, dass es sich um die Operatornorm handelt.

LEMMA 2.2.

Die Operatornorm  $\|\cdot\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} : \text{Mat}(m; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine Norm, da gilt

(1) *Positive Definitheit:*

$$\forall A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C}) : \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \geq 0 \text{ und } (\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} = 0 \Leftrightarrow A = 0).$$

(2) *Positive Homogenität:*

$$\forall A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} = |\lambda| \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}.$$

(3) *Dreiecksungleichung:*

$$\forall A, B \in \text{Mat}(m; \mathbb{C}) : \|A + B\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \leq \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} + \|B\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}.$$

BEWEIS.

Das Lemma ist eine direkte Konsequenz der Eigenschaften der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{C}^m$ . Wir geben einen detaillierten Beweis.

(1) Aufgrund der positiven Definitheit der euklidischen Norm gilt für alle  $x \in \mathbb{C}^m$  die Abschätzung  $\|Ax\| \geq 0$ . Damit ist 0 eine untere Schranke, und da das Supremum größer gleich jeder unteren Schranke ist, folgt  $\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \geq 0$ .

Nun zeigen wir, dass  $\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} = 0$  genau dann wenn  $A = 0$ .

( $\implies$ ): Falls  $\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} = 0$  gilt, so gilt  $\|Ax\| = 0$  für alle  $x \in \mathbb{C}^m$  mit  $\|x\| \leq 1$ . Daher gilt auch  $Ax = 0$  für alle  $x \in \mathbb{C}^m$  mit  $\|x\| \leq 1$ . Aufgrund der Linearität von  $A$  folgt  $Ax = 0$  für alle  $x \in \mathbb{C}^m$ . Damit ist aber  $A(\mathbb{C}^m) = \{0\}$ , und somit gilt  $A = 0_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}$ .

( $\impliedby$ ): Falls  $A = 0_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}$  gilt, so folgt  $Ax = 0$  und  $\|Ax\| = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Damit folgt nach Definition des Supremums  $\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} = 0$ .

(2) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{C}^m$  die Gleichheit

$$\|(\lambda A)x\| = \|\lambda(Ax)\| = |\lambda| \|Ax\|$$

aufgrund der positiven Homogenität der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &= \sup \{ \|\lambda Ax\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |\lambda| \cdot \|Ax\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= |\lambda| \cdot \sup \{ \|Ax\| : \|x\| \leq 1 \} = |\lambda| \cdot \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}, \end{aligned}$$

wobei wir die Eigenschaften des Supremums verwendet haben.

- (3) Wir beobachten mit der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm und mit Eigenschaften des Supremums

$$\begin{aligned}\|A + B\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} &= \sup\{\|(A + b)x\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Ax + Bx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|Bx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} + \|B\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Dies beweist die Dreiecksungleichung für die Operatornorm.

Damit haben wir gezeigt, dass die Operatornorm eine Norm ist.  $\square$

LEMMA 2.3 (Submultiplikativität der Operatornorm).

Seien  $A, B \in \text{Mat}(m;\mathbb{C})$ . Die Operatornorm ist **submultiplikativ**, i.e.

$$\|AB\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \leq \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \cdot \|B\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})}.$$

Inbesondere gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\|A^k\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \leq \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})}^k.$$

BEWEIS.

Wir bemerken zuerst, dass für alle  $x \in \mathbb{C}^m$  die Ungleichung  $\|Ax\| \leq \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \cdot \|x\|$  gilt. Falls  $x = 0$  ist, so ist die Ungleichung direkt. Falls  $x \neq 0$  gilt, setze  $y = \frac{x}{\|x\|}$  mit  $\|y\| = 1$ . Mit der positiven Homogenität der euklidischen Norm und der Definition der Operatornorm folgt dann

$$\|Ax\| = \|x\| \cdot \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|x\| \cdot \sup\{\|Ay\| : \|y\| \leq 1\} = \|x\| \cdot \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})}.$$

Um die submultiplikativ zu beweisen beobachten wir nun

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} &= \sup\{\|ABx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|A(Bx)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \|Bx\| : \|x\| \leq 1\} = \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \sup\{\|Bx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \|A\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})} \|B\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})},\end{aligned}$$

wobei wir die obige Ungleichung und Eigenschaften des Supremums benutzt haben.

Die zweite Aussage des Lemma folgt aus der ersten Aussage durch Induktion.  $\square$

Wir sind nun bereit die Definition des Matrixexponential zu erklären:

Wir definieren für  $N \in \mathbb{N}_0$  die Matrix  $B_N \in \text{Mat}(m;\mathbb{C})$  durch

$$B_N = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} A^j.$$

Dann gilt für  $M > N$  aufgrund der Dreiecksungleichung und der Submultiplikativität die Abschätzung

$$\|B_M - B_N\| = \left\| \sum_{j=N+1}^M \frac{1}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=N+1}^M \frac{1}{j!} \|A^j\| \leq \sum_{j=N+1}^M \frac{1}{j!} \|A\|^j.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$ . Aufgrund der Konvergenz der Konvergenzreihe existiert für jedes  $\|A\| \geq 0$  ein Index  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sum_{j=N+1}^M \frac{1}{j!} \|A\|^j < \epsilon$  für alle  $M > N \geq N_0$ . Daher ist  $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\text{Mat}(m;\mathbb{C})$ . Da  $(\text{Mat}(m;\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\text{Mat}(m;\mathbb{C})})$  ein normierter endlichdimensionaler Vektorraum ist (und damit automatisch vollständig ist), existiert der Grenzwert  $B = \lim_{N \rightarrow \infty} B_N \in \text{Mat}(m;\mathbb{C})$ . Für diesen Grenzwert schreiben wir  $\exp(A) := B$  in Analogie zur Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

DEFINITION 2.4 (Matrixexponential).

Sei  $A \in \text{Mat}(m;\mathbb{C})$ . Der Grenzwert  $\exp(A) \in \text{Mat}(m;\mathbb{C})$  definiert durch

$$\exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} A^j$$

heißt **Matrixexponential** der Matrix  $A$ .

LEMMA 2.5 (Matrixexponential für Diagonalmatrizen).

Sei  $D \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  eine Diagonalmatrix, i.e. es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ , sodass

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist das Matrixexponential  $\exp(D) \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  auch eine Diagonalmatrix, und es gilt die Formel

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

BEWEIS.

Sei  $k \geq 1$ . Dann gilt für die  $k$ -te Potenz  $D^k \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  die Formel

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

wie man durch Induktion einsieht. Mit der Konvention  $A^0 = \text{id}_m$ , der obigen Beobachtung, Linearität und Stetigkeit finden wir

$$\begin{aligned} \exp(D) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_2^j & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

KOROLLAR 2.6 (Matrixexponential für Nullmatrix).

Für die Nullmatrix  $0_m \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  (mit Einträgen  $(0_m)_{ij} = 0$  für alle  $1 \leq i, j \leq m$ ) erhalten wir das Matrixexponential  $\exp(0_m) = \text{id}_m$ , wobei  $\text{id}_m$  die Identitätsmatrix in  $\text{Mat}(m; \mathbb{C})$  bezeichnet (mit Einträgen  $(\text{id}_m)_{ij} = \delta_{ij}$  für  $1 \leq i, j \leq m$ ).

LEMMA 2.7 (Matrixpotenzen für ähnliche Matrizen).

Seien  $A, B \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ähnliche Matrizen, i.e. es existiert  $P \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  invertierbare Matrix, sodass  $A = PBP^{-1}$ . Dann gilt für alle  $k \geq 0$  die Relation

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

BEWEIS.

Wir verwenden Induktion über  $k \geq 0$ . Für  $k = 0$  haben wir  $A^0 = \text{id}_m = P \text{id}_m P^{-1} = PB^0P^{-1}$ , und für  $k = 1$  gilt die Aussage aufgrund der Voraussetzung. Für den Induktionsschritt  $k \mapsto k + 1$  beobachten wir

$$A^{k+1} = A^k A = (PB^kP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^{k+1}P^{-1}.$$

Dies beweist die Behauptung. □

PROPOSITION 2.8 (Matrixexponential für ähnliche Matrizen).

Seien  $A, B \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ähnliche Matrizen, i.e. es existiert  $P \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  invertierbare Matrix, sodass  $A = PBP^{-1}$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Relation

$$\exp(tA) = P \exp(tB) P^{-1}.$$

BEWEIS.

Aufgrund von Lemma 2.7 für die Matrixpotenzen ähnlicher Matrizen und der Stetigkeit von Matrixmultiplikation bezüglich der Operatornorm beobachten wir

$$\exp(tA) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} P B^j P^{-1} = P \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} B^j \right) P^{-1} = P \exp(tB) P^{-1}.$$

Dies beendet den Beweis. □

PROPOSITION 2.9 (Kommutierende Matrizen und das Matrixexponential).

Seien  $A, B \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  zwei kommutierende Matrizen, i.e.  $AB = BA$ . Dann gilt die Formel

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

BEWEIS.

Da die Matrizen  $A, B \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  kommutieren, gilt wie in den reellen Zahlen die binomische Formel

$$(A + B)^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} A^l B^{j-l}.$$

Mit der Identität  $\binom{j}{l} = \frac{j!}{l!(j-l)!}$  schliessen wir insbesondere

$$\frac{1}{j!} (A + B)^j = \sum_{l=0}^j \frac{1}{l!(j-l)!} A^l B^{j-l}.$$

Summation dieser Formel ergibt

$$\sum_{j=0}^{2N} \frac{1}{j!} (A + B)^j = \sum_{j=0}^{2N} \sum_{l=0}^j \frac{1}{l!(j-l)!} A^l B^{j-l} = \sum_{j,k \geq 0, 0 \leq j+k \leq 2N} \frac{1}{j!k!} A^j B^k.$$

Andererseits erhalten wir durch Matrixmultiplikation

$$\left( \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^p \right) \left( \sum_{q=0}^N \frac{1}{q!} B^q \right) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \frac{1}{p!q!} A^p B^q = \sum_{j,k \geq 0, 0 \leq \max\{j,k\} \leq N} \frac{1}{j!k!} A^j B^k.$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2N} \frac{1}{j!} (A + B)^j - \left( \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^p \right) \left( \sum_{q=0}^N \frac{1}{q!} B^q \right) \\ &= \sum_{j,k \geq 0, 0 \leq k+j \leq 2N, \max\{j,k\} > N} \frac{1}{j!k!} A^j B^k \end{aligned}$$

Die Norm dieses Ausdruckes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^{2N} \frac{1}{j!} (A + B)^j - \left( \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^p \right) \left( \sum_{q=0}^N \frac{1}{q!} B^q \right) \right\| \\ & \leq \left( \sum_{j=N+1}^{2N} \frac{1}{j!} A^j \right) \left( \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k!} B^k \right) + \left( \sum_{j=0}^{2N} \frac{1}{j!} A^j \right) \left( \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k!} B^k \right). \end{aligned}$$



Wir haben

$$\sum_{j=N+1}^{2N} \frac{1}{j!} \|A\|^j, \quad \sum_{j=N+1}^{2N} \frac{1}{j!} \|B\|^j \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

aufgrund der absoluten Konvergenz der Matrix-Exponentialreihe. Daher geht auch die obere Differenz für  $N \rightarrow \infty$  gegen Null, und die Aussage folgt.  $\square$

KOROLLAR 2.10.

Für jede Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ist das Matrixexponential  $\exp(A)$  invertierbar (i.e.  $\exp(A) \in \text{GL}(m; \mathbb{C})$ ) und für die Inverse gilt die Formel  $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$ .

BEWEIS.

Wir beobachten, dass die Matrizen  $-A$  und  $A$  kommutieren. Daher gilt nach Proposition 2.9 über kommutierende Matrizen die Formel

$$\exp(-A) \exp(A) = \exp(-A + A) = \exp(0_m) = \text{id}_m.$$

Daher ist  $\exp(A) \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  invertierbar, und es gilt  $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$ .  $\square$

KOROLLAR 2.11.

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann gilt für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  die Identität

$$\exp((t + s)A) = \exp(tA) \exp(sA) = \exp(sA) \exp(tA).$$

BEWEIS.

Da die Matrizen  $tA, sA \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  kommutieren, folgt die Aussage direkt aus Proposition 2.9 über das Matrixexponential für kommutierende Matrizen.  $\square$

LEMMA 2.12.

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\exp(A)\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &\leq \exp(\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}), \\ \|\exp(A) - \text{id} - A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &\leq \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^2 \exp(\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

BEWEIS.

Aufgrund der Stetigkeit der Operatornorm erhalten wir mit der Dreiecksungleichung und der Submultiplikativität der Operatornorm die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\exp(A)\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} A^j \right\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \|A^j\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^j = \exp(\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Abschätzung.

Für die zweite Abschätzung verschiebt man zusätzlich noch den Summationsindex und faktorisiert einen quadratischen Term aus:

$$\begin{aligned} \|\exp(A) - \text{id}_n - A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \\ &\leq \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-2)!} \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^{j-2} \leq \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^2 \exp(\|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis der Proposition.  $\square$

LEMMA 2.13 (Euler-Formel für das Matrixexponential).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann haben wir

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \text{id} + \frac{A}{n} \right)^n.$$

BEWEIS.

Wir zeigen, dass der Fehlerterm für  $m \rightarrow 0$  gegen null geht:

$$\begin{aligned} \exp(A) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^N &= \left[ \exp \left( \frac{A}{N} \right) \right]^N - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^N \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \left[ \exp \left( \frac{A}{N} \right) \right]^{N-l-1} \left[ \exp \left( \frac{A}{N} \right) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right) \right] \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^l, \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Umformung Proposition 2.9 und in der letzten Umformung eine Teleskopsumme verwendet haben.

Mit den Abschätzungen aus Lemma 2.12 gilt nun für den ersten Term

$$\left\| \exp \left( \frac{A}{N} \right) \right\| \leq \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right)$$

und für den zweiten Term

$$\left\| \exp \left( \frac{A}{N} \right) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right) \right\| \leq \frac{1}{N^2} \|A\|^2 \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right).$$

Weiterhin gilt nach der Dreiecksungleichung, und nach der Abschätzung  $1 + x \leq \exp(x)$  für  $x \geq 0$  für die Exponentialfunktion

$$\left\| \text{id} + \frac{A}{N} \right\| = 1 + \frac{1}{N} \|A\| \leq \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right).$$

Damit können wir in der obigen Formel für alle  $0 \leq l \leq N - 1$  mittels der Submultiplikativität die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left\| \left[ \exp \left( \frac{A}{N} \right) \right]^{N-l-1} \left[ \exp \left( \frac{A}{N} \right) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right) \right] \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^l \right\| \\ &\leq \left\| \exp \left( \frac{A}{N} \right) \right\|^{N-l-1} \cdot \left\| \exp \left( \frac{A}{N} \right) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right) \right\| \cdot \left\| \text{id} + \frac{A}{N} \right\|^l \\ &\leq \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right)^{N-l-1} \cdot \frac{1}{N^2} \|A\|^2 \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right) \cdot \exp \left( \frac{1}{N} \|A\| \right)^l \\ &= \frac{1}{N^2} \|A\|^2 \exp(\|A\|) \end{aligned}$$

erhalten.

Wendet man diese Abschätzung uniform für  $0 \leq l \leq N - 1$  an, i.e. für  $N$  Terme, so erhält man

$$\left\| \exp(A) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^N \right\| \leq N \cdot \frac{1}{N^2} \|A\|^2 \exp(\|A\|) \leq \frac{1}{N} \|A\|^2 \exp(\|A\|).$$

Sei nun  $\epsilon > 0$ . Wähle  $N_0 \in \mathbb{N}$  mittels  $N_0 > \frac{\|A\|^2 \exp(\|A\|)}{\epsilon}$ . Dann gilt für alle  $N \geq N_0$  die Abschätzung

$$\left\| \exp(A) - \left( \text{id} + \frac{A}{N} \right)^N \right\| < \epsilon.$$

Somit haben wir die Aussage gezeigt. □

PROPOSITION 2.14 (Ableitung des Matrixexponentials).

Die Funktion  $t \mapsto \exp(tA)$  ist für all  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Weiterhin gilt für die Ableitung die Formel

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

BEWEIS.

Wir berechnen zuerst den Grenzwert  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tA)$ . Mit Lemma 2.12 beobachteten wir für den Differenzenquotienten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} [\exp(hA) - \text{id}_n] - A \right\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} &\leq \frac{1}{|h|} \|\exp(hA) - \text{id}_n - hA\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})} \\ &\leq |h| \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^2 \exp(|h| \|A\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}). \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Abschätzung existiert der Grenzwert  $h \rightarrow 0$  und wir schliessen  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tA) = A$ . Für den allgemeinen Fall berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(tA) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\exp((t+h)A) - \exp(tA)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\exp(hA) - \text{id}_n] \exp(tA) \\ &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\exp(hA) - \text{id}_n] \right] \exp(tA) = A \exp(tA). \end{aligned}$$

Dies ergibt die Behauptung. □

## 2. Systeme erster Ordnung

THEOREM 2.15 (Lösung des Anfangswertproblems für lineare Systeme).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , und  $x_0 \in \mathbb{C}^m$ . Dann hat das Anfangswertproblem bestehend aus der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$  und dem Anfangswert  $u(t_0) = u_0$  eine eindeutige Lösung  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$  gegeben durch  $u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0$ .

Falls  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , so erhalten wir eine Lösung  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  vermöge der gleichen Formel.

BEWEIS.

Wir behandeln den reellwertigen Fall für  $t_0 = 0$ . Der komplexe Fall und der allgemeine Fall  $t_0 \neq 0$  sind analog.

### Eindeutigkeit:

Sei  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung mit  $x(0) = x_0$ . Wir definieren die Hilfsfunktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $v(t) = \exp(-tA)u(t)$ . Proposition 2.14, die Produktregel und die Differentialgleichung ergeben

$$\dot{v}(t) = \exp(-tA)\dot{u}(t) - A \exp(-tA)u(t) = \exp(-tA)(\dot{u}(t) - Au(t)) = 0.$$

Daher ist die Funktion  $t \mapsto v(t)$  aufgrund des Mittelwertsatzes konstant mit  $v(t) = v(0) = u(0) = u_0$ . Wir schliessen  $u(t) = \exp(tA)u_0$ , und damit die Eindeutigkeit der Lösung.

### Existenz:

Andererseits rechnen mit wir für  $u(t) = \exp(tA)u_0$  mit Proposition 2.14 direkt nach, dass

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} (\exp(tA)u_0) = A \exp(tA)u_0 = Au(t),$$

und  $u(0) = \exp(0A)u_0 = \exp(0_m)u_0 = \text{id}_m u_0 = u_0$ . Daher löst  $t \mapsto u(t) = \exp(tA)u_0$  das Anfangswertproblem. □

BEISPIEL (Harmonischer Oszillator).

Das Anfangswertproblem für eine gesuchte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Oszillatorfrequenz  $\omega_0 > 0$  ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit } x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \text{ und } \dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}.$$

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass das Anfangswertproblem in die Form

$$\dot{u} = Au \quad \text{mit } u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

für eine gesuchte Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  umgeschrieben werden kann. Nach Theorem 2.15 ist die Lösung gegeben durch  $u(t) = \exp(tA)u_0$ . Wir berechnen das Matrixexponential  $t \mapsto \exp(tA)$ .

Für die Berechnung des Matrixexponentials diagonalisieren wir die Matrix  $A \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$  über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2.$$

Die Nullstellen dieses Polynomes sind

$$\lambda_1 = i\omega_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega_0.$$

Damit haben die Eigenwerte algebraische Vielfachheit eins, und die Matrix  $A \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$  ist über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. Wir berechnen die Eigenräume:

Zuerst für den Eigenwert  $\lambda_1 = +i\omega_0$ . Dann gilt

$$A - \lambda_1 \text{id} = A - i\omega_0 \text{id} = \begin{pmatrix} -i\omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -i\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen die lineare Gleichung  $(A - \lambda_1 \text{id})v = 0$ :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 \text{id})v = 0 &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i\omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 & i\omega_0 \\ -\omega_0^2 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 & i\omega_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich der Eigenraum

$$E(\lambda_1 = +i\omega_0) = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid v_2 = i\omega_0 v_1\} = \left\{ v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wir berechnen den zweiten Eigenraum für  $\lambda_2 = -i\omega_0$  auf analoge Weise. Dies ergibt

$$E(\lambda_2 = -i\omega_0) = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid v_2 = -i\omega_0 v_1\} = \left\{ v = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Damit ist in der Diagonalisierung  $A = PDP^{-1}$  die Diagonalmatrix  $D \in \text{Mat}(2; \mathbb{C})$  gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} +i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix},$$

die Transformationsmatrix  $P \in \text{Mat}(2; \mathbb{C})$  ist gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix},$$

und die Inverse  $P^{-1} \in \text{Mat}(2; \mathbb{C})$  der Transformationsmatrix ist gegeben durch

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -i\omega_0 & 1 \\ -i\omega_0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\omega_0} \begin{pmatrix} i\omega_0 & 1 \\ i\omega_0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(tA)u_0 = P \exp(tD)P^{-1}u_0 = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(i\omega_0 t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\omega_0 t) \end{pmatrix} \frac{1}{2i\omega_0} \begin{pmatrix} i\omega_0 & 1 \\ i\omega_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i\omega_0} \begin{pmatrix} \exp(i\omega_0 t) & \exp(-i\omega_0 t) \\ i\omega_0 \exp(i\omega_0 t) & -i\omega_0 \exp(i\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega_0 x_0 + v_0 \\ i\omega_0 x_0 - v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In der vorherigen algebraischen Rechnung haben wir die Euler-Identitäten

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \quad \text{und} \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t))$$

verwendet. Die erste Komponente  $t \mapsto u_1(t)$  der Abbildung ergibt die Formel für die Verschiebung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

während die zweite Komponente  $t \mapsto u_2(t)$  der Abbildung die Formel für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t).$$

ergibt.

In den Übungen werden wir den Einfluss eines Reibungstermes auf die obige Differentialgleichung untersuchen.

**DEFINITION 2.16** (Fundamentallösung für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten).

Die matrixwertige Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  gegeben durch  $\Phi(t) = \exp(tA)$ , welche  $\Phi(0) = \text{id}$  und  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$  erfüllt, heißt **Fundamentallösung** der Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$ .

**BEISPIEL** (Fundamentallösung für harmonischen Oszillator).

Die Fundamentallösung zur Gleichung  $\Phi' = A\Phi$  für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nach obiger Rechnung gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$

**THEOREM 2.17** (Lösungsraum eines homogenen linearen Systemes mit konstanten Koeffizienten).

Wir betrachten für  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{K})$  und  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^m$  die Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$ .

- (1) Im reellwertigen Fall (i.e.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) gilt, dass der Lösungsraum

$$\mathcal{L} = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) : \dot{u} = Au\}$$

ein  $m$ -dimensionaler reeller Vektorraum ist.

- (2) Im komplexwertigen Fall (i.e.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) gilt, dass der Lösungsraum

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) : \dot{u} = Au\}$$

ein  $m$ -dimensionaler komplexer Vektorraum ist.

**BEWEIS.**

Wir behandeln den reellen Fall. Sei  $u \in \mathcal{L}$ , i.e.  $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$  ist eine Lösung der Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$ . Setzen wir  $u_0 := u(0) \in \mathbb{R}^m$ , so löst  $u$  das Anfangswertproblem  $\dot{u} = Au$  mit  $u(0) = u_0$ . Nach der Eindeutigkeitsaussage von Theorem 2.15 gilt  $u(t) = \Phi(t)u_0$ .

Wir definieren nun die lineare Abbildung  $\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$  durch die Formel

$$\eta(u_0) = \Phi(t)u_0.$$

Mit obiger Beobachtung gilt  $\eta(\mathbb{R}^m) = \mathcal{L}$ . Da  $\eta(u_0) = 0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  zuerst  $\eta(u_0)(0) = 0 \in \mathbb{R}$  und aufgrund von  $\Phi(0) = \text{id}$  auch  $u_0 = 0 \in \mathbb{R}^m$  impliziert, folgt, dass  $\eta$  injektiv ist. Der Rangsatz impliziert  $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^m = m$ . Dies beweist die Aussage für den reellen Fall.

Der Beweis für den komplexen Fall ist analog. □

### 3. Inhomogene Systeme erster Ordnung

Den Fall inhomogener Systeme mit konstanten Koeffizienten können wir wie zuvor mittels der Fundamentallösung  $\Phi(t) = \exp(tA)$  auf eine elementar integrierbare Differentialgleichung reduzieren.

**THEOREM 2.18** (Lösung des Anfangswertproblems für inhomogene lineare Systeme).

Sei  $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{C})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in \mathbb{C}^m$  und  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $t_0 \in I$ . Weiterhin sei  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine stetige Funktion. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + b \text{ auf } I, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung  $u : I \rightarrow \mathbb{C}^m$  gegeben durch

$$u(t) = \exp(tA) \left( u_0 + \int_0^t \exp(-sA) b(s) ds \right) = \exp(tA) u_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) b(s) ds.$$

Falls  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so erhalten wir auf analoge Weise durch die obige Formel eine eindeutige Lösung  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**BEWEIS.**

Dies funktioniert analog im eindimensionalen Fall, vergleiche Proposition 1.4. □

**BEISPIEL** (Harmonischer Oszillator mit äußerer Anregung).

Wir betrachten für die gesuchte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \dot{x}(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

wobei  $m > 0$  die Masse und  $\omega_0 > 0$  die Eigenfrequenz des Oszillators ist. Die Funktion  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  beschreibt die äußere Kraft, die auf den Oszillator einwirkt. Wir können diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung für eine gesuchte Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  umschreiben. Dies ergibt

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \text{ mit } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} f(t) \end{pmatrix}.$$

Mit Theorem 2.18 und den Beobachtungen für das homogene Problem erhalten wir für die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega_0(t-s)) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-s)) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0(t-s)) & \cos(\omega_0(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(\omega_0(t-s)) f(s) \\ \omega_0 \cos(\omega_0(t-s)) f(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir für die erste Komponenten  $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die zur Position  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  korrespondiert, den Ausdruck

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-s)) f(s) ds,$$

welchen wir in einen homogenen Anteil  $x_p$  und partikulären Anteil  $x_p$  mittels

$$x_h(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \text{ und } x_p(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-s)) f(s) ds$$

aufspalten können.

In der Folge werden wir den partikulären Anteil der Lösung für eine Wahl von  $t \mapsto f(t)$  genauer untersuchen. Sei dazu  $\Omega > 0$ ,  $F_0 > 0$  und  $f(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ . Dann gilt

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m_0 \omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-s)) \cos(\Omega s) ds.$$

Wir werden das Integral in den Fällen  $\Omega \neq \omega_0$  und  $\Omega = \omega_0$  auswerten. Wir verwenden das Additionstheorem

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Für  $\Omega \neq \omega_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \int_0^t (\sin(\omega_0 t - (\omega_0 - \Omega)s) + \sin(\omega_0 t - s(\omega_0 - \Omega))) ds \\ &= \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \left[ \frac{1}{\omega_0 + \Omega} \cos(\omega_0 t - s(\omega_0 + \Omega)) + \frac{1}{\omega_0 - \Omega} \cos(\omega_0 t - s(\omega_0 - \Omega)) \right]_0^t \\ &= \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \left[ \frac{1}{\omega_0 + \Omega} + \frac{1}{\omega_0 - \Omega} \right] [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{F_0}{m_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Für die Amplitude dieser Schwingung gilt  $\max_{t \in [0, \infty)} |x_p(t)| \sim \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \Omega^2|}$ . Insbesondere wird die Amplitude für  $|\omega_0 - \Omega| \ll 1$  sehr groß.

Für  $\Omega = \omega_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \int_0^t (\sin(\omega_0(t-2s)) + \sin(\omega_0 t)) ds = \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \left[ \frac{1}{2\omega_0} \cos(\omega_0(t-2s)) + \sin(\omega_0 t)s \right]_0^t \\ &= \frac{F_0}{2m_0\omega_0} \left[ \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + t \sin(\omega_0 t) \right]. \end{aligned}$$

Insbesondere wird die Amplitude dieser Oszillation für  $t \rightarrow \infty$  immer größer. Dies wird als **Resonanzkatastrophe** bezeichnet. Typischerweise ist in solchen Situationen die harmonische Näherung nicht mehr anwendbar, und häufig führt dies auch zur Zerstörung des Systemes. Man bezeichnet daher auch  $\Omega = \omega_0$  als **Resonanzfrequenz** des Systemes.

In den Übungen werden wir den Einfluss eines Reibungstermes auf die obige Differentialgleichung und die Resonanzfrequenz untersuchen.

#### 4. Homogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten von höherer Ordnung

Wir betrachten die Differentialgleichung  $m$ -ter Ordnung

$$(14) \quad x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + a_0x = 0$$

für eine gesuchte Funktion  $x \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  und gegebene Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ , wobei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Diese Gleichung können wir äquivalent als System erster Ordnung  $\dot{u} = Au$  formulieren, wobei  $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^m)$  und  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  gegeben sind durch

$$u = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{K})$  wird auch als **Begleitmatrix** (engl. **companion matrix**) der Differentialgleichung (14) bezeichnet.

Die Lösungstheorie für lineare System suggeriert nun, dass sich die Lösungen der Differentialgleichung (14) als Linearkombinationen von Termen der Form  $\exp(\lambda_i t)$  und  $t^k \exp(\lambda_i t)$  darstellen lassen, wobei  $\lambda_j$  die Eigenwerte der Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  sind, und  $1 \leq k \leq \nu_j - 1$  gilt.

Der **Exponentialansatz**  $x(t) = \exp(\lambda t)$  führt auf das Polynom  $\lambda \mapsto \tilde{p}(\lambda)$  gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0,$$

welches gerade (bis auf den Vorfaktor  $(-1)^m$ ) das charakteristische Polynom  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id})$  der Begleitmatrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ist.

Die Struktur des Lösungsraumes des linearen Systems  $\dot{u} = Au$  (cf. Theorem 2.17) überträgt sich:

**THEOREM 2.19** (Lösungsraum für lineare Gleichungen höherer Ordnung).

*Wir betrachten für  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$  und  $x \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  die Differentialgleichung (14).*

(1) *Im reellwertigen Fall (i.e.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ist der Lösungsraum*

$$\mathcal{L}^m = \left\{ x \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + a_0x = 0 \right\}$$

*ein  $m$ -dimensionaler reeller Vektorraum.*

(2) *Im komplexwertigen Fall (i.e.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) ist der Lösungsraum*

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^m = \left\{ x \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + a_0x = 0 \right\}$$

*ein  $m$ -dimensionaler komplexer Vektorraum.*

**BEWEIS.**

Sei  $\mathcal{L}$  der Lösungsraum des zugehörigen linearen Systemes  $\dot{u} = Au$ . Dann ist die Abbildung  $\Theta : \mathcal{L}^m \rightarrow \mathcal{L}$  gegeben durch

$$\Theta(x) = (x, \dot{x}, \dots, x^{m-1})^t$$

linear und bijektiv. Daher folgt die Aussage für den reellen Fall.

Das Argument für den komplexen Fall ist analog. □

Es ist möglich eine Basis des Lösungsraumes  $\mathcal{L}^m$  explizit anzugeben.

**THEOREM 2.20** (Basis für komplexen Lösungsraum).

*Sei  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (14) mit Faktorisierung*

$$p(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

*mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  und Vielfachheiten  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$ , sodass  $\nu_1 + \cdots + \nu_k = m$ . Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (14) als Linearkombination der  $m$  Funktionen*

$$f_{jl}(t) = t^l \exp(\lambda_j t) \quad \text{mit } 1 \leq j \leq k \text{ und } 0 \leq l \leq \nu_j - 1$$

*darstellbar. Insbesondere bilden diese Funktionen eine Basis des komplexen Lösungsraumes  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^m$  der Differentialgleichung (14).*

**BEWEIS.**

Der Beweis besteht aus drei Schritten: Zuerst zeigen wir, dass die obigen Funktionen die Differentialgleichung lösen, dann dass die Funktionen linear unabhängig sind, und abschliessend, dass sie eine Basis des Lösungsraumes bilden.

**Schritt 1:  $f_{jl}$  sind Lösungen**

Wir fassen die Ableitung  $D = \frac{d}{dt}$  als lineare Abbildung  $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  auf, und  $D^0 = \text{id} :$



$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist die Identitätsabbildung. Damit lässt sich die Differentialgleichung (14) in der Form

$$0 = x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + a_0x = p(D)x, \text{ wobei } p(D) = (-1)^m \prod_{j=1}^k (D - \lambda_j \text{id})^{\nu_j}$$

ausdrücken. Für  $q \in C^1(\mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt nach der Produktregel

$$(D - \lambda \text{id})(q(t) \exp(\lambda t)) = (q'(t) \exp(\lambda t) + \lambda q(t) \exp(\lambda t) - \lambda q(t) \exp(\lambda t)) = q'(t) \exp(\lambda t).$$

Für  $q \in C^l(\mathbb{R})$  folgt nach Iteration

$$(D - \lambda \text{id})^l(q(t) \exp(\lambda t)) = q^{(l)}(t) \exp(\lambda t).$$

Für  $1 \leq j \leq k$  und  $0 \leq r \leq \nu_j - 1$  folgt somit

$$(D - \lambda \text{id})^{\nu_j}(t^r \exp(\lambda_j t)) = (t^r)^{(\nu_j)} \exp(\lambda_j t) = 0.$$

Für  $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt

$$(D - \lambda \text{id})(D - \mu \text{id})x = x'' - \lambda x' - \mu x' + \lambda \mu x = (D - \mu \text{id})(D - \lambda \text{id})x.$$

Daher können wir die Reihenfolge der Ableitungen im Ausdruck  $D \mapsto p(D)$  vertauschen. Für die Funktionen  $f_{il} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  beobachten wir daher

$$p(D)f_{il}(t) = \prod_{j=1, j \neq i}^k (D - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} (D - \lambda_i \text{id})^{\nu_i} f_{il}(t) = 0,$$

i.e. die Funktionen  $(f_{il})_{1 \leq i \leq k, 0 \leq l \leq \nu_i - 1}$  lösen die Differentialgleichung (14).

**Schritt 2: Funktionen  $f_{jl}$  sind linear unabhängig**

Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen es existieren Koeffizienten  $b_{jl} \in \mathbb{C}$  mit  $1 \leq j \leq k$  und  $0 \leq l \leq \nu_j - 1$ , sodass

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} b_{jl} f_{jl}(t) = 0,$$

wobei  $b_{j_0 l_0} \neq 0$  für einen Index  $1 \leq j_0 \leq k$  und  $0 \leq l_0 \leq \nu_{j_0} - 1$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $l_0 = \max\{0 \leq l \leq \nu_{j_0 - 1} : b_{j_0 l} \neq 0\}$  annehmen. Die Rechnungen aus Schritt 1 ergeben

$$\prod_{j \neq j_0} (D - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} \sum_{j \neq j_0} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} b_{il} f_{il} = 0, \quad (D - \lambda_{j_0} \text{id})^l \sum_{l < l_0} f_{j_0 l} = 0, \quad (D - \lambda_{j_0} \text{id})^{l_0} f_{j_0 l_0} = l_0! \exp(\lambda_{j_0} t).$$

Summation und die Annahme  $\sum_{jl} b_{jl} f_{jl} = 0$  ergibt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{j \neq j_0} (D - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} (D - \lambda_{j_0} \text{id})^{k_0} \left( \sum_{jl} b_{jl} f_{jl} \right) \\ &= \prod_{j \neq j_0} (D - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} (l_0! \exp(\lambda_{j_0} t) b_{j_0 l_0}) = l_0! b_{j_0 l_0} \prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)^{\nu_j}, \end{aligned}$$

also  $b_{i_0 l_0} = 0$ . Dies ist ein Widerspruch.

**Schritt 3: Funktionen  $f_{jl}$  erzeugen den Lösungsraum**

Nach Konstruktion gilt  $\sum_{j=1}^k \nu_j = m$ . Daher bilden erzeugen die linear unabhängigen Funktionen  $(f_{jl})_{1 \leq j \leq k, 0 \leq l \leq \nu_j}$  einen  $m$ -dimensionalen Vektorraum. Die Aussage folgt nun, da nach Theorem 2.19 der Lösungsraum  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^m$  der Differentialgleichung (14) Dimension  $m$  hat.  $\square$

**BEMERKUNG 2.21.**

*Alternativ kann man die obige Aussage auch durch Verwenden der jordanischen Normalform für die Begleitmatrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  verwenden. Dazu muss man zeigen, dass die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte  $\text{geo}(\lambda_j) = 1$  erfüllt, i.e. zu jedem Eigenwert gehört ein Jordanblock  $J_{\lambda_j} \in \text{Mat}(\nu_j, \mathbb{C})$ .*

BEISPIEL (Noch einmal der harmonische Oszillator).

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

für  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\omega_0 > 0$ . Der Exponentialansatz ergibt das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$  mit Nullstellen  $\lambda_1 = i\omega_0$  und  $\lambda_2 = -i\omega_0$  der Vielfachheit eins. Somit ist eine Basis des Lösungsraumes  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$  gegeben durch  $\exp(i\omega_0 t), \exp(-i\omega_0 t)$ . Da die Koeffizienten der Differentialgleichung reell sind, erhalten wir eine Basis  $\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)$  des reellen Lösungsraumes  $\mathcal{L}^2$ .

Die allgemeine Lösung  $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

für  $A, B \in \mathbb{R}$ . Betrachten wir die Anfangswerte  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\dot{x}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$ , so ergibt sich

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

BEISPIEL (Noch einmal der harmonische Oszillator mit Dämpfung).

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

für eine gesuchte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Konstanten  $\omega_0, \beta > 0$ . Durch den Exponentialansatz erhalten wir das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2$ .

Wir unterscheiden drei Fälle: 1) schwache (oder subkritische Dämpfung) Dämpfung  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ , 2) kritische Dämpfung  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ , und 3) superkritische Dämpfung  $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ .

*Schwach (subkritische) Dämpfung:* In diesem Fall hat das charakteristische Polynom zwei komplex konjugierte Nullstellen  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\omega$ , wobei  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Nach Theorem 2.20 ist

$$\exp(-\beta t) \exp(i\omega t), \exp(-\beta t) \exp(-i\omega t)$$

eine Basis des komplexen Lösungsraumes  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$ . Dies liefert mit  $\exp(-\beta t) \cos(\omega t), \exp(-\beta t) \sin(\omega t)$  eine Basis des reellen Lösungsraumes. Für  $A, B \in \mathbb{R}$  ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$x(t) = \exp(-\beta t)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)].$$

*Kritische Dämpfung:* In diesem Fall hat das charakteristische Polynom eine doppelte reelle Nullstelle  $\lambda = -\beta$ . Eine Basis des komplexen Lösungsraumes  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$  ist nach Theorem 2.20 gegeben durch  $\exp(-\beta t), t \exp(-\beta t)$ . Dies ist bereits eine Basis des reellen Lösungsraumes  $\mathcal{L}^2$  und allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist für  $A, B \in \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x(t) = A \exp(-\beta t) + B t \exp(-\beta t).$$

*Superkritische Dämpfung:* In diesem Fall hat das charakteristische Polynom zwei reelle Nullstellen  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Eine Basis des komplexen Lösungsraumes  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2$  ist nach Theorem 2.20 gegeben durch  $\exp(-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t), \exp(-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t)$ . Wie oben ist dies bereits eine Basis des reellen Lösungsraumes und für  $A, B \in \mathbb{R}$  ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$x(t) = A \exp\left(-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t\right) + B \exp\left(-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t\right).$$

## 5. Inhomogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten von höherer Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir inhomogene lineare skalare Differentialgleichungen von höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Es gibt zwei Lösungsmethoden: Einerseits die Lösung mittels der Formel für die Variation der Konstanten, welche man aus der zugehörigen Formel für die Variation der Konstanten für Systeme erster Ordnung herleiten kann. Andererseits gibt es auch die Ansatz-Methode.

Die Ansatz-Methode ist potentiell schneller, aber sie funktioniert nur für Inhomogenitäten mit spezieller Struktur; während die Formel für die Variation der Konstanten immer funktioniert, aber potentiell aufwendiger ist.

### 5.1. Die Formel für die Variation der Konstanten.

Wir betrachten für die gesuchte Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$(15) \quad \begin{cases} x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \dots + a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = g(t) \\ x(0) = y_0, \dot{x}(0) = y_1, \dots, \dot{x}^{(n-1)}(0) = y_{m-1} \end{cases},$$

wobei  $a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ , und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine gegebene Funktion.

Wie im vorherigen Abschnitt kann diese Gleichung auch in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden. Es gilt

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au + b(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

wobei  $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$  die Begleitmatrix ist, und  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  wie im vorherigen Abschnitt gegeben ist. Weiterhin ist  $b : J \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsformel für inhomogene Systeme erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) liefert nun

$$u(t) = u_H(t) + u_p(t) = \exp(tA)u_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) \cdot b(s) ds.$$

Der erste Term kann durch Auffinden des Lösungsraumes wie in Theorem 2.20 schnell ausgewertet werden.

Um den zweiten Term effizient auszuwerten beobachten wir

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ u_1(t) & \dots & u_m(t) \\ | & \dots & | \end{pmatrix},$$

wobei  $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$  mit Anfangswert  $u_i(0) = e_i$  ist, wobei  $e_i \in \mathbb{R}^m$  der  $i$ -te Basisvektor in  $\mathbb{R}^m$  ist.

Da die Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine Begleitmatrix einer skalaren Differentialgleichung ist, haben die Funktionen  $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  die spezielle Struktur

$$u_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \dot{x}_i(t) \\ \ddot{x}_i(t) \\ \vdots \\ x_i^{(m-1)}(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktion  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x_i^{(m)} + a_{m-1}x_i^{(m-1)} + \dots + a_2\ddot{x}_i + a_1\dot{x}_i + a_0x_i = 0, \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dots, x^{(i-2)}(0) = 0, x^{(i-1)}(0) = 1, x^{(i)}(0) = 0, \dots, \dot{x}^{(m-1)}(0) = 0, \end{cases}$$

löst.

Werten wir nun den Integranden in der obigen Lösungsformel für Systeme aus, so erhalten wir

$$\exp((t-s)A) \cdot b(s) = \begin{pmatrix} x_1(t-s) & \dots & \dots & x_m(t-s) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_1^{(m-2)}(t-s) & \dots & \dots & x_m^{(m-2)}(t-s) \\ x_1^{(m-1)}(t-s) & \dots & \dots & x_m^{(m-1)}(t-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m(t-s)g(s) \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix},$$

wobei \* bedeutet, dass wir nicht am exakten Wertes des Eintrages interessiert sind.

Die Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangswertproblems ist durch die erste Komponente der obigen Formel gegeben. Daher ist die partikuläre Lösung  $x_p : J \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch die erste Komponente der partikulären Lösung  $u_p : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Daher gilt

$$x_p(t) = \int_0^t x_m(t-s)g(s) ds.$$

Beachte, dass diese partikuläre Lösung die Eigenschaft  $x_p(0) = 0, \dot{x}_p(0) = 0, \dots, x_p^{(m-1)}(0) = 0$  hat.

Daher haben wir die folgende Lösungsformel hergeleitet:

$$x(t) = x_H(t) + \int_0^t \tilde{x}(t-s)g(s) ds,$$

In dieser Formel bezeichnet  $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(m)} + a_{m-1}\tilde{x}^{(m-1)} + \dots + a_2\ddot{\tilde{x}} + a_1\dot{\tilde{x}} + a_0\tilde{x} = 0 \\ \tilde{x}(0) = 0, \dots, \dots, \dot{\tilde{x}}^{(m-2)}(0) = 0, \dot{\tilde{x}}^{(m-1)}(0) = 1 \end{cases}.$$

BEISPIEL (Der harmonische Oszillator mit einer äußeren Kraft).

Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit einer periodischen äußeren Kraft. Das Anfangswertproblem ist gegeben durch

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = A_0 \sin(\Omega t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

Hier ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion (welche die Auslenkung misst), und  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist die Anfangsauslenkung, und  $v_0 \in \mathbb{R}$  ist die Anfangsgeschwindigkeit, und  $\omega_0 > 0$  ist die Eigenfrequenz, und  $A_0 > 0$  ist die Amplitude der äußeren Kraft, und  $\Omega > 0$  ist die Frequenz der äußeren Kraft.

Das homogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0, \end{cases}$$

hat die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

welche wir in vorherigen Abschnitten hergeleitet haben.

Setzen wir  $x_0 = 0$  und  $v_0 = 1$ , so erhalten wir

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Daher ist die partikuläre Lösung des Problems gegeben durch

$$x_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-s)) \sin(\Omega s) ds.$$

Um eine explizitere Lösungsformel zu erhalten, muss man das Integral in zwei Fällen auswerten: Einerseits den nicht-resonanten Fall  $\Omega \neq \omega_0$ , und andererseits den resonanten Fall  $\Omega = \omega_0$ .

### 5.2. Die Ansatz-Methode.

Eine andere Lösungsmethode für inhomogene lineare skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung ist die **Ansatz-Methode**.

Im Vergleich zur vorherigen Methode muss man anstelle einer Integration ein lineares Gleichungssystem der Größe  $m$  (wobei  $m$  die Ordnung der Gleichung ist) lösen. Der große Nachteil der Ansatz-Methode ist, dass sie nur für Summen und Produkte von Exponentialfunktionen, Sinus, Kosinus und für Polynome anwendbar ist.

- (1) Abhängig von der Struktur der Inhomogenität macht man einen Ansatz für die partikuläre Lösung.  
*Hinweis: Falls der Ansatz einen Term enthält, der bereits in der allgemeinen Lösung für die homogene Gleichung auftritt, muss man den Ansatz durch Hinzufügen von Summanden, die mit Potenzen von  $t \mapsto t^k$  modifiziert ist, erweitern.*
- (2) Man setzt den Ansatz in die gewöhnliche Differentialgleichung ein, und vergleicht Koeffizienten, um ein lineares Gleichungssystem zu erhalten.
- (3) Man löst das lineare Gleichungssystem, um eine partikuläre Lösung zu finden.  
*Hinweis: Im Gegensatz zur Formel für die Variation der Konstanten gilt im Allgemeinen die Eigenschaft  $x_p(0) = 0, \dot{x}_p(0) = 0, \dots, x_p^{(m-1)}(0) = 0$  für die partikuläre Lösung nicht.*
- (4) Die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- (5) Falls notwendig, benutzt man die Anfangswerte, um die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung zu bestimmen.

Wir illustrieren das Vorgehen anhand der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = g(t)$$

für verschiedene Wahlen der Inhomogenität  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$x(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) + x_p(t),$$

wobei  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$  Konstanten sind.

BEISPIEL (Eine Exponentialfunktion als Inhomogenität).

In diesem Beispiel betrachten wir die Inhomogenität  $g(t) = \exp(t)$ . Ableitungen der Exponentialfunktion sind wiederum durch Exponentialfunktionen gegeben. Dies motiviert den Ansatz

$$x_p(t) = A \exp(t).$$

Wir setzen diesen Ansatz in die gewöhnliche Differentialgleichung ein, und erhalten

$$\ddot{x}_p(t) + 4x_p(t) - g(t) = A \exp(t) + 4 \exp(t) - \exp(t) = \exp(t)[A + 4 - 1].$$

Für eine Lösung  $t \mapsto x_p(t)$  muss die rechte Seite der Gleichung verschwinden. Dies impliziert  $A = -3$ . Die partikuläre Lösung ist daher gegeben durch

$$x_p(t) = -3 \exp(t).$$

Die allgemeine Lösung für die inhomogene Gleichung ist gegeben durch

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) - 3 \exp(t).$$

BEISPIEL (Sinus- und Kosinusfunktionen als Inhomogenität).

In diesem Beispiel betrachten wir die Inhomogenität  $g(t) = \sin(t)$ . Ableitungen der Sinusfunktion sind die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion und vice versa. Daher machen wir den Ansatz

$$x_p(t) = A \cos(t) + B \sin(t),$$

wobei  $A, B \in \mathbb{R}$ . Die Frequenzen der Sinus- und Kosinusfunktion müssen mit den Frequenzen der Inhomogenität übereinstimmen. Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein, und erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + 4x_p(t) - g(t) &= -A \cos(t) - B \sin(t) + 4[A \cos(t) + B \sin(t)] - \sin(t) \\ &= \cos(t)[-A + 4A] + \sin(t)[-B + 4B - 1]. \end{aligned}$$

Für eine Lösung  $t \mapsto x_p(t)$  muss die rechte Seite verschwinden. Da die Funktionen  $t \mapsto \cos(t)$  und  $t \mapsto \sin(t)$  linear unabhängig sind, können wir Koeffizienten vergleichen, und erhalten das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3A = 0, \\ 3B = 1. \end{cases}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung  $A = 0$  und  $B = \frac{1}{3}$ . Der Ansatz führt daher auf die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{1}{3} \sin(t).$$

Man beachte, dass  $x_p(0) = 0$ , aber  $\dot{x}_p(0) \neq 0$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(t),$$

wobei  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$  Konstanten sind.

BEISPIEL (Polynome als Inhomogenität).

In diesem Beispiel betrachten wir die Inhomogenität  $g(t) = t^3 + t$ . Der Ansatz in diesem Fall ist gegeben durch

$$x_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

wobei  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  bestimmt werden müssen. Der Ansatz ist das allgemeine Polynom der gleichen Ordnung wie das Polynom der Inhomogenität. Wir setzen den Ansatz in die gewöhnliche Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + 4x_p(t) - g(t) &= (6At + 2B) + 4(At^3 + Bt^2 + Ct + D) - (t^3 + t) \\ &= t^3(4A - 1) + t^2(4B) + t(6A + 4C - 1) + 1(2B + 4D). \end{aligned}$$

Damit  $t \mapsto x_p(t)$  eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung ist, muss die rechte Seite der Gleichung verschwinden. Da die Polynome  $t \mapsto t^n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  linear unabhängig sind, können wir die Koeffizienten vergleichen, um ein lineares System von Gleichungen zu erhalten:

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 4B = 0, \\ 6A + 4C = 1, \\ 2B + 4D = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung impliziert  $B = 0$ , und dann impliziert die vierte Gleichung  $D = 0$ . Die erste Gleichung impliziert  $A = \frac{1}{4}$ , und somit ergibt die dritte Gleichung

$$C = \frac{1}{4} (1 - 6A) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Daher liefert dieser Ansatz die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{8}t.$$

Wir beachten, dass in diesem Fall  $x_p(0) = 0$ , aber  $\dot{x}_p(0) \neq 0$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen skalaren Differentialgleichung ist dann gegeben durch

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t) + \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{8}t,$$

wobei  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$  Konstanten sind.

## 6. Asymptotisches Verhalten von Lösungen

Die Realteile der Eigenwerte der Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  bestimmen das asymptotische Verhalten des Matrixexponential für  $t \rightarrow \infty$ .

Zuerst zeigen wir eine Aussagen für das asymptotische Verhalten des Produkts des Matrixexponential mit einem Hauptvektor:

PROPOSITION 2.22 (Asymptotik für das Matrixexponential eines Hauptvektors).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ , und sei  $u \in \mathbb{C}^m$  ein Hauptvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ , i.e. es existiert  $\nu \in \mathbb{N}$ , so dass  $(A - \lambda \text{id})^\nu u = 0$ . Falls  $\text{Re}(\lambda) < 0$  gilt, so folgt  $\exp(tA)u \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Allgemeiner gilt für einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(\lambda) < -\alpha$  die verbesserte Asymptotik  $e^{\alpha t} \exp(tA)u \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

BEWEIS.

Aufgrund von Proposition 2.9 und der Voraussetzung, dass  $u_0 \in \mathbb{C}^m$  ein Hauptvektor von  $A$  ist, schliessen wir

$$\begin{aligned} \exp(tA)u &= \exp(t(A - \lambda \text{id}) + t\lambda \text{id})u = \exp(t(A - \lambda \text{id})) \exp(t\lambda \text{id})u = e^{\lambda t} \exp(t(A - \lambda \text{id}))u \\ &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda \text{id})^j u = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda \text{id})^j u. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit der Dreiecksungleichung, der Submultiplikativität und der Identität  $|e^{\lambda t}| = e^{(\text{Re } \lambda)t}$  die Abschätzung

$$\|\exp(tA)u\| = \left\| e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda \text{id})^j u \right\| \leq e^{t \text{Re } \lambda} \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{|t|^j}{j!} \|A - \lambda \text{id}\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}^j \right) \|u\|.$$

Aufgrund der Voraussetzung  $\text{Re } \lambda < 0$  zerfällt der erste Faktor exponentiell, während der zweite Faktor maximal polynomiell mit  $|t|^{\nu-1}$  wächst. Daher gilt  $\|\exp(tA)u\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Die zweite Aussage folgt analog durch Multiplikation der Abschätzung mit der Funktion  $t \mapsto e^{\alpha t}$ .  $\square$

Durch eine Hauptraumzerlegung erhalten wir nun eine Aussage für beliebige Anfangswerte:

KOROLLAR 2.23.

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ , so dass alle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (mit Multiplizitäten  $\nu_1, \dots, \nu_k \geq 1$ , sodass  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$ ) negativen Realteil haben. Dann gilt für alle Anfangswerte  $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}^m$ , dass die Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{u} = Au$  und  $u(0) = u_0$  für  $t \rightarrow \infty$  zum Ursprung konvergiert.

BEWEIS.

Sei  $u_0 \in \mathbb{C}^m$ . Nach der Hauptvektorzerlegung (siehe Theorem A.7) existieren Vektoren  $v_j \in \mathcal{H}(\lambda_j)$  für  $1 \leq j \leq k$ , sodass  $u_0 = v_1 + \dots + v_k$ . Aufgrund von Linearität gilt für die Lösung des Anfangswertproblems, dass

$$u(t) = \exp(tA)u_0 = \exp(tA)v_1 + \dots + \exp(tA)v_k.$$

Aufgrund der Voraussetzung  $\text{Re } \lambda_j < 0$  für alle  $1 \leq j \leq k$  gilt, folgt mit der Asymptotik für das Matrixexponential (Proposition 2.22), dass jeder Summand für  $t \rightarrow \infty$  gegen null konvergiert. Damit konvergiert auch die Summe gegen null. Es folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ .  $\square$





## Existenztheorie für nichtlineare Gleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen werden für die Modellierung vieler Systeme in allerlei Disziplinen von Physik über Biologie bis zur Ökonomie eingesetzt. Um Probleme sinnvoll zu modellieren, möchte man für ein gegebenes Anfangswertproblem daher die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Weiterhin ist man an stetiger Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsdaten und den Koeffizienten der Gleichung interessiert, und an der Frage ob Lösungen global in der Zeit (zumindest für alle Zeiten, für welche die Gleichung definiert ist) existieren.

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten konnten wir Existenz durch das Aufschreiben einer expliziten Lösung zeigen, und Eindeutigkeit folgte aus einfachen Überlegungen. Die explizite Lösung erlaubt auch, stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten zu zeigen, und die Lösungen sind global definiert (oder zumindest für alle Zeiten für welche die Gleichung definiert ist).

Für nichtlineare Differentialgleichungen sind diese Fragen weitaus verwickelter, da man im Allgemeinen keine explizite Lösungsformel angeben kann. Es stellt sich heraus, dass man Existenz unter milden Voraussetzungen an die Gleichung zeigen kann. Weiterhin kann es für nichtlineare Differentialgleichungen durchaus vorkommen, dass Lösungen nicht global definiert sind, und dass Anfangswertprobleme mehrere Lösungen zulassen. Wir illustrieren dies mit zwei Beispielen.

BEISPIEL (Keine globale Existenz von Lösungen).

Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^2, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Durch Separation der Variablen findet man, dass die Lösung gegeben ist, durch

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Für  $x_0 \leq 0$  ist die Lösung für  $t \in [0, \infty)$  (und damit global) definiert. Für  $x_0 > 0$  finden wir, dass die Lösung für  $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$  explodiert (im Sinne  $|x(t)| \rightarrow \infty$ ). Daher sind die Lösungen für  $x_0 > 0$  nur für  $t \in [0, \frac{1}{x_0})$  definiert, und somit nicht global definiert.

Man beachte, dass die rechte Seite  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $F(x) = x^2$  superlinear wächst.

BEISPIEL (Nichteindeutigkeit der Lösung).

Wir betrachten für die gesuchte Funktion  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch  $x(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Allerdings ist auch  $x(t) = \frac{1}{4}t^2$  für  $t \geq 0$  eine Lösung. Die Situation ist sogar noch viel schlimmer: Für jedes  $a \geq 0$  ist die Funktion

$$x_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - a)^2 & t \geq a, \\ 0 & t < a, \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems. Die Lösungen des Anfangswertproblems sind also nicht eindeutig.

Man beachte, dass die rechte Seite  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $F(x) = \sqrt{|x|}$  bei  $x = 0$  nicht differenzierbar (und auch nicht lokal Lipschitz-stetig ist).

In diesem Kapitel werden wir daher die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit, globaler Existenz von Lösungen, und stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten diskutieren.

Für die Existenztheorie gibt es zwei Resultate:

Einerseits der Satz von Peano, welcher unter der Annahme von Stetigkeit der rechten Seite der Differentialgleichung Existenz (aber keine Eindeutigkeit!) von Lösungen liefert. Der Standardbeweis stützt sich auf den Kompaktheitssatz von Arzelà–Ascoli für gleichmäßig gleichgradig stetige Familien. Den Satz von Peano werden wir nur im Anhang diskutieren.

Andererseits der Satz von Picard–Lindelöf, der unter der stärkeren Annahme von lokaler Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite der Gleichung Existenz und Eindeutigkeit der Lösung liefert. Der Beweis stützt sich auf eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Den Satz von Picard–Lindelöf und seine Konsequenzen werden wir im folgenden diskutieren.

### 1. Der Banachsche Fixpunktsatz

Für den Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf zur Kurzzeitexistenz von Lösungen werden wir den Banachschen Fixpunktsatz aus der Analysis benötigen, welchen wir kurz wiederholen.

DEFINITION 3.1 (Fixpunkt).

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und sei  $F : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann heißt  $\bar{x} \in X$  Fixpunkt der Abbildung  $F$ , falls  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Der Banachsche Fixpunktsatz bezieht sich auf Kontraktion, dies sind Abbildungen, die die Distanz zwischen zwei verschiedenen Punkten verkürzen.

DEFINITION 3.2 (Kontraktion).

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $F : X \rightarrow X$  heißt **Kontraktion**, falls eine Konstante  $0 < \eta < 1$  existiert, sodass für alle  $x, y \in X$  die Ungleichung

$$d(F(x), F(y)) \leq \eta d(x, y)$$

gilt.

Der Banachsche Fixpunktsatz, welcher zuerst 1922 von Stefan Banach, bewiesen wurde, spielt eine zentrale Rolle in einigen Beweis in der Analysis. Neben der untenstehenden Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen ist auch der Beweis des Satzes über die inverse Abbildung und des Satzes über implizite Funktionen zu nennen.

THEOREM 3.3 (Banachscher Fixpunktsatz).

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum, und sei  $F : X \rightarrow X$  eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante  $\eta < 1$ . Dann hat die Abbildung  $F$  einen eindeutigen Fixpunkt, i.e. es existiert genau ein  $\bar{x} \in X$  mit  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Weiterhin gilt für alle  $x_0 \in X$  und die iterativ definierte Folge  $x_{k+1} = F(x_k)$  für  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$d(x_k, \bar{x}) \leq \eta^k d(x_0, \bar{x}).$$

BEWEIS.

Zur Existenz: Sei  $x_0 \in X$  beliebig. Wir definieren für  $n \in \mathbb{N}$  rekursiv eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mittels  $x_{n+1} = F(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir behaupten, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchy-Folge ist.

Zuerst beobachten wir für  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(F(x_{k-1}), F(x_k)) \leq \eta d(x_{k-1}, x_k) \leq \eta^k d(x_0, x_1).$$

Damit schliessen wir für  $l \geq k \in \mathbb{N}$  mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_k, x_l) \leq \sum_{j=k}^{l-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=k}^{l-1} \eta^j d(x_0, x_1) = \eta^k \sum_{j=0}^{l-1-k} \eta^j d(x_0, x_1) \leq \frac{\eta^k}{1-\eta} d(x_0, x_1).$$

Da  $0 < \eta < 1$  gilt, folgt  $\eta^k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Sei nun  $\epsilon > 0$ . Dann existiert  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $d(x_l, x_l) < \epsilon$  für alle  $l \geq k \geq N$ . Somit ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchy-Folge.

Da der metrische Raum  $(X, d)$  vollständig ist, hat die Cauchy-Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  einen Grenzwert  $\bar{x} \in X$ . Da eine Kontraktion insbesondere stetig ist, schliessen wir

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = F(\bar{x}).$$

Daher ist  $\bar{x} \in X$  ein Fixpunkt der Abbildung  $F$ .

Zur Eindeutigkeit: Seien  $\bar{x}, \bar{y} \in X$  Fixpunkte, i.e.  $F(\bar{x}) = \bar{x}$  und  $F(\bar{y}) = \bar{y}$ . Dann gilt

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(F(\bar{x}), F(\bar{y})) \leq \eta d(\bar{x}, \bar{y}),$$

und somit

$$(1 - \eta)d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0.$$

Da  $\eta < 1$  gilt, folgt  $1 - \eta > 0$ , und mit der positiven Definitheit der Metrik schliessen wir  $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  und somit  $\bar{x} = \bar{y}$ . Daher ist der Fixpunkt eindeutig.

Zur Fehlerabschätzung: Wir beobachten iterativ

$$d(x_k, \bar{x}) = d(F(x_{k-1}), F(\bar{x})) \leq \eta d(x_{k-1}, \bar{x}) \leq \eta^k d(x_0, \bar{x}).$$

□

## 2. Existenz und Eindeutig mittels dem Satz von Picard–Lindelöf

Um für die gewöhnliche Differentialgleichungen  $\dot{u} = F(u)$  Lösungen der Regularitätsklasse  $C^1$  zu erhalten, sollte die Funktion  $F$  zumindest stetig sein. Es stellt sich aber heraus, dass für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen die stärkere Annahme der lokalen Lipschitz-Stetigkeit natürlich ist. Wir wiederholen die Begriffe:

DEFINITION 3.4 (Lipschitz-Stetigkeit).

Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, und  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist  $F$  **Lipschitz-stetig**, falls eine Konstante  $L \geq 0$  existiert, sodass wir für alle  $x, y \in X$  die folgende Abschätzung haben:

$$d_Y(F(x), F(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Insbesondere ist jede Lipschitz-stetige Funktion stetig und gleichmäßig stetig. Die oben definierten Kontraktionen sind ein Beispiel einer Lipschitz-stetigen Abbildung mit Lipschitz-Konstante  $L = \eta < 1$ .

DEFINITION 3.5 (Lokale Lipschitz-Stetigkeit).

Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, und  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist  $F$  **lokal Lipschitz-stetig**, falls für alle  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  existiert, sodass die Einschränkung  $F|_U : U \rightarrow Y$  Lipschitz-stetig ist.

Falls  $X$  ein lokalkompakter Raum ist (z.B. der euklidische Räume  $\mathbb{R}^m$ ), dann ist  $F$  lokal Lipschitz-stetig, genau dann wenn  $F$  Lipschitz stetig auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq X$  ist.

Wir bemerken, dass für eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  jede Funktion  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  aufgrund des Schrankensatzes lokal Lipschitz-stetig ist.

Der folgende zentrale Satz über die Kurzzeitexistenz von Lösungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nun eine Konsequenz des Banachschen Fixpunktsatzes angewandt auf die Integralformulierung

$$\forall t \in [-\delta, \delta] : u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s)) ds$$

des Anfangswertproblem  $\dot{u}(t) = F(u(t))$  und  $u(0) = u_0$ .

**THEOREM 3.6** (Picard–Lindelöf; Kurzzeitexistenz).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $u_0 \in U$  und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Dann existiert  $\delta = \delta(x_0, F) > 0$  und eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung  $u : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in U. \end{cases}$$

**BEWEIS.**

Sei  $u_0 \in U$ . Da  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, existiert  $r_0 > 0$ , sodass  $B_{r_0}(u_0) \subseteq U$ , und es existiert  $L > 0$ , sodass für alle  $v, w \in B_{r_0}(u_0)$  aufgrund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit die Abschätzung

$$|F(v) - F(w)| \leq L|v - w|$$

gilt. Wir setzen  $C_0 := Lr_0 + |F(u_0)|$ . Wir definieren  $\delta > 0$  durch

$$\delta := \min \left\{ \frac{r_0}{C_0}, \frac{1}{2L} \right\} > 0.$$

Der Unterraum  $M \subseteq C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m)$  gegeben durch

$$M = \left\{ u \in C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m) : \sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |u(t) - u_0| \leq r_0 \right\}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum des Banachraumes  $(C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ , und somit ein vollständiger metrischer Raum. Hier verwenden wir die kanonische Norm

$$\|u\|_\infty = \sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |u(t)|.$$

Wir definieren die Abbildung  $\Phi : M \rightarrow C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m)$  durch

$$\Phi(v)(t) := u_0 + \int_0^t F(v(s)) \, ds$$

für  $v \in M$  und  $t \in [-\delta, \delta]$ .

**Behauptung 1:** Für  $v \in M$  gilt  $\Phi(v) \in M$ .

Wir haben für  $v \in M$  die Abschätzung

$$|\Phi(v)(t) - u_0| = \left| \int_0^t F(v(s)) \, ds \right| \leq \int_0^t |F(v(s))| \, ds \leq \delta \sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |F(v(t))|.$$

Weiterhin gilt mit der Dreiecksungleichung, der lokalen Lipschitz-Stetigkeit und  $v \in M$  für alle  $s \in [-\delta, \delta]$  die Abschätzung

$$|F(v(s))| \leq |F(v(s)) - F(u_0)| + |F(u_0)| \leq L|v(s) - u_0| + |F(u_0)| \leq Lr_0 + |F(u_0)| = C_0.$$

Damit gilt für alle  $t \in [-\delta, \delta]$  die Abschätzung

$$|\Phi(v)(t) - u_0| \leq \delta C_0 \leq r_0$$

und somit gilt  $\Phi(v) \in M$ .

**Behauptung 2:** Die Abbildung  $\Phi : M \rightarrow M$  ist eine Kontraktion.

Wir haben für  $v, w \in M$  und  $t \in [-\delta, \delta]$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| &\leq \left| \int_0^t (F(v(s)) - F(w(s))) \, ds \right| \leq \int_0^t |F(v(s)) - F(w(s))| \, ds \\ &\leq L \int_0^t |v(s) - w(s)| \, ds \leq \delta L \sup_{-\delta \leq t \leq \delta} |v(s) - w(s)| \\ &\leq \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty \end{aligned}$$

nach Wahl der Existenzzeit  $\delta > 0$ .

Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildung  $\Phi : M \rightarrow M$  eine Kontraktion ist. Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz, Theorem 3.3, an und erhalten einen eindeutigen Fixpunkt  $u \in M$  mit  $\Phi(u) = u$ . Dies bedeutet, dass wir für alle  $t \in [-\delta, \delta]$  die Gleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds$$

erhalten. Insbesondere gilt  $u(0) = u_0$ . Da  $u \in C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m)$  gilt, folgt  $F \circ u \in C^0([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m)$ . Somit liefert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung  $u \in C^1([-\delta, \delta]; \mathbb{R}^m)$ . Differenzieren der Gleichung liefert dann  $\dot{u}(t) = F(u(t))$  für alle  $t \in [-\delta, \delta]$ .

Damit haben wir eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung  $u : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  des Anfangswertproblems konstruiert.  $\square$

Analysiert man den obigen Beweis und den Beweis des Banach'sche Fixpunktsatzes genauer, so sieht man, dass der Beweis eine explizite Konstruktionsmethode liefert:

**BEMERKUNG 3.7** (Picard-Iterationen).

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir setzen  $u_0(t) = u_0$  und iterativ

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds.$$

Dies liefert für  $\delta > 0$  hinreichend klein eine Folge von stetigen Funktionen  $u_k : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die Funktionen  $u_k$  werden auch als **Picard-Iterationen** bezeichnet.

Der obige Beweis zeigt, dass  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $[-\delta, \delta]$  uniform gegen eine stetig differenzierbare Lösung  $u : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  des Anfangswertproblems  $\dot{u} = F(u)$  und  $u(0) = u_0 \in U$  konvergiert.

**BEISPIEL** (Das Matrixexponential mit Picard-Iterationen).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ . Wir betrachten für eine gesuchte Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  die gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$  mit Anfangswert  $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$ . Die Picard-Iteration  $u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  (für  $k \in \mathbb{N}$ ) erfüllen

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_0^t Au_k(s) ds.$$

Man berechnet zum Beispiel

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0 + \int_0^t Au_0 ds = (\text{id} + At) u_0, \\ u_2(t) &= u_0 + \int_0^t Au_1(s) ds = \left( \text{id} + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 \right) u_0, \\ u_3(t) &= u_0 + \int_0^t Au_2(s) ds = \left( \text{id} + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 \right) u_0. \end{aligned}$$

Mit Induktion schliesst man

$$u_k(t) = \left( \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} A^j \right) u_0$$

Somit folgt  $u_k(t) \rightarrow \exp(tA)u_0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Auf kompakten Teilintervallen  $[-L, L] \subseteq \mathbb{R}$  ist die Konvergenz  $u_k \rightarrow \exp(\cdot A)u_0$  sogar uniform.

**BEMERKUNG 3.8** (Globale Lösungen für globale Lipschitz-Stetigkeit).

Wir betrachten das Anfangswertproblem  $\dot{u} = F(u)$  und  $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$ . Falls  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (global) Lipschitz-stetig ist, so erhalten wir ein  $\delta > 0$ , welches nicht vom Anfangswert  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  abhängt. Damit können wir die Kurzzeitleösung  $u : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch Anwenden der Kurzzeitexistenz, Theorem 3.6, iterativ zu einer Lösung  $u_k : [-k\delta, k\delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $k \in \mathbb{N}$  erweitern. Schlussendlich erhalten wir eine global definierte Lösung  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**BEMERKUNG 3.9** (Nichtautonome Gleichungen).

Eine Erweiterung auf nichtautonome Anfangswertprobleme  $\dot{u}(t) = F(t, u(t))$  und  $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$  ist durch eine direkte Modifikation des Beweises möglich. Dazu müssen wir voraussetzen, dass für  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen die Funktion  $F : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und bezüglich der zweiten Variable  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  lokal gleichmäßig in  $t \in \mathbb{R}$  lokale Lipschitz-stetig ist, i.e. für alle  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  und für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$  existieren  $r_0 > 0$ ,  $T_0 > 0$  und  $L > 0$ , sodass für alle  $u, v \in B_{r_0}(u_0) \subseteq U$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $|t - t_0| < T_0$  die folgende Abschätzung haben:

$$|F(t, u) - F(t, v)| \leq L|u - v|.$$

Wir bemerken auch, dass man bei ausreichender Regularität in der Zeitvariable (z.B. falls  $(t, u) \mapsto F(t, u) \in C^1$ ), die nichtautonome Gleichung  $\dot{u}(t) = F(t, u(t))$  für  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  auch in eine autonome Gleichung  $\dot{v}(t) = G(v(t))$  für  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  und  $G$  lokal Lipschitz-stetig umschreiben kann. Dann kann man Theorem 3.6 zur Kurzzeitexistenz direkt anwenden.

**BEMERKUNG 3.10** (Lösbarkeit in beide Richtungen und Vergleich mit PDE).

Das Anfangswertproblem für autonome Differentialgleichungen lässt sich für alle Anfangswerte  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  in beide Richtungen lösen, i.e. wir finden Lösungen  $u : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dies steht im Kontrast zur Situation für partielle Differentialgleichungen (wie z.B. die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung), welche sich für allgemeine Anfangsdaten (typischerweise) nur vorwärts in der Zeit lösen lassen, i.e. man findet Lösungen  $u : [0, T) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

Als Vorbereitung für den Beweis der Eindeutigkeit auf großen Intervallen beweisen wir die Grönwallsche Ungleichung. Diese Ungleichung (und ihre Integralversion) spielt eine fundamentale Rolle in der Theorie der parabolischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen.

**LEMMA 3.11** (Grönwallsche Ungleichung).

Seien  $u, \psi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, und sei  $u$  differenzierbar auf  $(0, T)$ . Für alle  $t \in (0, T)$  gelte weiterhin die Differentialungleichung

$$\dot{u}(t) \leq \psi(t)u(t).$$

Dann gilt für alle  $t \in (0, T)$  die Abschätzung

$$u(t) \leq u(0) \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right).$$

**BEWEIS.**

Der Beweis ist ein Vergleichsargument für gewöhnliche Differentialgleichungen:

Wir definieren  $v : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  als Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{v}(t) = \psi(t)v(t)$  und  $v(0) = 1$ . Dann gilt nach Kapitel 1 die Formel

$$v(t) = \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right),$$

und somit auch  $v(t) > 0$  auf  $[0, T)$ . Wir berechnen mit Hilfe der Quotientenregel und der Differentialungleichung auf  $(0, T)$  die Ungleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{\dot{u}(t)v(t) - u(t)\dot{v}(t)}{v^2(t)} = \frac{1}{v(t)} (\dot{u}(t) - \psi(t)u(t)) \leq 0.$$

Somit ist die Funktion  $t \mapsto \frac{u(t)}{v(t)}$  monoton fallend auf  $[0, T)$ , und daher gilt

$$\frac{u(t)}{v(t)} \leq \frac{u(0)}{v(0)}, \quad \text{und somit} \quad u(t) \leq u(0)v(t) = u(0) \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right).$$

Dies beendet den Beweis der Grönwallschen Ungleichung. □

Der Beweis der Kurzzeitexistenz, Theorem 3.6, liefert Eindeutigkeit auf dem kleinem Intervall  $[0, \delta]$ . Lokale Lipschitz-Stetigkeit in Kombination mit der Grönwallschen Ungleichung liefert uns sogar Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem auf einem langen Zeitintervall  $[0, T)$ :

THEOREM 3.12 (Picard–Lindelöf; Eindeutigkeit).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $u_0 \in U$  und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Gegeben seien  $u, v : [0, T) \rightarrow U$  stetig differenzierbare Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)) \\ u(0) = u_0 \in U, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \dot{v}(t) = F(v(t)) \\ v(0) = u_0 \in U, \end{cases}$$

Dann gilt  $u = v$  auf  $[0, T)$ .

BEWEIS.

Wir führen einen indirekten Beweis: Angenommen es existiert  $t \in (0, T)$  mit  $u(t) \neq v(t)$ . Wir setzen

$$\tau = \inf \{t \in (0, T) : u(t) \neq v(t)\}.$$

Dann gilt nach Definition des Infimum  $\tau \in [0, T)$ . Weiterhin gilt  $u(\tau) = v(\tau)$ . Denn falls  $u(\tau) \neq v(\tau)$ , existiert aufgrund von Stetigkeit  $\epsilon > 0$ , sodass  $u(\tau - \epsilon) \neq v(\tau - \epsilon)$ . Dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $\tau$ . Wir setzen  $w = u(\tau) \in U$ .

Da  $w \in U$  gilt, und  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, existiert aufgrund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit  $r > 0$ , sodass  $B_{2r}(w) \subseteq U$  und

$$|F(u) - F(w)| \leq L|u - w|$$

für alle  $u \in U$  mit  $\|u - w\| \leq r$ .

Da  $t \mapsto u(t), v(t)$  stetige Funktionen sind, existiert  $\epsilon > 0$ , sodass  $\tau + \epsilon < T$  und  $u(t), v(t) \in B_r(w)$  für  $t \in [\tau, \tau + \epsilon)$ . Daher gilt für alle  $t \in [\tau, \tau + \epsilon)$  auch die Ungleichung

$$|F(u(t)) - F(v(t))| \leq L|u(t) - v(t)|.$$

Wir beobachten, dass die Funktion  $t \mapsto |u(t) - v(t)|^2$  differenzierbar auf  $t \in (\tau, \tau + \epsilon)$  ist. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 &= 2\langle u(t) - v(t), \dot{u}(t) - \dot{v}(t) \rangle \leq 2\langle u(t) - v(t), F(u(t)) - F(v(t)) \rangle \\ &\leq 2|u(t) - v(t)| |F(u(t)) - F(v(t))| \leq 2L|u(t) - v(t)|^2 \end{aligned}$$

für  $t \in (\tau, \tau + \epsilon)$ . Wir wenden die Grönwall'sche Ungleichung auf die Funktion  $t \mapsto |u(t) - v(t)|^2$  an. Da  $u(\tau) = v(\tau)$  gilt, liefert diese  $u = v$  auf  $[\tau, \tau + \epsilon)$ .

Dies steht im Widerspruch zur Definition von  $\tau \in [0, T)$ , und somit muss die Annahme, dass  $u(t) \neq v(t)$  für ein  $t \in (0, T)$  gilt, falsch sein. Daher gilt  $u = v$  auf  $[0, T)$ .  $\square$

In vielen Situationen wollen wir die Differentialgleichungen für ein möglichst großes Zeitintervall lösen. Dies ist der Definition der maximalen Lösung encodiert.

DEFINITION 3.13 (Maximale Lösung).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei  $u_0 \in U$ . Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann heißt  $u : I \rightarrow U$  maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

falls jede weitere Lösung  $v : J \rightarrow U$  des Anfangswertproblems die Bedingungen  $J \subseteq I$  und  $u|_J = v$  erfüllt.

Für das maximale Existenzintervall der Lösung mit Anfangswert  $u_0 \in U$  schreiben wir  $I_{\text{Max}}(u_0)$ .

PROPOSITION 3.14 (Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei  $u_0 \in U$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

eine eindeutige maximale Lösung  $u : I_{\text{Max}}(u_0) \rightarrow U$ .

BEWEIS.

Wir setzen

$$I_{\text{Max}}(u_0) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{es existiert eine Lösung des obigen Anfangswertproblem,} \\ \text{welche auf einer offenen Umgebung von } \tau \in \mathbb{R} \text{ definiert ist} \end{array} \right\}.$$

Dann gilt nach Theorem 3.6 zur Kurzzeitexistenz  $[-\delta, \delta] \subseteq I_{\text{Max}}(u_0)$  und somit ist  $I_{\text{Max}}(u_0)$  nichtleer.

Weiterhin ist  $I_{\text{Max}}(u_0)$  ein Intervall, da es eine Vereinigung von Intervallen ist, und dieses Intervall ist offen. Angenommen  $I_{\text{Max}}(u_0)$  wäre ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall, z.B.  $I_{\text{Max}}(u_0) = [-T, T]$ . Dann liefert die Kurzzeitexistenz, Theorem 3.6, eine Lösung auf  $[-T - \delta, T + \delta]$ . Dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $I_{\text{Max}}(u_0)$ .

Abschliessend bemerken wir noch, dass zwei Lösungen des Anfangswertproblems auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich aufgrund von Eindeutigkeit, Theorem 3.12, übereinstimmen. Damit haben wir gezeigt, dass eine maximale Lösung  $u : I_{\text{Max}}(u_0) \rightarrow U$  existiert.  $\square$

Falls die maximale Lösung nicht für alle positiven Zeiten definiert ist, so muss die maximale Lösung zum Ende des Existenzintervalls entweder zum Rand oder nach unendlich laufen:

**THEOREM 3.15** (Charakterisierung des Verhaltens der maximalen Lösung).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei  $u_0 \in U$ . Wir betrachten die eindeutige maximale Lösung  $u : I_{\text{Max}}(u_0) \rightarrow U$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

und schreiben  $I_{\text{Max}}(u_0) = (T^-, T^+)$  für  $T^- \in [-\infty, 0)$  und  $T^+ \in (0, +\infty]$ .

Falls  $T^+ < \infty$  gilt, so muss die Lösung für  $t \rightarrow T^+$  jede kompakte Teilmenge von  $U$  verlassen, i.e. für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq U$  existiert  $\tau < T^+$ , sodass  $u(t) \notin K$  für alle  $t \in [\tau, T^+)$  gilt.

BEWEIS.

Sei  $T^+ < \infty$ , und sei  $K \subseteq U$  eine kompakte Teilmenge von  $U$ . Dann existiert  $r > 0$  mit der Eigenschaft

$$\text{dist}(K; \mathbb{R}^m \setminus U) > 3r.$$

Da die Menge  $\mathcal{U}_{2r}(K) := \{x \in U : \text{dist}(x, K) \leq 2r\}$  kompakt ist, existieren Konstanten  $M > 0$  und  $L > 0$ , sodass wir die Abschätzung

$$|F(x)| \leq M \quad \text{and} \quad |F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$$

für alle  $x, y \in \mathcal{U}_{2r}(K)$  haben. Wir setzen  $\delta > 0$  geeignet wie im Beweis der Kurzzeitexistenz nach Picard–Lindelöf, Theorem 3.6.

**Behauptung:** Es gilt  $u(t) \notin K$  für  $t$  hinreichend nahe bei  $T^+$ .

Wir verwenden ein indirektes Argument, um die Behauptung zu beweisen. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  im Intervall  $(T^-, T^+)$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T^+$ , und  $u(t_k) \in K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Da  $u(t_k) \in K$  gilt, folgt nach Wahl  $B_{3r}(t_k) \subseteq U$ , und wir haben wie oben die Abschätzungen

$$|F(x)| \leq M \quad \text{and} \quad |F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$$

für alle  $x, y \in B_{2r}(x(t_k))$ . Entscheidend ist, dass die Konstanten in der Abschätzung unabhängig von  $k \in \mathbb{N}$  ist. Somit ist auch  $\delta > 0$  unabhängig von  $k \in \mathbb{N}$ .

Nach dem Satz zur Kurzzeitexistenz von Picard–Lindelöf, Theorem 3.6 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{v}_k(t) = F(v_k(t)), \\ v_k(0) = v(t_k) \end{cases}$$

eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung  $v_k : [-\delta, \delta] \rightarrow U$ , also gilt insbesondere  $[0, \delta] \subseteq I_{\text{Max}}(u(t_k))$ .



Daher lässt sich die Lösung  $u : [0, t_k] \rightarrow U$  zu einer Lösung  $w_k : [0, t_k + \delta] \rightarrow U$  erweitern. Wir bemerken, dass  $u = w_k$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich nach der Eindeutigkeitsaussage von Picard–Lindelöf, Theorem 3.12, gilt. Somit gilt  $[0, t_k + \delta] \subseteq I_{\text{Max}}(u_0)$ .

Das maximale Existenzintervall ist gegeben durch  $I_{\text{Max}}(u_0) = (T^-, T^+)$ , und daher gilt aufgrund der Maximalität  $t_k + \delta < T^+$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Aber andererseits gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T^+$ , und daher folgt  $t_k + \delta > T^+$  für  $k \in \mathbb{N}$  hinreichend groß. Dies ist ein Widerspruch, welcher die Behauptung, dass  $u(t) \notin K$  für  $t$  hinreichend nahe bei  $T^+$  beweist.  $\square$

Als Konsequenz erhalten wir, dass für global definierte Funktionen  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  maximale Lösungen mit  $T^+ < \infty$  für  $t \rightarrow T^+$  “explodieren” müssen (“Blow-up” der Lösung der Differentialgleichung).

**KOROLLAR 3.16** (Maximale Lösungen auf  $\mathbb{R}^m$ ).

Sei  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ . Wir betrachten die eindeutige maximale Lösung  $u : I_{\text{Max}}(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

und schreiben  $I_{\text{Max}}(u_0) = (T^-, T^+)$  für  $T^- \in [-\infty, 0)$  und  $T^+ \in (0, +\infty]$ .

Falls  $T_+ < \infty$  gilt, so folgt  $\|u(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow T_+$ .

**BEWEIS.**

Die Aussage ist eine direkte Konsequenz von Theorem 3.15 für das Verhalten der maximalen Lösung im Falle  $T^+ < \infty$ .

Sei  $R > 0$  beliebig. Dann ist  $\overline{B_R(0)} \subseteq \mathbb{R}^m$  eine kompakte Menge, und somit existiert  $\tau_R < T^+ < \infty$  mit der Eigenschaft  $u(t) \notin \overline{B_R(0)}$  für  $t \in [\tau_R, T^+)$ . Dies ist aber gerade die Definition der Bewegung  $\|u(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow T^+$ .  $\square$

### 3. Der Fluss einer gewöhnlichen Differentialgleichung

**DEFINITION 3.17** (Fluss einer gewöhnlichen Differentialgleichung).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  lokal Lipschitz-stetig. Sei  $I_{\text{Max}}(u_0) \subseteq \mathbb{R}$  das maximale Existenzintervall für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \in U. \end{cases}$$

Der **Definitionsbereich des Flusses** der Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  ist gegeben durch

$$\Omega = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_{\text{Max}}(u)\},$$

und der dazugehörige Fluss  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  ist gegeben durch  $\Phi(t, u_0) = u(t)$ , wobei  $t \mapsto u(t)$  die Lösung des obigen Anfangswertproblems mit Anfangswert  $u(0) = u_0$  bezeichnet.

Wir schreiben auch  $\Phi_t(u) := \Phi(t, u)$ .

Wir bemerken, dass der Fluss des Vektorfeldes  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  daher insbesondere die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, x) = F(\Phi(t, x))$$

für alle  $(t, x) \in \Omega$  löst.

**PROPOSITION 3.18.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  lokal Lipschitz-stetig. Sei  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  der Fluss der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ . Dann gilt

- (1) Für alle  $u_0 \in U$  gilt  $(0, u_0) \in \Omega$  und  $\Phi(0, u_0) = u_0$ , i.e.  $\Phi(0, \cdot) = \text{id}$  auf  $U$ .

- (2) Falls  $(s, u_0) \in \Omega$  und  $(t, \Phi(s, u_0)) \in \Omega$ , so gilt auch  $(s+t, u_0) \in \Omega$  und die Gruppeneigenschaft  $\Phi(s+t, u_0) = \Phi(t, \Phi(s, u_0))$ .

BEWEIS.

Die erste Aussage folgt direkt aus Definition, da jede Lösung des Anfangswertproblem  $\dot{u} = F(u)$  und  $u(0) = u_0$  eben  $0 \in I_{\text{Max}}(u_0)$  und  $u(0) = u_0$  erfüllt.

Für die zweite Aussage behaupten wir, dass die Funktionen  $t \mapsto \Phi(s+t, x_0)$  und  $t \mapsto \Phi(t, \Phi(s, x_0))$  das gleiche Anfangswertproblem lösen. Wir haben  $\Phi(s+t, x_0)|_{t=0} = \Phi(s, x_0)$  und  $\Phi(t, \Phi(s, x_0))|_{t=0} = \Phi(0, \Phi(s, x_0)) = \Phi(s, x_0)$  nach dem ersten Teil der Proposition. Weiterhin lösen beide Funktionen auch die gleiche Differentialgleichung. Die Aussage folgt damit aus der Eindeigkeitsaussage des Satzes von Picard–Lindelöf, Theorem 3.12.  $\square$

BEISPIEL (Fluss einer linearen Differentialgleichung).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ . Wir betrachten die lineare Differentialgleichung  $\dot{u} = Au$ . Dann ist die Lösung für das Anfangswertproblem mit  $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^m$  gegeben durch  $u(t) = \exp(tA)u_0$ . Somit gilt  $I_{\text{Max}}(u_0) = \mathbb{R}$ , und damit  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ . Der Fluss ist gegeben durch  $\Phi(t, u_0) = \exp(tA)u_0$ . Die Gruppeneigenschaft  $\Phi(s+t, u_0) = \Phi(t, \Phi(s, u_0))$  spiegelt sich in der Identität  $\exp((t+s)A)u_0 = \exp(tA)\exp(sA)u_0$  wieder.

BEISPIEL (Fluss einer nichtlinearen Differentialgleichung).

Wir betrachten für  $x : I_{\text{Max}}(u_0) \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung  $\dot{x} = x^2$ , deren Lösung durch

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

gegeben ist. Der Definitionsbereich des Flusses ist

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : tx < 1\},$$

und der Fluss ist gegeben durch die obige Formel, i.e.

$$\Phi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

#### 4. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Für viele Anwendungen (z.B. in der Differentialgeometrie) ist die Regularität des Flusses von großer Bedeutung. Zuerst beweisen wir, dass die Flussabbildung stetig ist.

THEOREM 3.19 (Stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz stetig. Dann ist der Definitionsbereich  $\Omega$  des Flusses  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  eine offene Menge, und die Flussabbildung  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  ist stetig.

Es hilft sich erst das Argument für den global Lipschitz-stetigen Fall auf  $\mathbb{R}^m$  klar zu machen. In diesem Fall ist der Definitionsbereich des Flusses  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ . Lipschitz-Stetigkeit in der Zeitvariable auf kompakten Intervallen folgt dann aus dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung, während Lipschitz-Stetigkeit in der Ortsvariable aus der Grönwall'schen Ungleichung wie im Beweis von Theorem 3.6 folgt. Die Stetigkeitssaussage folgt dann aus der Dreiecksungleichung.

BEWEIS.

Sei  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . Wir wollen zeigen, dass  $\sigma > 0$  existiert, sodass  $B_\sigma(t_0, x_0) \subseteq \Omega$  gilt, und dass die Abbildung  $\Phi$  bei  $(t_0, x_0) \in \Omega$  stetig ist.

##### Schritt 1: Setup und Lokalisation der Abschätzungen

Wir können annehmen, dass  $t_0 \geq 0$  gilt, da der Fall  $t_0 < 0$  analog ist. Sei  $I_{\text{Max}}(u_0) \subseteq \mathbb{R}$  das maximale Existenzintervall. Dann gilt  $(t, x_0) \in \Omega$  für  $t \in [0, t_0] \subseteq I_{\text{Max}}(x_0)$  und da  $I_{\text{Max}}(x_0)$  offen ist, existiert  $t_1 > t_0$ , sodass  $(t, x_0) \in \Omega$  für alle  $t \in [0, t_1]$ .

Da  $t \mapsto \Phi(t, x_0)$  (i.e. Lösung für einen Anfangswert) stetig ist, und  $[0, t_1]$  kompakt ist, folgt, dass

$$K := \{\Phi(t, x_0) : t \in [0, t_1]\} \subseteq U$$

eine kompakte Menge ist. Da  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, existiert  $r > 0$ , sodass

$$0 < 4r < \text{dist}(K, \mathbb{R}^m \setminus U).$$

Da die Menge  $\mathcal{U}_{3r}(K) := \{x \in U : \text{dist}(x, K) \leq 3r\} \subseteq U$  kompakt ist, existieren Konstanten  $M > 0$  und  $L > 0$ , sodass wir für alle  $x, y \in \mathcal{U}_{3r}$  die folgenden Abschätzungen haben:

$$(16) \quad |F(x)| \leq M \quad \text{und} \quad |F(x) - F(y)| \leq L|x - y|.$$

### Schritt 2: Lokale Lipschitz-Stetigkeit in der Raumvariable

LEMMA 3.20.

Sei  $y_0 \in U$ , sodass  $|x_0 - y_0| \leq e^{-t_1 L} r$ . Für alle  $0 \leq t \leq t_1$  mit  $(t, y_0) \in \Omega$  gilt die Abschätzung

$$|\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0|.$$

BEWEIS VON LEMMA 3.20.

Für  $x_0 = y_0$  ist nichts zu zeigen. Daher nehmen wir an  $x_0 \neq y_0$ . Wir geben ein indirektes Argument: Angenommen es existiert  $t \in [0, t_1]$ , sodass  $(t, y_0) \in \Omega$  und

$$|\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| > 2e^{Lt}|x_0 - y_0|.$$

Wir definieren

$$\tau := \inf\{t \in [0, t_1] : (t, y_0) \in \Omega \quad \text{und} \quad |\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| > 2e^{Lt}|x_0 - y_0|\}.$$

Da  $t \mapsto \Phi(t, x_0)$  und  $t \mapsto \Phi(t, y_0)$  stetige Funktionen sind, gilt  $0 < \tau \leq t_1$ , da die Abschätzung in der Aussage für  $t = 0$  erfüllt ist. Aufgrund der Minimalität von  $\tau$  gilt weiterhin

$$(17) \quad |\Phi(\tau, x_0) - \Phi(\tau, y_0)| = 2e^{L\tau}|x_0 - y_0|,$$

und auf dem Intervall  $[0, \tau]$  gilt die Abschätzung

$$|\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0|.$$

Weiterhin gilt für das Intervall  $t \in [0, \tau]$  die Abschätzung

$$|\Phi(t, y_0) - \Phi(t, x_0)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0| \leq 2e^{Lt_1} e^{-Lt_1} r = 2r.$$

Somit gilt  $\Phi(t, y_0) \in \mathcal{U}_{2r}(K)$  für  $t \in [0, \tau]$ , und dies erlaubt uns die Abschätzung (16) auf  $[0, \tau]$  zu verwenden.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert für  $t \in [0, \tau]$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)|^2 &= 2 \langle \Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0), F(\Phi(t, x_0)) - F(\Phi(t, y_0)) \rangle \\ &\leq 2 |\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| \cdot |F(\Phi(t, x_0)) - F(\Phi(t, y_0))| \\ &\leq 2L |\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)|^2. \end{aligned}$$

Mit der Grönwall'schen Ungleichung folgt nach Ziehen der Wurzel

$$|\Phi(\tau, x_0) - \Phi(\tau, y_0)| \leq e^{L\tau}|x_0 - y_0|.$$

Dies steht im Widerspruch zu Gleichung (17). Daher muss die Widerspruchsannahme falsch sein, und die Aussage des Lemma folgt.  $\square$

LEMMA 3.21.

Sei  $y_0 \in U$ , sodass  $|x_0 - y_0| \leq e^{-t_1 L} r$ . Dann gilt  $(t, y_0) \in \Omega$  für alle  $t \in [0, t_1]$ .

BEWEIS VON LEMMA 3.21.

Wir geben einen indirekten Beweis. Angenommen die Lösung  $t \mapsto \Phi(t, y_0)$  existiert auf  $[0, \beta]$  für  $\beta \leq t_1$ . Dann gilt mit Lemma 3.20 die Abschätzung

$$\text{dist}(\Phi(t, y_0), K) \leq |\Phi(t, y_0) - \Phi(t, x_0)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0| \leq 2r$$

nach Wahl von  $y_0 \in U$ . Daher ist  $t \mapsto \Phi(t, y_0)$  in der kompakten Teilmenge  $\mathcal{U}_{2r}(K)$  von  $U$  enthalten. Dies ist ein Widerspruch zur Charakterisierung der maximalen Existenzzeit, Theorem 3.15.  $\square$

**Schritt 3: Lokale Lipschitz-Stetigkeit in beiden Variablen**

LEMMA 3.22.

Sei  $y_0 \in U$ , sodass  $|x_0 - y_0| \leq e^{-t_1 L} r$ . Dann gilt für alle  $t \in [0, t_1]$  die Abschätzung

$$|\Phi(t_0, x_0) - \Phi(t, y)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0| + M|t_0 - t|.$$

BEWEIS VON LEMMA 3.22.

Da  $\Phi(t, x_0) \in K$  für alle  $t \in [0, t_1]$  folgt  $|F(\Phi(t, x_0))| \leq M$ . Somit liefert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$|\Phi(t_0, x_0) - \Phi(t, x_0)| \leq \int_0^t |F(\Phi(s, x_0))| ds \leq M|t_0 - t|.$$

Andererseits liefert die Kombination von Lemma 3.20 und 3.21 für alle  $t \in [0, t_1]$  die Abschätzung

$$|\Phi(t, x_0) - \Phi(t, y_0)| \leq 2e^{Lt}|x_0 - y_0|.$$

Die Dreiecksungleichung liefert dann die Aussage. □**Schritt 4: Konklusion**Sei  $\delta > 0$ , sodass  $t_1 = t_0 + \delta$ . Dann haben wir in den vorherigen Schritten gezeigt, dass es eine offene Umgebung

$$O = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times B_{re^{-Lt_1}}(x_0) \subseteq \Omega.$$

von  $(t_0, x_0)$  in  $\Omega$  gibt. Da die Restriktion  $\Phi|_O$  Lipschitz stetig ist, ist  $\Phi$  insbesondere bei  $(t_0, x_0)$  stetig. Dies beendet den Beweis. □

Als Vorbereitung für den Beweis der differenzierbaren Abhängigkeit von den Anfangswerten benötigen wir die folgende Aussage:

PROPOSITION 3.23.

Sei  $A : [0, T] \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine stetige matrixwertige Funktion. Dann existiert eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion  $M : [0, T] \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ , sodass  $M'(t) = A(t)M(t)$  und  $M(0) = \text{id}_m$ .

BEWEIS.

Man kann die Aussage auf zwei Arten beweisen: Einerseits durch eine Anwendung der Version des Satzes von Picard–Lindelöf für nichtautonome Gleichungen, andererseits direkt durch eine Picard–Iteration. Wir werden letzteres durchführen.

Wir definieren für  $k \in \mathbb{N}_0$  die matrixwertigen Funktionen  $M_k : [0, T] \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  durch

$$M_0(t) = \text{id},$$

$$M_{k+1}(t) = \text{id} + \int_0^t A(s)M_k(s) ds.$$

Da  $t \mapsto A(t)$  stetig ist, existiert eine Konstante  $L > 0$ , sodass  $\sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{R})} \leq L$ .**Behauptung:** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $t \in [0, T]$  gilt die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, T]} \|M_k(t) - M_{k-1}(t)\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{R})} \leq \frac{(LT)^k}{k!}.$$

Der Beweis ist ein direkter Induktionsbeweis.

Damit bilden die matrixwertigen Funktion  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge im Raum  $C([0, T], \text{Mat}(m; \mathbb{R}))$  mit der Norm  $\|M\| = \sup_{t \in [0, T]} \|M(t)\|_{\text{Mat}(m; \mathbb{R})}$ .

Da dieser Raum vollständig ist, existiert der Grenzwert

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k \in C([0, T]; \text{Mat}(m; \mathbb{R})).$$

Da die Konvergenz uniform auf  $[0, T]$  ist, können wir in der Iterationsvorschrift den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  bilden und unter das Integral ziehen, und erhalten

$$M(t) = \text{id} + \int_0^t A(s)M(s) ds$$

Dann gilt  $M(0) = \text{id}$  und der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung liefert, dass  $M : [0, T] \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  stetig differenzierbar ist. Dies beweist die Aussage.  $\square$

Setzt man etwas mehr Regularität für das Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  voraus, so kann man partielle Differenzierbarkeit der Flussabbildung in der Raumvariable zeigen.

**THEOREM 3.24** (Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangsdaten).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und sei  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$  der Definitionsbereich und  $\Phi$  der Fluss der Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ .

Sei  $(t_0, u_0) \in \Omega$  mit  $t_0 \geq 0$ . Wir schreiben  $u(t) = \Phi(t, u_0)$  für die Lösung mit Anfangswert  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , setzen  $A(t) = DF(u(t)) \in \text{Mat}(m; \mathbb{R})$ , sowie  $\Omega_{t_0} = \{x \in U : (t_0, x) \in \Omega\} \subseteq U$ . Sei weiterhin  $M : [0, t_0] \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = \text{id} \in \text{Mat}(m; \mathbb{R}). \end{cases}$$

Dann ist die Abbildung  $\Phi_{t_0} : \Omega_{t_0} \rightarrow U$  differenzierbar bei  $u_0 \in U$  mit Ableitung

$$D\Phi_{t_0}(u_0) = M(t_0).$$

**BEWEIS.**

Sei  $u_0 \in U$ . Ziel ist es den Grenzwert

$$\lim_{v \rightarrow u_0} \frac{|\Phi_{t_0}(u_0) - \Phi_{t_0}(v) - M(t_0)(u_0 - v)|}{|u_0 - v|} = 0$$

zu zeigen. Dazu schätzen wir den Nenner geeignet ab.

### Schritt 1: Lokalisation

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wir setzen  $u(t) = \Phi_t(u_0)$ . Da  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar ist, existiert ein Radius  $r > 0$ , sodass für alle  $t \in [0, t_0]$ :

$$B_{2r}(u(t)) \subseteq U \quad \text{und} \quad \sup_{v \in B_{2r}(u(t))} \|DF(v) - A(t)\| \leq \epsilon.$$

Integration der zweiten Ungleichung über das Liniensegment  $s \mapsto (1-s)v + su(t)$  liefert für alle  $t \in [0, t_0]$  und alle  $v \in B_{2r}(u(t))$  die Ungleichung

$$|F(u(t)) - F(v) - A(t)(u(t) - v)| \leq \epsilon|u(t) - v|.$$

Die Stetigkeit des Flusses  $\Phi$  (siehe Theorem 3.19) ergibt, dass  $\delta \in (0, r)$  existiert, sodass für alle  $v_0 \in \overline{B_\delta(u_0)}$  gilt

$$\sup_{t \in [0, t_0]} |\Phi(t, v_0) - \Phi(t, u_0)| \leq r.$$

Für  $v_0 \in U$  mit  $0 < |u_0 - v_0| \leq \delta$  setzen wir  $v(t) = \Phi(t, v_0)$ . Dann gilt nach der letzten Beobachtung

$$\sup_{t \in [0, t_0]} |v(t) - u(t)| \leq r,$$

und somit nach der vorletzten Beobachtung für alle  $t \in [t, t_0]$  die Abschätzung

$$(18) \quad |F(u(t)) - F(v(t)) - A(t)(u(t) - v(t))| \leq \epsilon|u(t) - v(t)|.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Funktionen  $t \mapsto A(t)$  und  $t \mapsto K(t)$  können wir Konstanten  $L, K > 0$  wählen, sodass

$$\sup_{t \in [0, t_0]} \|A(t)\| \leq L \quad \text{und} \quad \sup_{t \in [0, t_0]} \|M(t)\| \leq K.$$

### Schritt 2: Abschätzung der Ableitung des Nenners des Differentialquotienten

Wir definieren nun die Hilfsfunktion  $Z : [0, t_0] \rightarrow U$  durch

$$Z(t) = u(t) - v(t) - M(t)(u_0 - v_0).$$

Dies ist genau der Zähler des Differentialquotienten.

LEMMA 3.25.

Für alle  $t \in [0, t_0]$  gilt die Abschätzung

$$|\dot{Z}(t)| \leq (L + \epsilon)|Z(t)| + \epsilon K|u_0 - v_0|.$$

BEWEIS.

Wir beobachten

$$(19) \quad \begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= |u(t) - v(t) - M(t)(u_0 - v_0)| + |M(t)(u_0 - v_0)| \\ &\leq |Z(t)| + \|M(t)\| |u_0 - v_0| \leq |Z(t)| + K|u_0 - v_0|. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \dot{u}(t) - \dot{v}(t) - A(t)M(t)(u_0 - v_0) \\ &= F(u(t)) - F(v(t)) - A(t)(u(t) - v(t)) + A(t)(u(t) - v(t) - M(t)(u_0 - v_0)) \\ &= F(u(t)) - F(v(t)) - A(t)(u(t) - v(t)) + A(t)Z(t). \end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen (18) und (19) ergibt sich

$$\begin{aligned} |\dot{Z}(t)| &\leq |F(u(t)) - F(v(t)) - A(t)(u(t) - v(t))| + |A(t)Z(t)| \\ &\leq \epsilon|u(t) - v(t)| + \|A(t)\| |Z(t)| \leq \epsilon(K|u_0 - v_0| + |Z(t)|) + L|Z(t)| \\ &= \epsilon K|u_0 - v_0| + (L + \epsilon)|Z(t)|. \end{aligned}$$

□

### Schritt 3: Abschätzung des Nenners des Differentialquotienten

Die Abschätzung an die Ableitung des Zählers erlaubt uns eine Version der Grönwall'schen Ungleichung zu verwenden, um eine Abschätzung an den Zähler zu erhalten.

LEMMA 3.26.

Für alle  $t \in [0, t_0]$  gilt die Abschätzung

$$|Z(t)|^2 \leq \frac{1}{3} \frac{\epsilon^2 K^2}{(L + \epsilon)^2} (\exp(3(L + \epsilon)t) - 1) \cdot |u_0 - v_0|^2.$$

BEWEIS.

Wir berechnen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\frac{d}{dt} |Z(t)|^2 = 2\langle Z(t), \dot{Z}(t) \rangle \leq 2|Z(t)| |\dot{Z}(t)| \leq 2\epsilon K|u_0 - v_0| |Z(t)| + 2(L + \epsilon)|Z(t)|^2.$$

Die Young'sche Ungleichung liefert

$$2\epsilon K|u_0 - v_0| |Z(t)| \leq \epsilon^2 K^2 (L + \epsilon)^{-1} |u_0 - v_0|^2 + (L + \epsilon)|Z(t)|^2.$$

Daher

$$\frac{d}{dt} |Z(t)|^2 \leq \epsilon^2 K^2 (L + \epsilon)^{-1} |u_0 - v_0|^2 + 3(L + \epsilon)|Z(t)|^2.$$

Die Grönwallsche Ungleichung für Differentialungleichungen der Form  $\eta'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)\eta(t)$  mit  $\eta(0) = |Z(0)| = 0$  ergibt nun die Behauptung des Lemmas.  $\square$

#### Schritt 4: Konklusion

Mit Lemma 3.26 erhalten wir für alle  $v_0 \in U$  mit  $0 < |u_0 - v_0| \leq \delta$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|\Phi_{t_0}(u_0) - \Phi_{t_0}(v_0) - M(t)(u_0 - v_0)|^2}{|u_0 - v_0|^2} &= \frac{|Z(t_0)|^2}{|u_0 - v_0|^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \frac{\epsilon^2 K^2}{(L + \epsilon)^2} (\exp(3(L + \epsilon)t_0) - 1) \cdot |u_0 - v_0|^2. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig ist, gilt

$$\lim_{v \rightarrow u_0} \frac{|\Phi_{t_0}(u_0) - \Phi_{t_0}(v) - M(t)(u_0 - v)|}{|u_0 - v|} = 0.$$

Dies beendet den Beweis.  $\square$

## 5. Der Satz von Liouville

Schlussendlich wollen wir als Anwendung noch einen Satz von Liouville über den Phasenraum beweisen: Der Fluss von Vektorfeldern, die divergenzfrei sind, ist volumenerhaltend.

PROPOSITION 3.27 (Ableitung der Determinante).

Sei  $M : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion, und sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine stetige matrixwertige Funktion. Angenommen es gilt  $M'(t) = A(t)M(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det M(t) = \text{tr } A(t) \det M(t).$$

KOROLLAR 3.28 (Zeitentwicklung der Determinante).

Sei  $M : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion, und sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m; \mathbb{R})$  eine stetige matrixwertige Funktion. Angenommen es gilt  $M'(t) = A(t)M(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ . Dann gilt

$$\det M(t) = \det M(0) \exp \left( \int_0^t \text{tr } A(s) ds \right).$$

BEWEIS.

Die Differentialgleichung der Determinante  $t \mapsto \det M(t)$ , welche in Proposition 3.27 berechnet wurde, ist eine skalare lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In Kapitel 1, Proposition 1.3, haben wir die Lösung einer solchen Gleichung hergeleitet. Damit folgt die Aussage.  $\square$

THEOREM 3.29 (Erhaltung des Phasenvolumen, Liouville).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, und  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  divergenzfrei, i.e.  $\text{div } F(u) = \text{tr } DF(u) = 0$  für alle  $u \in U$ . Dann ist der Fluss  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  volumenerhaltend, i.e. es gilt für alle  $(t, u) \in \Omega$ , dass  $\det D\Phi_t(u) = 1$ .

BEWEIS.

Sei  $(t_0, u_0) \in \Omega$ . Wir setzen  $u(t) = \Phi(t, u_0)$  und  $A(t) = DF(u(t))$ . Dann gilt nach Theorem 3.24, dass  $D\Phi_t(x_0) = M(t)$ , wobei  $t \mapsto M(t)$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = \text{id}, \end{cases}$$

auf  $[0, t_0]$  ist. Da das Vektorfeld  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  divergenzfrei auf  $U$  ist, folgt  $\text{tr } A(t) = 0$  auf  $[0, t_0]$ . Damit liefert Korollar 3.28 die Gleichheit

$$\det \Phi_t(x_0) = \det M(t) = \det M(0) = 1.$$

Dies beweist die Aussage.  $\square$





## Analyse von Gleichgewichtspunkten

In den folgenden Definitionen 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 nehmen wir an, dass  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^m$  ist und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lokal Lipschitz stetige Funktion. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ , und den dazugehörigen Fluss  $\Phi : \Omega \subseteq [0, \infty) \times U \rightarrow U$ .

DEFINITION 4.1 (Gleichgewichtspunkt).

Ein Punkt  $\bar{u} \in U$  heißt **Gleichgewichtspunkt**, falls  $F(\bar{u}) = 0$ .

DEFINITION 4.2 (Stabiler Gleichgewichtspunkt).

Ein Punkt  $\bar{u} \in U$  heißt **stabiler Gleichgewichtspunkt** für falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle Anfangsdaten  $u \in B_\delta(\bar{u})$  und alle Zeiten  $t \geq 0$  die Relation  $\Phi_t(u) \in B_\epsilon(\bar{u})$  gilt.

DEFINITION 4.3 (Asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt).

Ein Punkt  $\bar{u} \in U$  heißt **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**, falls  $\bar{u} \in U$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, und falls  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle Anfangsdaten  $u \in B_\delta(\bar{u})$  der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(u) = \bar{u}$  erfüllt ist.

DEFINITION 4.4 (Exponentiell stabiler Gleichgewichtspunkt).

Ein Punkt  $\bar{u} \in U$  heißt **exponentiell stabiler Gleichgewichtspunkt**, falls ein Radius  $\delta > 0$ , und Konstanten  $\alpha > 0$  und  $C > 0$  existieren, sodass für alle Anfangsdaten  $u \in B_\delta(\bar{u})$  die Abschätzung  $|\Phi_t(u) - \bar{u}| \leq C \exp(-\alpha t)$  gilt.

PROPOSITION 4.5.

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein lokal Lipschitz stetiges Vektorfeld. Weiterhin sei  $u \in U$  ein Gleichgewichtspunkt für die Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ . Dann gelten die Implikationen:

$$\begin{aligned} u \in U \text{ exponentiell stabiler Gleichgewichtspunkt} &\implies u \in U \text{ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt} \\ &\implies u \in U \text{ stabiler Gleichgewichtspunkt} \\ &\implies u \in U \text{ Gleichgewichtspunkt.} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt keine der Umkehrungen der obigen Implikationen.

BEWEIS.

Dies ist eine direkte Konsequenz der obigen Definitionen. □

### 1. Stabilitätsanalyse mittels der Linearisierung

THEOREM 4.6 (Kriterium für asymptotische Stabilität).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, und betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  mit Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$ . Falls alle Eigenwerte der Matrix  $A = DF(\bar{u})$  negativen Realteil haben, dann ist der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}$  asymptotisch stabil.

BEWEIS.

#### Schritt 1 — Reduktion

Durch eine Translation können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall  $0 \in U$  und  $\bar{u} = 0 \in U$  zurückziehen.

#### Schritt 2 — Konvergenz $\Phi_t(v) \rightarrow 0$ entlang einer Folge

Da alle Eigenwerte von  $A = DF(\bar{u})$  negativen Realteil haben, folgt mit Korollar 2.23 die Asymptotik  $\exp(tA) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Daher existiert  $\tau > 0$ , sodass  $\|\exp(\tau A)\| \leq \frac{1}{4}$ .

Da  $t \mapsto A(t) = DF(\Phi_t(\bar{u})) = DF(\bar{u})$  konstant ist, folgt, dass  $M(t) = \exp(tA)$  die Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{M}(t) = AM(t)$  mit  $M(0) = \text{id}$ . Daher gilt nach Theorem 3.24 über die Differenzierbarkeit des Flusses

$$D\Phi_t(0) = \exp(\tau A).$$

Weiterhin liefert die Differenzierbarkeit des Flusses die Asymptotik

$$\Phi_\tau(v) = \Phi_\tau(0) + D\Phi_\tau(0)v + R(v) \text{ mit } \frac{R(v)}{|v|} \rightarrow 0 \text{ für } v \rightarrow 0.$$

Dies impliziert die Existenz von  $r > 0$ , sodass

$$|\Phi_\tau(v) - \exp(\tau A)v| \leq \frac{1}{4}|v|$$

für alle  $v \in B_r(0)$ . Somit für alle  $v \in B_r(0)$  auch

$$|\Phi_\tau(v)| \leq |\Phi_\tau(v) - \exp(\tau A)v| + |\exp(\tau A)v| \leq \frac{1}{2}|v|.$$

Dies impliziert  $\Phi_\tau(v) \in B_r(0)$  für  $v \in B_r(0)$ . Mittels Iteration erhalten wir für  $k \geq 0$  die Ungleichung

$$|\Phi_{k\tau}(v)| \leq 2^{-k}|v|.$$

Damit wissen wir, dass es eine Folge  $(k\tau)_{k \geq 0}$  von Zeiten gibt, sodass die Lösung zurück zu  $\bar{u}$  konvergiert.

### Schritt 3 — Volle Konvergenz $\Phi_t(v) \rightarrow 0$

Sei nun  $\epsilon \in (0, r)$ . Wir bemerken  $[0, \tau] \times B_r(0) \subseteq \Omega$ . Da die Flussabbildung nach Theorem 3.19 stetig ist, und  $[0, \tau]$  kompakt ist, folgt für alle  $v \in B_\delta(0)$  die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, \tau]} |\Phi_t(v)| \leq \sup_{t \in [0, \tau]} |\Phi(t, v) - \Phi(t, 0)| < \epsilon.$$

Daher gilt für alle  $k \geq 0$ ,  $t \in [0, \tau]$  und  $v \in B_\delta(0)$  die Ungleichung

$$|\Phi_{k\tau+t}(v)| = |\Phi_{k\tau}(\Phi_t(v))| \leq 2^{-k}|\Phi_t(v)| \leq 2^{-k}\epsilon.$$

Für  $v \in B_\delta(0)$  schliessen wir für alle  $t \geq 0$  die Inklusion  $\Phi_t(v) \in B_\epsilon(0)$ . Damit ist  $\bar{u} = 0$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Die obige Abschätzung liefert noch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(v) = 0$ . Dies zeigt, dass  $\bar{u} = 0$  ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.  $\square$

THEOREM 4.7 (Kriterium für Instabilität).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, und betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  mit Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$ . Falls ein Eigenwert der Matrix  $A = DF(\bar{u})$  positiven Realteil hat, dann ist der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}$  nicht stabil.

BEWEIS.

Der Beweis dieser Aussage ist grundsätzlich ähnlich wie der Beweis von Theorem 4.6, allerdings deutlich technischer. Wir verweisen den geneigten Leser auf Theorem 4.6. in den Vorlesungsnotizen von S. Brendle.  $\square$

BEISPIEL (Ein eindimensionales Beispiel).

Wir betrachten für  $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung  $\dot{u} = u - u^3$ . Dann sind die Gleichgewichtspunkte gegeben durch  $u_- = -1$ ,  $u_0 = 0$  und  $u_+ = 1$ . Für  $F(u) = u - u^3$  gilt  $F'(u) = 1 - 3u^2$ , und somit sind die Linearisierungen gegeben durch

$$A_- = F'(u_-) = 1 - 3(-1)^2 = -2 < 0,$$

$$A_0 = F'(u_0) = 1 - 3(0)^2 = 1 > 0,$$

$$A_+ = F'(u_+) = 1 - 3(1)^2 = -2 < 0.$$

Nach dem Stabilitätskriterium, Theorem 4.6, sind die Gleichgewichtspunkte  $u_- = -1$  und  $u_+ = 1$  asymptotisch stabil, während nach dem Instabilitätskriterium, Theorem 4.7, der Gleichgewichtspunkt  $u_0 = 0$  nicht stabil ist.

## 2. Lyapunow-Funktionen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, und betrachte die autonome gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  mit Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$ .

**THEOREM 4.8** (Erstes Kriterium von Lyapunow).

Sei  $\bar{u} \in U$  ein Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ ; und sei  $r > 0$  ein Radius, sodass  $B_r(\bar{u}) \subseteq U$ . Weiterhin sei  $L : B_r(\bar{u}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, sodass  $\bar{u} \in U$  ein striktes lokales Minimum ist und für alle  $u \in B_r(\bar{u})$  die Ungleichung  $\langle DL(u), F(u) \rangle \leq 0$  gilt. Dann ist der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$  stabil.

**BEWEIS.**

Da  $\bar{u} \in B_r(\bar{u})$  ein striktes lokales Minimum der Funktion  $L$  ist, existiert ein Radius  $\sigma > 0$ , sodass die Ungleichung  $L(\bar{u}) < L(u)$  für alle  $u \in B_\sigma(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$  gilt.

Sei nun  $\epsilon \in (0, r)$  gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von  $L$  existieren  $\eta \in (0, \epsilon)$  und  $\delta \in (0, \eta)$ , sodass

$$L(\bar{u}) < \sup_{u \in B_\delta(\bar{u})} L(u) < \inf_{u \in \partial B_\eta(\bar{u})} L(u).$$

Um Stabilität des Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$  zu zeigen, beweisen wir nun, dass für alle  $t \geq 0$  und alle  $u_0 \in B_\delta(\bar{u})$  bereits  $\Phi_t(u_0) \in B_\eta(\bar{u}) \subseteq B_\epsilon(\bar{u})$  gilt.

Wir geben ein indirektes Argument: Sei  $u_0 \in B_\delta(\bar{u})$ , and angenommen es existiert  $t > 0$ , sodass  $\Phi_t(u_0) \notin B_\eta(\bar{u})$ . Wir setzen

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : \Phi_t(u_0) \notin B_\eta(\bar{u})\}.$$

Dann gilt  $\tau > 0$  und  $\Phi_\tau(u_0) \in \partial B_\eta(\bar{u})$  aufgrund von Stetigkeit der Abbildung  $t \mapsto \Phi_t(u_0)$ .

Für  $u_0 \in B_\delta(\bar{u})$  berechnen wir nun mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} L(\Phi_t(u_0)) = \left\langle DL(\Phi_t(u_0)), \frac{d}{dt} \Phi_t(u_0) \right\rangle = \langle DL(\Phi_t(u_0)), F(\Phi_t(u_0)) \rangle \leq 0.$$

für alle  $t \in (0, \tau)$ . Daher ist die Funktion  $t \mapsto L(\Phi_t(u_0))$  monoton fallend auf  $[0, \tau]$ . Somit gilt

$$\inf_{u \in \partial B_\eta(\bar{u})} L(u) \leq L(\Phi_\tau(u_0)) \leq L(u_0) \leq \sup_{u \in B_\delta(\bar{u})} L(u).$$

Dies ist ein Widerspruch. Somit muss  $\Phi_t(u_0) \in B_\eta(\bar{u}) \subseteq B_\epsilon(\bar{u})$  für alle  $t \geq 0$  gelten.  $\square$

**BEISPIEL** (Eine Lyapunow-Funktion für den harmonischen Oszillator).

Der harmonischen Oszillator  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\dot{u} = F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} u$$

hat den Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \omega_0^2 u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

und berechnen

$$\langle DL(u), F(u) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega_0^2 u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

für alle  $u \in \mathbb{R}^2$ . Es gilt auch  $L(u_1, u_2) > 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ , somit ist  $\bar{u} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  ein striktes Minimum. Eine Anwendung des ersten Kriteriums von Lyapunow, Theorem 4.8, liefert nun, dass der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  stabil ist. Die Funktion  $L$  stellt (bis auf ein Vielfaches) die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators dar.

**THEOREM 4.9** (Zweites Kriterium von Lyapunow).

Sei  $\bar{u} \in U$  ein Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$ ; und sei  $r > 0$  ein Radius, sodass  $B_r(\bar{u}) \subseteq U$ . Weiterhin sei  $L : B_r(\bar{u}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion, sodass  $\bar{u} \in U$  ein striktes lokales Minimum ist und für alle  $u \in B_r(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$  die strikte Ungleichung  $\langle DL(u), F(u) \rangle < 0$  gilt. Dann ist der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} \in U$  asymptotisch stabil.

BEWEIS.

Aus dem ersten Kriterium von Lyapunow, Theorem 4.8, folgt direkt, dass der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u}$  stabil ist. Daher existiert  $\delta \in (0, r/2)$ , sodass  $\Phi_t(u) \in B_{r/2}(\bar{u})$  für alle  $t \geq 0$  und alle  $u \in B_\delta(\bar{u})$  gilt.

Wir geben ein indirektes Argument, um asymptotische Stabilität zu zeigen: Angenommen es existiert  $u_0 \in B_\delta(\bar{u})$ , sodass  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(u_0) - \bar{u}| > 0$ . Dann existiert eine Folge  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $t_k \geq 0$ ,  $t_k \rightarrow \infty$ , sodass  $\liminf_{k \rightarrow \infty} |\Phi_{t_k}(u_0) - \bar{u}| > 0$ .

Da die Folge  $(\Phi_{t_k}(u_0))_{k \in \mathbb{N}}$  in der kompakten Teilmenge  $\overline{B_{r/2}(\bar{u})} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$  enthalten ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit  $(\Phi_{t_k}(u_0))_{k \in \mathbb{N}}$  bezeichnen, sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_k}(u_0) = v_0 \in \overline{B_{r/2}(\bar{u})} \setminus \{\bar{u}\}$ .

Da insbesondere  $\langle DL(u), F(u) \rangle \leq 0$  auf  $B_r(\bar{u})$  gilt, schliessen wir mit der selben Rechnung wie im Beweis des ersten Kriteriums von Lyapunow, Theorem 4.8, dass die Funktion  $t \mapsto L(\Phi_t(u_0))$  für alle  $u_0 \in B_\delta(\bar{u})$  monoton fallend ist. Daher existiert der Grenzwert  $L_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(u_0))$ .

Mit der Stetigkeit des Flusses, Theorem 3.19, der Stetigkeit der Lyapunow-Funktion  $L$ , und der Beobachtung, dass  $\mathbb{R} \times B_\delta(u_0) \subseteq \Omega$ , schliessen wir nun

$$L(\Phi_t(v_0)) = L\left(\Phi_t\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{t_k}(u_0)\right)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(\Phi_t(\Phi_{t_k}(u_0))) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(\Phi_{t+t_k}(u_0)) = L_\infty$$

für alle  $t \geq 0$ . Daher ist die Funktion  $t \mapsto L(\Phi_t(v_0))$  konstant. Somit gilt nach Differentiation

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(\Phi_t(v_0)) = \langle DL(v_0), F(v_0) \rangle.$$

Da  $\bar{u} \neq v_0$  gilt, ist dies ein Widerspruch zur Annahme  $\langle DL(v), F(v) \rangle < 0$  für alle  $v_0 \in B_r(\bar{u}) \setminus \bar{u}$ .  $\square$

BEISPIEL (Der gedämpfte harmonische Oszillator).

Der gedämpften harmonischen Oszillator  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\dot{u} = F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} u$$

hat den Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} = (0, 0)$ . Wir betrachten wie oben die Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \omega_0^2 u_1^2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

welche die Gesamtenergie des Systems darstellt, und berechnen

$$\langle DL(u), F(u) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega_0^2 u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 - 2\beta u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2\beta u_2^2 \leq 0$$

für alle  $u \in \mathbb{R}^2$ . Das erste Kriterium von Lyapunow liefert nun, dass der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} = (0, 0)$  stabil ist. Das zweite Kriterium von Lyapunow ist nicht anwendbar, um asymptotische Stabilität zu zeigen; aber der Gleichgewichtspunkt  $\bar{u} = (0, 0)$  ist asymptotisch stabil nach dem Linearisierungskriterium, Theorem 4.6, da  $\operatorname{Re}(\lambda_j) = -\beta < 0$  für die Eigenwerte gilt.

Im obigen Beispiel gilt die strikte Ungleichung  $\langle DL(u), F(u) \rangle < 0$  auf der offenen und dichten Teilmenge  $A = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ , aber das zweite Kriterium von Lyapunow ist nicht anwendbar. Eine solche Situation tritt häufiger auf, und oft reicht eine Verfeinerung, das Invarianzprinzip von LaSalle, um dennoch asymptotische Stabilität zu zeigen.

### 3. Gradientensysteme

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein lokal Lipschitz stetiges Vektorfeld.

DEFINITION 4.10 (Gradientensystem).

Die autonome Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  ist ein **Gradientensystem**, falls eine stetig differenzierbare Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(u) = -DV(u)$  existiert.

PROPOSITION 4.11 (Lyapunow-Funktionen für Gradientensysteme I).

Sei  $\dot{u} = -DV(u)$  ein Gradientensystem, und sei  $\bar{u} \in U$  ein striktes lokales Minimum der Funktion  $u \mapsto V(u)$ . Dann ist  $\bar{u} \in U$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

BEWEIS.

Da der Punkt  $\bar{u} \in U$  ein lokales Minimum für die Funktion  $V$  ist, ist er insbesondere ein kritischer Punkt. Damit gilt  $F(\bar{u}) = -DV(\bar{u}) = 0$ , und somit ist  $\bar{u} \in U$  ein Gleichgewichtspunkt.

Da  $\dot{u} = F(u)$  ein Gradientensystem ist, erhalten wir für alle  $u \in U$  die Abschätzung

$$\langle DV(u), F(u) \rangle = -|DV(u)|^2 \leq 0.$$

Da  $\bar{u} \in U$  ein striktes lokales Minimum für die Funktion  $V$  ist, folgt aus dem erstem Kriterium von Lyapunow, Theorem 4.8, dass  $\bar{u} \in U$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.  $\square$

PROPOSITION 4.12 (Lyapunow-Funktionen für Gradientensystem II).

Sei  $\dot{u} = -DV(u)$  ein Gradientensystem, und sei  $\bar{u} \in U$  ein striktes lokales Minimum der Funktion  $u \mapsto V(u)$ . Falls  $\bar{u} \in U$  ein isolierter Gleichgewichtspunkt ist, dann ist  $u \in U$  ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

#### 4. Hamiltonsche Systeme

DEFINITION 4.13 (Hamiltonsche Systeme).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{2m}$  offen, und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  ein lokal Lipschitz stetiges Vektorfeld. Wir betrachten die Matrix  $J \in \text{Mat}(2m; \mathbb{R})$  gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine autonome Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  heißt **Hamiltonsches System**, falls stetig differenzierbare Funktion  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(u) = JDH(u)$  existiert. Die Funktion  $H$  wird **Hamiltonsche Funktion** genannt.

Der harmonische Oszillator  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 \end{pmatrix}$$

ist ein Beispiel für ein Hamiltonsches System. Eine Hamiltonsche Funktion  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $H(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\omega_0^2 u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2$  und somit gilt

$$JDH(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0^2 u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\omega_0^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

DEFINITION 4.14 (Erhaltungsgröße).

Sei  $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung  $\dot{u} = F(u)$  löst. Dann ist eine Funktion  $E : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Erhaltungsgröße**, falls

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = 0$$

für alle  $t \in I$  gilt.

PROPOSITION 4.15.

Sei  $\dot{u} = F(u)$  ein Hamiltonsches System mit  $F(u) = JDH(u)$ . Dann ist die Hamiltonsche Funktion eine Erhaltungsgröße.

BEWEIS.

Mit der Kettenregel berechnet man für eine Lösung  $t \mapsto u(t)$  der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \langle DH(u(t)), \dot{u}(t) \rangle = \langle DH(u(t)), JDH(u(t)) \rangle = 0,$$

wobei wir die Schiefsymmetrie der Matrix  $J \in \text{Mat}(2m; \mathbb{R})$  in der letzten Gleichung ausgenutzt haben.  $\square$

PROPOSITION 4.16.

*Sei  $\dot{u} = F(u)$  mit  $F(u) = JDH(u)$  ein Hamiltonsches System. Falls die Funktion bei  $\bar{u} \in U$  ein striktes Minimum annimmt, so ist  $\bar{u} \in U$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.*

BEWEIS.

Der Punkt  $\bar{u} \in U$  ist ein lokales Minimum für die Funktion  $H$ , und somit auch ein kritischer Punkt. Damit gilt  $F(\bar{u}) = JDH(\bar{u}) = 0$ , und somit ist  $\bar{u} \in U$  ein Gleichgewichtspunkt.

Aufgrund der Schiefsymmetrie der Matrix  $J \in \text{Mat}(2m; \mathbb{R})$  gilt

$$\langle DH(u), F(u) \rangle = \langle DH(u), JDH(u) \rangle = 0.$$

Somit ist  $u \mapsto H(u)$  eine Lyapunow-Funktion. Mit dem ersten Kriterium von Lyapunow, Theorem 4.8, folgt, dass  $\bar{u} \in U$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.  $\square$

PROPOSITION 4.17.

*Sei  $\dot{u} = F(u)$  mit  $F(u) = JDH(u)$  ein Hamiltonsches System mit  $H \in C^2(U)$ . Dann ist der Fluss volumenerhaltend, i.e. für alle  $(t, u) \in \Omega$  gilt  $\det D\Phi_t(u) = 1$ .*

BEWEIS.

Die Regularitätsannahme liefert  $F \in C^1(U)$ . Wir berechnen:

$$\text{div } F(u) = \sum_{i=1}^{2m} \partial_i F_i(u) = \sum_{i,j=1}^{2m} \partial_i (J_{ij} \partial_j H(u)) = \sum_{i,j=1}^{2m} J_{ij} \partial_i \partial_j H(u) = 0,$$

wobei wir die Symmetrie der Matrix  $D^2H \in \text{Mat}(2m; \mathbb{R})$  in Kombination mit der Schiefsymmetrie der Matrix  $J \in \text{Mat}(2m; \mathbb{R})$  ausgenutzt haben.

Die Aussage folgt nun aus dem Theorem von Liouville, Theorem 3.29.  $\square$

## Normalformen für Matrizen

### 1. Diagonalisierbare Matrizen

DEFINITION A.1 (Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräume).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann heißt  $\lambda \in \mathbb{C}$  **Eigenwert** der Matrix  $A$ , falls  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  existiert, sodass  $Av = \lambda v$ . Eine solche Lösung  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$  nennt man **Eigenvektor** der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Der Untervektorraum  $E(\lambda) \subseteq \mathbb{C}^m$  gegeben durch

$$E(\lambda) = \ker(A - \lambda \text{id}) = \{v \in \mathbb{C}^m : Av = \lambda v\}$$

heißt **Eigenraum** zum Eigenwert  $\lambda$ .

DEFINITION A.2 (Charakteristisches Polynom einer Matrix).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann heißt das Polynom  $^1 p_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \text{id})$$

das **charakteristische Polynom** der Matrix  $A$ .

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind gerade die Eigenwerte der Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Da wir Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  betrachten, zerfällt nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** jedes Polynom in Linearfaktoren:

$$p_A(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

wobei  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  und  $\nu_j \in \mathbb{N}$  mit  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$ . Die Vielfachheit  $\nu_j$  wird als **algebraische Vielfachheit**  $\text{alg}(\lambda_j)$  des Eigenwertes  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  bezeichnet. Definieren wir die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes  $\lambda_j$  durch  $\text{geo}(\lambda_j) := \dim E(\lambda_j)$ , so gilt immer die Ungleichung  $1 \leq \text{geo}(\lambda_j) \leq \text{alg}(\lambda_j)$ .

DEFINITION A.3 (Diagonalisierbare Matrizen).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann heißt die Matrix  $A$  **diagonalisierbar**, falls eine Diagonalmatrix  $D \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  und eine invertierbare Matrix  $P \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  existieren, sodass  $A = PDP^{-1}$ .

Die Matrix  $A \in \text{Mat}(2; \mathbb{R})$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar, und sie hat den Eigenwert  $\lambda = 0$  mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

Die folgende Aussage liefert eine Charakterisierung der diagonalisierbaren Matrizen:

THEOREM A.4 (Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  mit algebraischen Vielfachheiten  $\nu_1, \dots, \nu_k$ , sodass  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$ . Dann ist die Matrix  $A$  genau dann diagonalisierbar, falls für alle  $1 \leq j \leq k$  gilt, dass

<sup>1</sup>Streng genommen sollten wir hier zwischen der Polynomfunktion  $p_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und dem Polynom  $p_A \in \mathbb{R}[\lambda]$  unterscheiden. Da wir über dem Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  arbeiten, sind diese Konzepte aber in direkter Korrespondenz — und wir werden daher den Begriff Polynom auf für die Polynomfunktion verwenden.

algebraische Vielfachheit und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, i.e.  $\text{alg}(\lambda_j) = \text{geo}(\lambda_j)$ . Insbesondere erhalten wir falls  $A$  diagonalisierbar ist, eine Zerlegung von  $\mathbb{C}^m$  in Eigenräume von  $A$ :

$$\mathbb{C}^m = \bigoplus_{j=1}^k E(\lambda_j), \text{ wobei } \dim E(\lambda_j) = \text{geo}(\lambda_j) = \text{alg}(\lambda_j).$$

KOROLLAR A.5 (Matrizen mit charakteristischen Polynomen mit einfachen Nullstellen).  
Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ , sodass das charakteristische Polynom  $p_A$  in einfache Nullstellen zerfällt, i.e.

$$p_A(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)$$

für  $\lambda_j \neq \lambda_k$  für  $j \neq k$ . Dann ist die Matrix  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  diagonalisierbar, und es gilt die Zerlegung

$$\mathbb{C}^m = \bigoplus_{j=1}^m E(\lambda_j).$$

von  $\mathbb{C}^m$  in Eigenräume, wobei  $\dim E(\lambda_j) = 1$  für alle  $1 \leq j \leq m$  gilt.

## 2. LN-Zerlegung

Nun wollen wir den allgemeinen Fall diskutieren. Dazu definieren wir eine Verallgemeinerung von Eigenräumen und Eigenvektoren.

DEFINITION A.6 (Hauptraum und Hauptvektoren).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  eine Matrix mit charakteristischem Polynom  $p_A$ , welches in der Form

$$p_A(\lambda) = (-1)^m (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  und Multiplizitäten  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$  mit  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$  faktorisiert. Wir definieren den **Hauptraum** (auch **verallgemeinerter Eigenraum**) zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  durch

$$\mathcal{H}(\lambda_j) = \ker(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} = \{v \in \mathbb{C}^m : (A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} v = 0\}.$$

Elemente  $v \in \mathcal{H}(\lambda_j) \setminus \{0\}$  werden **Hauptvektoren** (auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**) genannt.

Für diagonalisierbare Matrizen  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  haben wir eine Zerlegung von  $\mathbb{C}^m$  in Eigenräume der Matrix. Die Hauptraumzerlegung liefert eine analoge Aussage für den allgemeinen Fall.

THEOREM A.7 (Hauptraumzerlegung).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  eine Matrix mit charakteristischem Polynom  $p_A$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  mit Multiplizitäten  $\nu_1, \dots, \nu_k \geq 1$ , sodass  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$ . Dann induziert  $A$  die Hauptraumzerlegung

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{H}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}(\lambda_k).$$

Dies bedeutet, dass für jedes  $v \in \mathbb{C}^m$  eindeutige Vektoren  $w_j \in \mathcal{H}(\lambda_j)$  (wobei  $1 \leq j \leq k$ ) existieren, sodass  $v = w_1 + \dots + w_k$ .

DEFINITION A.8 (Nilpotente Matrizen).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann heißt die Matrix  $A$  **nilpotent**, falls  $A^m = 0$ .

KOROLLAR A.9 (Charakterisierung nilpotenter Matrizen).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die Matrix  $A$  ist nilpotent, i.e.  $A^m = 0$ .
- (2) Es existiert ein  $1 \leq k \leq m$ , sodass  $A^k = 0$ .
- (3) Alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  der Matrix  $A$  sind null.
- (4) Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ist gegeben durch  $p_A(\lambda) = (-1)^m \lambda^m$ .



BEWEIS.

(1)  $\implies$  (2): Dies ist direkt, indem man  $k = m$  wählt.

(2)  $\implies$  (3): Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert mit Eigenvektor  $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ . Dann gilt  $Av = \lambda v$  und somit

$$0 = A^k v = \lambda^k v.$$

Dies impliziert,  $\lambda^k = 0$ , da  $v \neq 0$ , und somit folgt  $\lambda = 0$ .

(3)  $\implies$  (4): Aus der Faktorisierung

$$p_A(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

folgt die Aussage mit  $\lambda_j = 0$  für alle  $1 \leq j \leq k$  direkt.

(4)  $\implies$  (1): Der Satz von Cayley–Hamilton liefert  $p_A(A) = 0_{\text{Mat}(m; \mathbb{C})}$  und somit gilt nach Voraussetzung

$$0 = p_A(A) = (-1)^m A^m.$$

□

THEOREM A.10 (Existenz der LN-Zerlegung).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann existieren Matrizen  $L, N \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) die Matrix  $L \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ist diagonalisierbar,
- (2) die Matrix  $N \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  ist nilpotent,
- (3) die Matrizen  $L$  und  $N$  kommutieren, i.e.  $[L, N] = LN - NL = 0$ ,
- (4) es gilt  $A = L + N$ .

Weiterhin sind die Matrizen  $L, N \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  (bis auf Permutationsmatrizen) eindeutig bestimmt.

BEWEIS.

**Existenz der LN-Zerlegung:**

Sei dazu  $p_A$  das charakteristische Polynom der Matrix  $A$ , welches wir in der Form

$$p_A(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$$

faktorisieren, wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte mit Multiplizitäten  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$  mit  $\nu_1 + \dots + \nu_k = m$  sind. Nach Theorem A.7 gibt es eine Hauptraumzerlegung

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{H}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}(\lambda_k), \text{ wobei } \mathcal{H}(\lambda_j) = \ker(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j}.$$

Wir definieren eine lineare Abbildung  $T: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  wie folgt: Für  $w \in \mathcal{H}(\lambda_j)$  setzen wir  $T(w) = \lambda_j w$ . Wir erweitern diese Abbildung mittels der Hauptraumzerlegung  $v = w_1 + \dots + w_k$  auf  $\mathbb{C}^m$ , i.e.  $T(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$ . Sei  $L \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  die Matrixdarstellung dieser Abbildung. Nach Konstruktion gilt  $\ker(L - \lambda_j \text{id}) = \ker(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j}$  für die Eigenräume der Matrix  $L$  und die Haupträume der Matrix  $A$ . Insbesondere folgt mit der Hauptraumzerlegung für  $A$  von oben eine Zerlegung von  $\mathbb{C}^m$  durch Eigenräume der Abbildung  $L$ :

$$\mathbb{C}^m = \ker(L - \lambda_1 \text{id}) \oplus \dots \oplus \ker(L - \lambda_k \text{id}).$$

Nach der Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit folgt, dass die Matrix  $L$  diagonalisierbar ist, i.e. Eigenschaft (1) in Theorem A.10.

Wir behaupten, dass die Matrizen  $A$  und  $L$  kommutieren. Aufgrund der Hauptraumzerlegung und Linearität genügt es zu zeigen, dass  $ALw_j = LAw_j$  für alle  $w_j \in \mathcal{H}(\lambda_j)$ . Nach Konstruktion von  $L$  gilt  $Lw_j = \lambda_j w_j$ . Andererseits gilt auch  $(A - \lambda_j \text{id})Aw_j = A(A - \lambda_j \text{id})w_j$ , und daher durch Induktion  $(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} Aw_j = A(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} w_j = 0$ . Somit gilt  $Aw_j \in \ker(A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j}$ . Nach Konstruktion der Abbildung  $L$  gilt dann  $LAw_j = \lambda_j Aw_j$ . Somit gilt

$$LAw_j = \lambda_j Aw_j = A(\lambda_j w_j) = ALw_j.$$

Daher kommutieren die Matrizen  $A$  und  $L$ .

Wir definieren  $N := A - L$ . Nach Definition gilt  $A = L + N$ , und somit Eigenschaft (3) in Theorem A.10. Wir berechnen

$$LN = L(A - L) = LA - L^2 = AL - L^2 = (A - L)L = NL.$$

Somit folgt  $LN = NL$  und damit Eigenschaft (4) in Theorem A.10.

Es bleibt Eigenschaft (2) in Theorem A.10 zu zeigen, i.e. die Nilpotenz von  $N$ .

Aufgrund der Hauptraumzerlegung genügt es wieder  $N^m w_j = 0$  für  $w_j \in \mathcal{H}(\lambda_j)$  zu zeigen. Nach Konstruktion von  $N$  und  $L$  gilt  $Nw_j = Aw_j - Lw_j = (A - \lambda_j \text{id})w_j$ , i.e.  $Nw_j \in \ker(A - \lambda_j)$ . Iterativ folgt  $N^r w_j \in \ker(A - \lambda_j)^r$  für alle  $1 \leq r \leq n$ . Nach Definition des Hauptraumes  $\mathcal{H}(\lambda_j)$  folgt

$$N^m w_j = (A - \lambda_j \text{id})^m w_j = (A - \lambda_j \text{id})^{n-\nu_j} (A - \lambda_j \text{id})^{\nu_j} w_j = 0.$$

Dies beweist die Nilpotenz von  $N$ , und daher Eigenschaft (2) von Theorem A.10. Dies beendet den Beweis der Existenz.

### Eindeutigkeit der LN-Zerlegung:

Für die Eindeutigkeitsaussage verweisen wir auf Abschnitt 2.3 in den Vorlesungsnotizen von S. Brendle.  $\square$

KOROLLAR A.11 (Berechnung des Matrixexponential mit der LN-Zerlegung).

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  mit LN-Zerlegung  $A = L + N$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tA) = \exp(tL) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} N^j.$$

Falls  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  eine Diagonalmatrix, und  $P \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$  eine invertierbare Matrix ist, sodass  $L = PDP^{-1}$ , so gilt

$$\exp(tA) = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_m t) \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} N^j.$$

BEWEIS.

Sei  $A \in \text{Mat}(m; \mathbb{C})$ . Dann existiert nach Theorem A.10 eine LN-Zerlegung  $A = L + N$ , und es gilt insbesondere  $LN = NL$ . Nach Proposition 2.9 für das Matrixexponential von kommutierenden Matrizen gilt  $\exp(tA) = \exp(tL) \exp(tN)$ . Da die Matrix  $N$  in der LN-Zerlegung nach Konstruktion nilpotent mit  $N^m = 0$  ist, gilt

$$\exp(tN) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} N^j = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} N^j.$$

Dies zeigt die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt aus der Rechenregel für das Matrixexponential ähnlicher Matrizen, Lemma 2.7, und aus der Rechenregel für das Matrixexponential von Diagonalmatrizen, Lemma 2.5.  $\square$

## Erweiterungen zur Existenztheorie

### 1. Der Satz von Peano

THEOREM B.1 (Existenzsatz von Peano).

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $x_0 \in U$ , und sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein stetiges Vektorfeld. Dann existiert  $\delta = \delta(x_0, F) > 0$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $x : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ , welche das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in U \end{cases}$$

auf dem Interval  $(-\delta, \delta)$  löst.